



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [3 балла] Найдите все действительные значения  $x$ , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её седьмой член равен  $\sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}$ , тринадцатый член равен  $5-x$ , а пятнадцатый член равен  $\sqrt{(13x-35)(x+1)}$ .

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+3} - \sqrt{4-x-z} + 5 = 2\sqrt{y+x-x^2+z}, \\ |y+1| + 3|y-12| = \sqrt{169-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $p$ , при которых уравнение

$$\cos 3x + 3 \cos 2x + 6 \cos x = p$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких  $p$ .

4. [5 баллов] Две окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$  пересекаются в точках  $A$  и  $B$ , а их общая касательная имеет с  $\omega_1$  и  $\omega_2$  общие точки  $C$  и  $D$  соответственно, причём точка  $B$  расположена ближе к прямой  $CD$ , чем точка  $A$ . Луч  $CB$  пересекает  $\omega_2$  в точках  $B$  и  $E$ . Найдите отношение  $ED : CD$ , если диагональ  $AD$  четырёхугольника  $ACDE$  делит отрезок  $CE$  в отношении  $3 : 10$ , считая от вершины  $C$ .
5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник  $200 \times 250$ . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).
6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел  $(a; b; c)$  такие, что:
- $a > b$ ,
  - число  $a - b$  не кратно 3,
  - число  $(a - c)(b - c)$  является квадратом некоторого простого числа,
  - выполняется равенство  $a + b^2 = 560$ .
7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник со стороной 1. Площади её боковых граней равны 4, 4 и 3. Найдите высоту призмы.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть  $b$  - коэффициент нашей геометрической прогрессии,  
 $a_n$  -  $n$ -ый член этой прогрессии ( $a_{n+1} = a_n b$ ). Тогда

$$a_{13} = a_7 \cdot b^6 \quad \text{и} \quad a_{15} = a_{13} b^2, \quad \text{или:}$$

$$b^6 \cdot \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}} = 5-x$$

$$(5-x)b^2 = \sqrt{(13x-35)(x+1)}$$

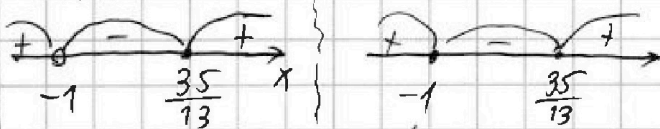
В случае если  $x = \frac{35}{13}$ , то

$$a_7 = \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}} = 0 \quad \text{это быть}$$

в геог. прогрессии не может  $\Rightarrow x \neq \frac{35}{13}$

Запишем ОДЗ:

$$\frac{13x-35}{(x+1)^3} \geq 0 \quad (x+1 \neq 0; x \neq -1) \quad \text{и} \quad (13x-35)(x+1) \geq 0$$



$$x \in (-\infty; -1) \cup \left[\frac{35}{13}; +\infty\right)$$

Из второго равенства заметим, что справа корень  $\geq 0$ , слева  $b^2 \geq 0$ , значит  $5-x \geq 0$ , т.е.  $x \leq 5$  (в геог. прогрессии  $b \neq 0; 1$ ). Итого:

ОДЗ:

$$x \in (-\infty; -1) \cup \left(\frac{35}{13}; 5\right)$$

Тогда из I равенства  $5-x$  должно быть равно 0, но  $5-x = 5 - \frac{35}{13} = \frac{30}{13} \neq 0$ . Противоречие. Также очевидно что  $b \neq 0$ , т.к.  $a_{13} = 0$  только при  $x = 5$ , а  $a_7 = 0$  только при  $x = \frac{35}{13}$ , т.е. одновременно нулями они быть не могут, а при  $b = 0$  все члены равны 0. Противоречие. Значит, все члены прогрессии  $\neq 0$

Тогда из II равенства т.к.  $a_{15} \in a_7 \Rightarrow a_{15} = a_7 \cdot b^8$ :



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}} \cdot b^8 = \sqrt{(13x-35)(x+1)}$$

$$b^8 = \sqrt{(x+1)^4} = (x+1)^2 \quad (x \neq \frac{35}{13})$$

Тогда при  $x \neq -1$ ;

$$b^2 = \sqrt{x+1}$$

Из I равенства:

$$\sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}} \cdot \sqrt{(x+1)^3} = 5-x$$

$$13x-35 = x^2+25-10x$$

$$x^2-23x+60=0$$

$$(x-20)(x-3)=0$$

$$x-20=0 \text{ или } x-3=0$$

$$x=20 \text{ не подходит по ОДЗ} \quad x=3 \quad (3 = \frac{39}{13} > \frac{35}{13})$$

