



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



① [3 балла] Найдите все действительные значения x , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её седьмой член равен

$$\sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}, \text{ тринадцатый член равен } 5-x, \text{ а пятнадцатый член равен } \sqrt{(13x-35)(x+1)}.$$

② [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+3} - \sqrt{4-x-z} + 5 = 2\sqrt{y+x-x^2+z}, \\ |y+1| + 3|y-12| = \sqrt{169-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p , при которых уравнение

$$\cos 3x + 3 \cos 2x + 6 \cos x = p$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p .

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD , чем точка A . Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E . Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $3 : 10$, считая от вершины C .

⑤ [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 200×250 . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

⑥ [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:

- $a > b$,
- число $a - b$ не кратно 3,
- число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство $a + b^2 = 560$.

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник со стороной 1. Площади её боковых граней равны 4, 4 и 3. Найдите высоту призмы.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
↓ ИЗ ↓

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Ш1

Пусть $b_7 = \sqrt{\frac{(13x-35)^7}{(x+1)^3}} = b_1 q^6$

ООЗ: $x \neq -1$

$(13x-35)(x+1) \geq 0$

$x \in (-\infty, -1) \cup \left[\frac{35}{13}, +\infty\right)$

$b_{13} = 5-x = b_1 q^{12}$

$b_{15} = \sqrt{(13x-35)(x+1)} = b_1 q^{14}$

Заметим, что $13x-35 \neq 0$ т.к. тогда $b_7 = b_{15} = 0$ и все выражения дробки состоять из нулей, но $5-x \neq 0$.

Также заметим, что

$$\frac{b_7^4}{b_3} = \frac{b_1^4 q^{24}}{b_1 q^6} = b_1^3 q^{18} = (b_1 q^{14})^3 = b_{15}^3$$

Подставим b_3, b_7 и b_{15} :

$$\frac{(5-x)^4}{(13x-35)^{\frac{3}{2}}} = (5-x)^4 \sqrt{\frac{(x+1)^3}{(13x-35)}} = \sqrt{(13x-35)(x+1)}^3$$

Далее будем решать относительно модуля $13x-35$, а на

$(x+1)^{\frac{3}{2}}$ сократим:

$(5-x)^4 = (|13x-35|)^2$

$(5-x)^2 = |13x-35|$

1) $x^2 + 23x + 60 = 0$

$x = -20 \quad x = -3$

2) $x^2 + 3x - 10 = 0$

$x = 2 \quad x = -5$

(не подходит 003)

$x = -20$ не подходит, т.к. тогда $b_7 > 0, b_{13} < 0, b_{15} > 0$, а такое не может быть.

Ответ: $x = -5, x = 3, x \neq -20$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \sqrt{x+3} - \sqrt{4-x-z} + 5 = 2\sqrt{y+x+z-x^2} \\ |y+1+3|y-12| = \sqrt{169-z^2} \end{cases}$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x+3 \geq 0 \\ 4-x-z \geq 0 \\ y+x+z-x^2 \geq 0 \end{cases}$$

т.к. $z^2 \geq 0$, то $169 - z^2 \leq 169$ и $\sqrt{169 - z^2} \leq 13$.

Значит $|y+1+3|y-12| \leq 13$.

1. $y \leq -1$

$$-y-1-3y+36 \leq 13$$

$$-4y \leq -22$$

$$y \geq \frac{11}{2} \text{ - объединяем с } y \leq -1 \text{ получаем } y \in \emptyset$$

2. $-1 < y < 12$

$$y+1-3y+36 \leq 13$$

$$-2y \leq -24$$

$$y \geq 12 \text{ - объединяем с } -1 < y < 12 \text{ получаем } y \in \emptyset$$

3. $y \geq 12$

$$y+1+3y-36 \leq 13$$

$$4y \leq 48 \quad y \leq 12 \text{ - объединяем с } y \geq 12 \text{ получаем } y = 12$$

Подставим $y = 12$ во второе уравнение системы:

$$\sqrt{169 - z^2} = 13 \Rightarrow z = 0$$

Подставим $y = 12$ и $z = 0$ в первое ур-е системы:

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} + 5 = 2\sqrt{12+x-x^2} \quad | \text{ возведем в квадрат}$$

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} = 2\sqrt{12+x-x^2} - 5 \quad | \text{ возведем в квадрат } (*)$$

$$7 - 2\sqrt{12+x-x^2} = 4(12+x-x^2) - 20\sqrt{12+x-x^2} + 25$$

$$\sqrt{12+x-x^2} = t$$

$$7 - 2t = 4t^2 - 20t + 25$$

$$4t^2 - 18t + 18 = 0$$

$$t_1 = 3 \quad t_2 = \frac{3}{2}$$

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} \geq 0$$

возведем уравнение в квадрат

возведем в квадрат



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$t_1 = 3$$

$$t = \frac{3}{2}$$

$$\sqrt{12+x-x^2} = 3$$

$$x-x^2+12=9$$

$$x-x^2+3=0$$

$$x^2-x-3=0$$

$$D = 1+12=13$$

$$\frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

~~Оба корня по ОДЗ, т.к.~~

$$\sqrt{13} < 4$$

~~Не подходит отриц. т.к. тогда в (x) левая часть отриц., а правая положительна.~~

$$\sqrt{12+x-x^2} = \frac{3}{2}$$

$$12+x-x^2 = \frac{9}{4}$$

$$x^2-x-\frac{39}{4}=0$$

$$4x^2-4x-39=0$$

$$D = 16 + 16 \cdot 39 = 16 \cdot 40 = 640$$

$$x = \frac{4 \pm 8\sqrt{10}}{8} = \frac{1 \pm 2\sqrt{10}}{2} = 0,5 \pm \sqrt{10}$$

~~Факт: $\sqrt{10} < 2,5$, поэтому~~

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x+3 \geq 0 \\ 4-x \geq 0 \\ 12+x-x^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [-3, 4]$$

~~Не подходит с "+" т.к. тогда в (x) левая часть положительна, а правая отриц.~~

~~Оба корня ~~не~~ подходят по ОДЗ т.к. $\sqrt{10} < 3,5$.~~

~~Ответ: $\left(\frac{1+\sqrt{13}}{2}; 12; 0\right) \left(\frac{1-\sqrt{13}}{2}; 12; 0\right) \left(\frac{1+2\sqrt{10}}{2}; 12; 0\right) \left(\frac{1-2\sqrt{10}}{2}; 12; 0\right)$~~

~~Не подходит из-за условия $\sqrt{x+3} \geq \sqrt{4-x}$~~

~~Ответ: $\left(\frac{1+\sqrt{13}}{2}; 12; 0\right) \left(\frac{1-\sqrt{13}}{2}; 12; 0\right) \left(\frac{1+2\sqrt{10}}{2}; 12; 0\right) \left(\frac{1-2\sqrt{10}}{2}; 12; 0\right)$~~



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Д3

$$\cos 3x + 3\cos 2x + 6\cos x = p$$

$$\begin{aligned}\cos 3x &= \cos(x+2x) = \cos 2x \cos x - \sin x \sin 2x = (2\cos^2 x - 1)\cos x - 2\cos x(1 - \cos^2 x) = \\ &= 4\cos^3 x - 3\cos x\end{aligned}$$

$$p = 4\cos^3 x - 3\cos x + 6\cos^2 x - 3 + 6\cos x$$

$$p = 4\cos^3 x + 6\cos^2 x + 3\cos x - 3$$

$$\cos x = t, t \in [-1, 1]$$

$$p = f(t) = 4t^3 + 6t^2 + 3t - 3$$

$$f'(t) = 12t^2 + 12t + 3 = 3(2t+1)^2$$

Т.к. $f'(t) \geq 0$ всегда, то $f(t)$ возрастает на всей промежутке \Rightarrow

$$\Rightarrow f(-1) \leq p \leq f(1)$$

$$\underline{\underline{-4 \leq p \leq 10}}$$



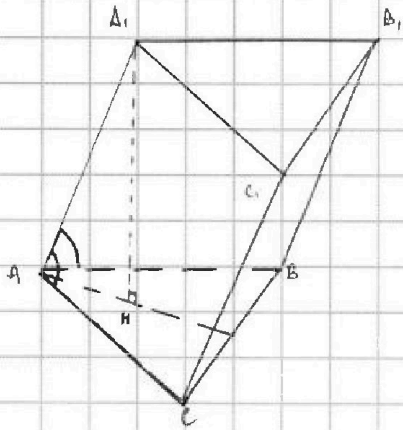
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№7