Во II равенстве во обоих случаях:

подставим  $\sqrt{13x-35} \cdot b^6$ , получим

$$\sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}} \cdot (x+1)^2 = \sqrt{(13x-35)(x+1)}$$

$$\sqrt{(13x-35)/(x+1)} = \sqrt{(13x-35)(x+1)} \text{ - очевидно правда при } x \in \text{ОДЗ.}$$

Ответ:  $x=3$ ;  $x=-5$

$$x \neq -1$$

$$b^2 = \sqrt{-x-1}$$

Из I равенства

$$\sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}} \cdot \sqrt{-(x+1)^3} = 5-x$$

$$35-13x = x^2+25-10x$$

$$x^2+3x-10=0$$

$$(x+5)(x-2)=0$$

$$x+5=0 \text{ или } x-2=0$$

$$x=-5$$

$x=2 \rightarrow$  не подходит по условию



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\cos 3x + 3 \cos 2x + 6 \cos x = p$$

По формуле косинуса суммы:

$$\cos 3x = \cos(2x+x) = \cos 2x \cdot \cos x - \sin 2x \cdot \sin x =$$

$$= (\cos^2 x - \sin^2 x) \cos x - 2 \sin^2 x \cos x = \cos x (\cos^2 x - 3 \sin^2 x)$$

Из основного тригонометрического тождества

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \text{ получаем, что } -3 \sin^2 x = 3 \cos^2 x - 3. \text{ И.е.}$$

$$\cos x (\cos^2 x - 3 \sin^2 x) = \cos x (4 \cos^2 x - 3) = 4 \cos^3 x - 3 \cos x.$$

Также по формуле косинуса двойного угла

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x. \text{ Тогда}$$

$$\cos 3x + 3 \cos 2x + 6 \cos x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x + 3 \cos^2 x - 3 \sin^2 x + 6 \cos x =$$

(Вместо  $-3 \sin^2 x$  подставим  $3 \cos^2 x - 3$ . Тогда:)

$$= 4 \cos^3 x + 6 \cos^2 x + 3 \cos x - 3$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА  
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что по центральной симметрии если мы закрасим 1 клетку в верхней половине, то одновременно закрасиваем соответствующую в нижней, и никакие 2 клетки в одной половине не поместятся. Не центрально-симметричны оба в верхней или обе в нижней). Аналогично для горизонтальной (горизонтальная сред. линия не поместится) симметрии. Для вертикальной возьмём левую и правую половины и получаем так же. Таким образом, для каждой из этих симметрий достаточно в одной из половин (в др. центр. и гор.-верхней, др. верт. - левая) выбрать любые 4 точки, а другие 4 точки в другой половине определятся однозначно. Таким образом, суммарное кол-во способов выбрать закрасить 8 клеток в сумме для трёх симметрий равно  $3 \cdot C_{250 \cdot 200}^4 = 3 \cdot C_{25000}^4$ .

Но заметим, что мы лишние разы посчитали те случаи, когда выполняются одновременно 2 или 3 симметрии. Также заметим, что





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

симметрии, т.е. во надо вычесть флажды.

Заметим, что, применяя 2 симметрии, из одной точки мы однозначно получаем 3 ковы, причем каждая из них попадает в разрыв четвертинок прямоугольника (если его поделить пополам средними линиями). Т.е. чтобы найти все варианты закрасок в клетках для 2 (автоматически для трёх) симметрий, надо найти кол-во вариантов выбрать 2 клетки в одной из четвертинок, которые определят остальные 6 клеток. Это равно  $C_{100-125}^2$ . Т.е. мы вычитаем флажды, так итоговый ответ:

$$3 \cdot C_{25000}^4 - 2 \cdot C_{12500}^2$$

$$\text{Ответ: } \frac{3 \cdot 25000!}{24996! \cdot 4!} - \frac{2 \cdot 12500!}{12498! \cdot 2!}$$

$$\text{Ответ: } \frac{3 \cdot 25000!}{24996! \cdot 4!} - 12500 \cdot 12499$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Рассмотрим III условие с учетом, что  $p \neq 2$ :

$(a-c)(b-c) = p^2$ , где  $p$  - некое простое число, т.к.