Реш: $(ABC) \perp (A_1B_1C_1)$

ABC - прав Δ $AB = 1$

$$S_{AA_1C_1C} = 4$$

$$S_{AA_1B_1B} = 4$$

$$S_{CC_1A_1B_1} = 3$$

$$\text{Максимум } h = AA_1$$

$$\left. \begin{aligned} 1) \quad S_{AA_1B_1B} &= AB \cdot AA_1 \sin \angle BAA_1 = AA_1 \sin \angle BAA_1 = 4 \\ S_{AA_1C_1C} &= AC \cdot AA_1 \sin \angle CAA_1 = AA_1 \sin \angle CAA_1 = 4 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \sin \angle BAA_1 = \sin \angle CAA_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle BAA_1 = \angle CAA_1$$

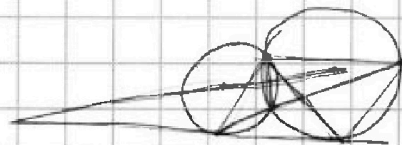
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

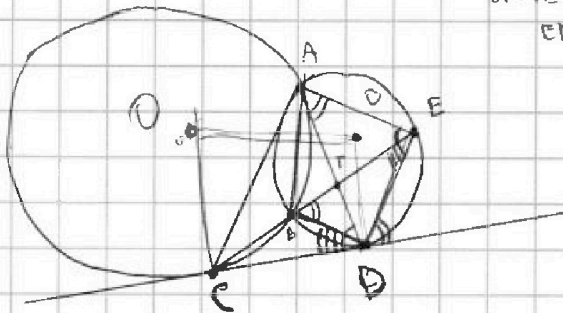
СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\alpha : TE = \beta : 10$$

$$EP = CO = ?$$



$$\cos \alpha (2 \cos \alpha + 3) + \frac{\sqrt{5}}{2} (2 \cos \alpha + 3) =$$

$$= (2 \cos \alpha + 3) \left(\cos \alpha + \frac{\sqrt{5}}{2} \right) = p + \frac{15}{2}$$

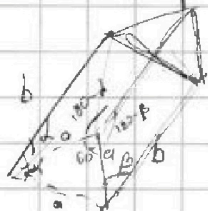
$$(2 \cos \alpha + 3) (2 \cos \alpha + 5) = 2p + 15$$

$$\cos 3x + 2 \cos 2x + 6 \cos x = p$$

$$\cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x + 2 \cos 2x + 6 \cos x = p$$

$$2 \cos^3 x - \cos x - 2 \cos x + 2 \cos^3 x + 6 \cos^2 x - 3 + 6 \cos x = p$$

$$f(x) = p = 4 \cos^3 x + 6 \cos^2 x + 3 \cos x - 3$$



$$f'(x) = 12 \cos^2 x + 12 \cos x + 3 =$$

$$= 3 (4 \cos^2 x + 4 \cos x + 1) =$$

$$= 3 (2 \cos x + 1)^2 \geq 0 - \text{всегда} \Rightarrow$$

$$f(x) - \text{всегда} \text{ всегда} \Rightarrow p \in [-4; 10]$$

$$ab \sin \alpha = 4$$

$$ab \sin \beta = 2$$

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{4}{2} \Rightarrow \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = 2$$

$$\sin \alpha = 2 \sin \beta$$

$$\cos 2x \cos x + 3 \cos 2x + 5 \cos x$$

$$3x + 3y = 2$$

$$ax + \frac{b}{y} = 2$$

$$bx^2 - 2x + c = 0 \quad \frac{y}{x} = \frac{2}{x}$$

$$D = 4 \Rightarrow$$

$$5a + 2ab + 3b =$$

$$2ab + 3a + 5b$$

$$8a - 3ab + 5b - 5ab =$$

$$= 3a(1-b)$$

=



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
___ ИЗ ___

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a_1 \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}} = b q^6$$

$$a_2 \quad 5-x = b q^{12}$$

$$a_3 \quad \sqrt{(13x-35)(x+1)} = b q^{14}$$

$$\frac{(13x-35)^{\frac{3}{2}} (x+1)^{\frac{3}{2}}}{(5-x)^{\frac{12}{2}}} = \frac{13x-35}{(5-x)^{\frac{12}{2}}}$$

$$\frac{a_3^2}{a_2} = \frac{b^2 q^{28}}{b q^{12}} = b q^{16}$$

$$|y+1| + |3y-12| \leq 13$$

$$\frac{(5-x)^4}{(13x-35)^{\frac{1}{2}}} = (13x-35)^{\frac{3}{2}} (x+1)^{\frac{3}{2}}$$

~~AM~~

$$(5-x)^4 = (13x-35)^2$$

$$(5-x)^2 = 13x-35$$

$$(5-x)^2 = -13x+35$$

$$\frac{5}{4} \quad 10, \quad 20$$

$$q^6 = \frac{a_2}{a_1}$$

$$x=3$$

$$1) \frac{1}{4}$$

$$2) 2$$

$$3) 4$$

$$a_1 = b \frac{a_2}{a_1}$$

$$\frac{a_1^2}{a_2} = b$$

$$\frac{260}{35}$$

$$225 = 27$$

$$a_3 = \frac{a_1^2}{a_2} \cdot \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{\frac{7}{3}}$$