у  $p$  только 2 делителя 1 и  $p$ , то рассмотрим все варианты:

$\times 1) a-c=1 \quad b-c=p^2$

$\checkmark 2) a-c=p^2; b-c=1$

$a=c+1 \quad \cancel{b=c+p^2}$

$a=c+p^2 \quad \cancel{b=c+1}$

$\checkmark 3) a-c=-1 \quad b-c=-p^2$

$\times 4) a-c=-p^2 \quad b-c=-1$

$a=c-1 \quad b=c-p^2$

$a=c-p^2 \quad b=c-1$

$\times 5) a-c=b-c=p$

$\times 6) a-c=b-c=-p$

$a=b=c+p$

$a=b=c-p$

I и IV случаи не подходят под условие  $a > b$ , так же и V и VI случаи (в них  $a=b$ )

Тогда остаются 2 случая:

1)  $a=c+p^2 \quad b=c+1$

2)  $a=c-1 \quad b=c-p^2$

Из II условия:  $a-b = p^2 - 1 \not\equiv 3$   $a-b = p^2 - 1 \not\equiv 3$

$(p-1)(p+1) \not\equiv 3$

Заметим, что  $(p-1)(p+1) \not\equiv 3$  всегда кроме случаев, когда  $p \equiv 3$ . А так как  $p$  простое, то  $p=3$ . Тогда  $\frac{1}{2}$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Посмотрим на IV условие:

$$1) c + p^2 + c^2 + 2c + 1 = 560$$

$$1) (c + 9) + (c^2 + 2c + 1) = 560$$

$$c^2 + 3c - 550 = 0$$

По теор. Виета

$$c_1 = -25 \quad c_2 = 22$$

Восстановим значения a и b:

$$a_1 = -25 + 9$$

$$b_1 = (-25 + 2c + 1) - 25 + 1$$

$$a_1 = -16$$

$$b_1 = -24$$

$$a_2 = 22 + 9$$

$$b_2 = 22 + 1$$

$$a_2 = 31$$

$$b_2 = 23$$

$$2) (c - 1) + (c^2 - 18c + 81) = 560$$

$$c^2 - 17c - 480 = 0$$

По теор. Виета

$$c_3 = 32 \quad c_4 = -15$$

$$a_3 = 32 - 1$$

$$b_3 = 32 - 9$$

$$a_3 = 31$$

$$b_3 = 23$$

$$a_4 = -15 - 1$$

$$b_4 = -15 - 9$$

$$a_4 = -16$$

$$b_4 = -24$$

Ответ:  $(-16; -24; -25); (31; 23; 22); (31; 23; 32); (-16;$

$-24; -15)$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

б. Коэф. разл. прот.  

$$Q_7 = \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}; \quad Q_8 = 5-x; \quad Q_{15} = \sqrt{(13x-35)(x+1)}$$

Q27  

$$\sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}} = \frac{5-x}{b^6}$$

$$(5-x)b^2 = \sqrt{(13x-35)(x+1)}$$

$$\sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}} \cdot b^8 = \sqrt{(13x-35)(x+1)}$$

$$b^8 = \sqrt{(x+1)^4} = (x+1)^2 \quad (\text{при } x \neq \frac{35}{13})$$

$$b^2 = \sqrt{x+1}; \quad b^6 = \sqrt{(x+1)^3}$$

$$\sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}} \cdot \sqrt{(x+1)^3} = 5-x$$

$$\sqrt{13x-35} = 5-x$$

$$13x-35 = x^2+25-10x$$

$$x^2-23x+60=0$$

20 и 3  

$$x$$

$$\cos(x+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

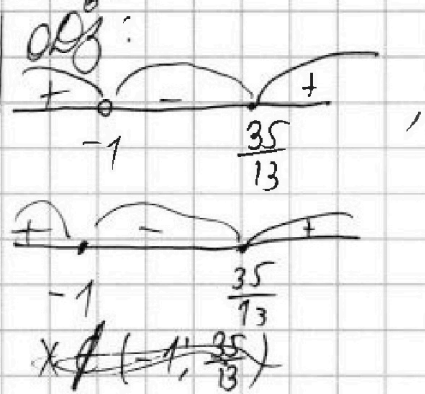
$$\cos 3x = \cos^2 2x - \sin^2 2x \cdot \cos x - \sin^2 2x \cdot \sin x =$$

$$= (\cos^2 x - \sin^2 x) \cos x - 2\sin^2 x \cos x$$

$$\cos x (\cos^2 x - 3\sin^2 x) + 3\cos^2 x - 3\sin^2 x + 6\cos x$$

$$4\cos^3 x - 3\cos x + 3\cos^2 x + 3\cos^2 x - 3 + 6\cos x = P$$

$$4\cos^3 x + 6\cos^2 x + 3\cos x - 3 = P$$



$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$

$$-\sin^2 x = \cos^2 x - 1$$

$$15-x \geq 0; \quad x \leq 15$$

$$(5-x)\sqrt{(x+1)} = \sqrt{(13x-35)(x+1)}$$

$$5-x = \sqrt{13x-35}$$

$$\cos 3x = \cos^2 2x - \sin^2 2x \cdot \cos x - \sin^2 2x \cdot \sin x =$$

$$= (\cos^2 x - \sin^2 x) \cos x - 2\sin^2 x \cos x$$

$$\cos x (\cos^2 x - 3\sin^2 x) + 3\cos^2 x - 3\sin^2 x + 6\cos x$$

$$4\cos^3 x - 3\cos x + 3\cos^2 x + 3\cos^2 x - 3 + 6\cos x = P$$

$$4\cos^3 x + 6\cos^2 x + 3\cos x - 3 = P$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(a-c)(b-c) = p^2$$

(978)

$$\cancel{1) a-c=1 \quad b-c=p^2}$$

$$\textcircled{2} a-c=p^2 \quad b-c=1$$

$$\begin{array}{r} \times 17 \\ 32 \\ \times 51 \\ 544 \end{array}$$

$$a=c+1 \quad b=c+p^2$$

$$a=c+p^2 \quad b=c+1$$

$$\begin{array}{r} \times 32 \\ 32 \\ \times 64 \\ 196 \\ \times 202 \\ 544 \\ \hline 480 \end{array}$$

$$\textcircled{3} a-c=-1 \quad b-c=-p^2$$

$$\cancel{4) a-c=-p^2 \quad b-c=-1}$$

$$a=c-1 \quad b=c-p^2$$

$$a=c-p^2 \quad b=c-1$$

$$\cancel{5) a-c=b-c=\pm p}$$

$$a-b=p^2-1 \neq 3$$

$$a=b$$

$$1) a=c+p^2 \quad b=c+1$$

$$2) a=c-1 \quad b=c-p^2 \quad c=9$$

$$a-b=p^2-1 \neq 3 \quad 550 = 11 \cdot 50$$

$$a-b=p^2-1 \neq 3$$

$$p=3$$

$$22 \cdot 25$$

$$p=3$$

$$c+9 + c^2+2c+1 = 560$$

$$\times 25 \\ 22$$

$$c+1 + c^2+p^4 - 2cp^2 = 560$$

$$c^2+3c-550=0$$

$$\sqrt{50}$$

$$c-1 + c^2+81 - 18c = 560$$

$$\rightarrow 25 \quad 22$$

$$550$$

$$c^2-17c-480=0$$

$$\times 480 = 4810$$

$$c = \frac{17 \pm \sqrt{289+1920}}{2} = \frac{17+47}{2}$$

$$\begin{array}{r} \times 47 \\ 47 \\ \hline 329 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 329 \\ 108 \\ \hline 2209 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} + 77 \\ 47 \\ \hline 64 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 23 \\ 23 \\ + 69 \\ \hline 529 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 32 \\ 25 \\ 160 \\ + 32 \\ \hline 480 \end{array}$$

$$= 32; -15 \quad -16+576 = 560$$

$$31+529=560$$

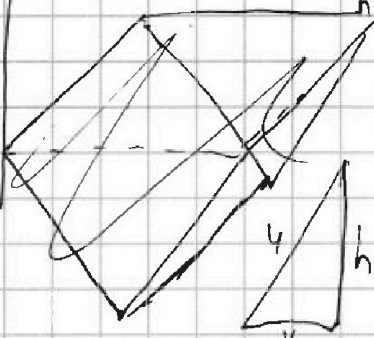
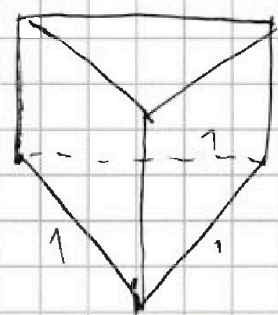