$$a_3 = \frac{a_1^2}{a_2^3} \cdot \frac{a_2^7}{a_1^7} = \frac{a_2^4}{a_1^5}$$

$$a_3 = \frac{a_2^4}{a_1^5}$$

$$x^2 - 26x + 60 = 0$$

$$25 - 10x + x^2 = 13x - 35$$

$$x+3 + 4x-2 + 2\sqrt{(x+3)(4-x-2)} = 7y+2x-2x^2 + 25 - 20\sqrt{y+x+2-x^2}$$

$$4-x-2 \geq 0$$

$$2 \leq 4-x$$

$$4-x-2 \geq 0$$

$$-13 \leq 2 \leq 4-x$$

$$-3 \leq x \leq 17$$

$$-13 \leq 2 \leq 13$$

$$y \geq x^2 - x - 2 \geq x^2 - x - 13 \geq -\frac{1}{4} - 13 = -\frac{53}{4}$$

$$\frac{1}{2}$$

$$y+13 \geq y+x+2 \geq x^2$$

$$y+30 \geq 0$$

$$y \geq -30$$

$$x+2 \leq 4$$

$$-13 \leq 2 \leq 4-x$$

$$x \leq 17$$

$$5 + \sqrt{20}$$

$$5 - \sqrt{20}$$

$$0 \leq x+3 \leq 20$$

$$20 \geq 4-x-2 \geq 2 \geq 0$$

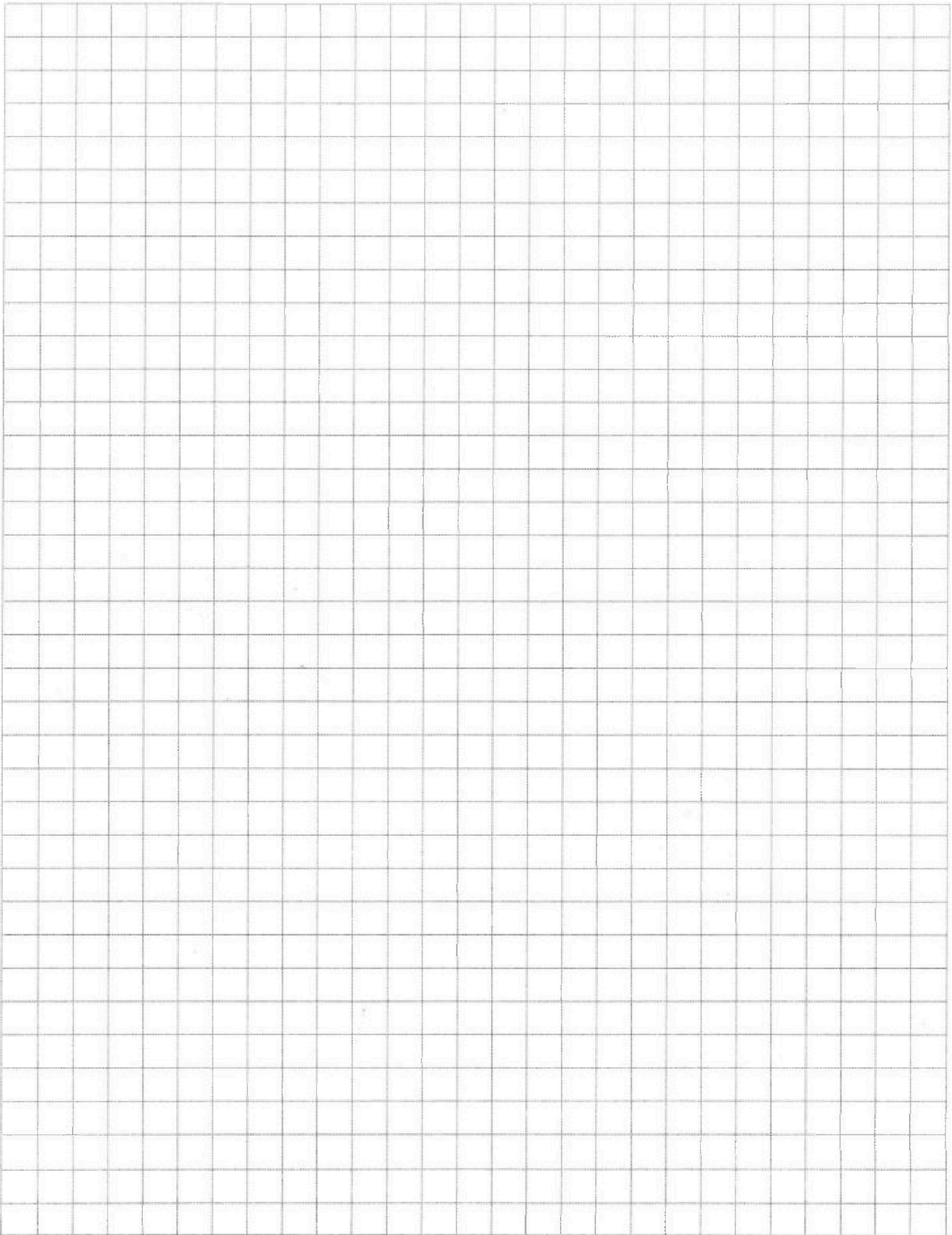


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

ED: 40?

$\alpha: TE = 3:10$

a, b, c - углы

$a-c=1$
 $b-c=p^2$

$b-a+1=p^2$ root

$(a-c)(b-c) = p^2 \cdot p \cdot p$

$a+b^2=560$

$|b| = 23$

$a=c+p$
 $b=c+p \Rightarrow a=b$ root

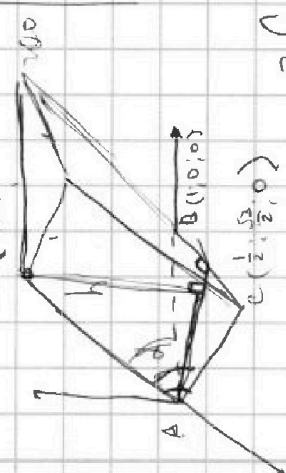
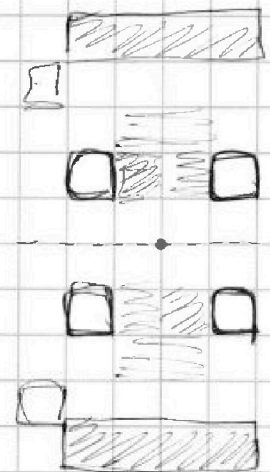
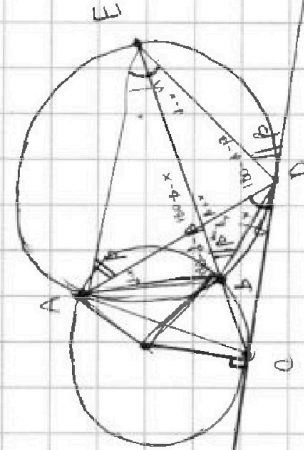
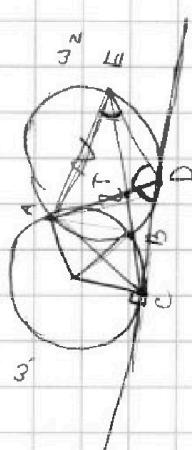
$C^4 + C^{25000} + C^4 = 25000$