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

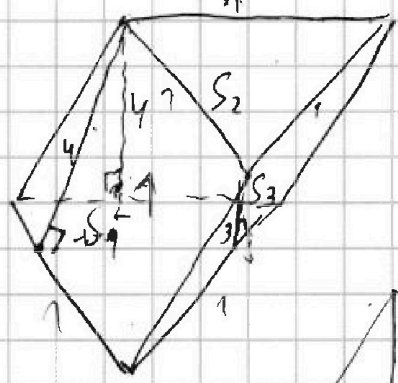
1     2     3     4     5     6     7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

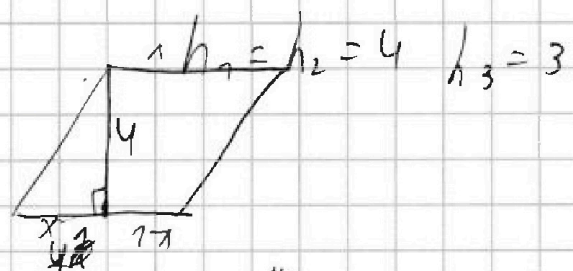
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{aligned}
 h^2 + x^2 &= 16 \\
 h^2 + y^2 &= 9 \\
 x^2 - y^2 &= 7
 \end{aligned}$$



$$S_1 = S_2 = S_3 = h_{1,2,3}$$



$$C_{2500}^2 = \frac{12500 \cdot 12499}{21}$$

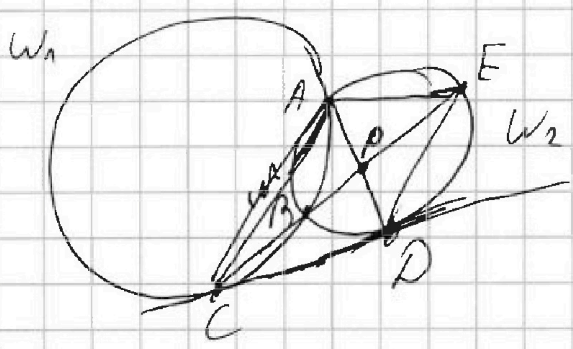
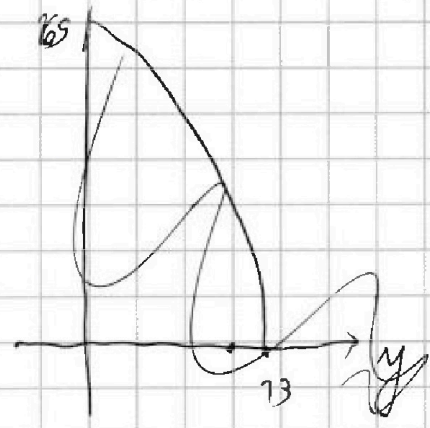
- 1)  $C_{2500}^4$
- 2)  $C_{2500}^4$
- 3)  $C_{2500}^4$

$$3 \cdot C_{2500}^2 = 2 \cdot 2500 \cdot 2499$$

пусть  $y \geq 12$ :

$$y + 1 + 3y - 36 = \sqrt{169 \cdot 2^2}$$

CP:PE = 3:10





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

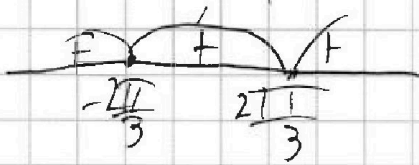
СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$y' = 12 \cos^2 x + 12 \cos x + 3 = 0$$

$$4 \cos^2 x + 4 \cos x + 1 = 0 = (2 \cos x + 1)^2$$

$$\cos x = \frac{-2 \pm \sqrt{4-4}}{4} = -0,5 \quad \cos x = -0,5$$



$$x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$$

$$\cos x = 1$$

$$\max_p = 4 + 6 + 3 - 3 = 10$$

$$\cos x = -1$$

$$\min_p = -3$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos 3x + \cos x = -2 \sin 2x \sin x$$

$$3 \cos^2 x - 3 \sin^2 x - 2 \sin^2 x \cos x + \cos x$$

$$(\cos x \cdot \cos x)' = -\sin x \cos x - \cos x \cdot \sin x \Rightarrow -2 \cos x \sin x = -\sin 2x$$

$$(\cos^3 x)' = -2 \cos 2x \cdot \cos x + \sin 2x \cdot \sin x$$

$$-2 \cos^2 x + 2 \cos x$$