$69 \cdot 8 = 24 \cdot 23$

$b-c=1 \Rightarrow c=b-1$
 $a-c=p \Rightarrow c=b-1$
 $a-b+1=p^2$
 $a-b=p^2-1$

$552 \cdot \frac{z}{4} = \frac{125200}{4}$
 $\frac{135}{2} \cdot \frac{z}{2} = \frac{125200}{2}$
 $-\frac{13}{12} \cdot \frac{z}{12} = \frac{125200}{144}$
 $\frac{z}{16} = \frac{125200}{16}$
 $z = 125200$

$a-b=8$
 $a=b+8$
 $b^2+b+8=560$
 $b^2+b-552=0$
 $D=1+200+204=2205$
 $b_1=24, b_2=-23$
 $a=32, a=-15$
 $c=23, c=-24$



$2 \left(\frac{8}{2} + 2 \left(\frac{8}{2} + C^4 \right) \frac{z}{2} \right)$
 $4 \left(\frac{8}{2} + C^4 \right) \frac{z}{2}$

125

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a_7 = \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}} = a+6d \quad x < 5$$

$$a_{13} = 5-x = a+12d$$

$$a_{15} = \sqrt{(13x-35)(x+1)} = a+14d$$

$$6d = a_{13} - a_7$$

$$a_7 = a + a_{13} - a_7$$

$$a = 2a_7 - a_{13}$$

$$= 2a_7 - a_{13} + 14 \frac{a_{13} - a_7}{6} =$$

$$= \frac{12a_7}{6} + \frac{14a_{13}}{6} - \frac{5a_{13}}{6} + \frac{14a_{13}}{6} =$$

$$\cos 3x = \cos(2x+x) =$$

$$= \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x =$$

$$= (2\cos^2 x - 1)\cos x - 2\sin^2 x \cos x =$$

$$= -\frac{a_7}{3} + \frac{4a_{13}}{3}$$

$$(13x-35)(x+1) > 0$$

$$3\sqrt{(13x-35)(x+1)} = 4(5-x) - \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}$$

$$-\frac{4}{3} + \frac{6}{4} - \frac{3}{2} - 3 =$$

$$3\sqrt{(13x-35)(x+1)} + \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}} = 4(5-x)$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} - \frac{3}{2} - 3 =$$

$$u = 1$$

$$p = 10$$

$$u = -1$$

$$p = -4$$

$$p \in [-4; 10]$$

$$9(13x-35)(x+1) + \frac{13x-35}{(x+1)^3} + 6\sqrt{\frac{(13x-35)^2}{(x+1)^2}} = 16(5-x)^2$$

$$= -3,5$$

$$9(13x-35)(x+1) + \frac{13x-35}{(x+1)^3} + 6\frac{(13x-35)}{(x+1)} = 16(25-10x+x^2)$$

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x^2} + 5 = 2\sqrt{y+x-x^2+2}$$

$$x+3 \geq 0$$

$$[y+1] + 2[y-12] = \sqrt{13^2 - z^2}$$

$$13^2 - z^2 \geq 0 \quad z^2 \leq 13^2$$

$$\frac{169}{26}$$

$$\frac{145}{26}$$

$$4-x-z \geq 0$$

$$y+2+x-x^2 \geq 0$$

$$y^2 + 2y + 1 + 9y^2 - 22y + 144 = 169 - z^2$$

$$\cos 3x + 2\cos 2x + \cos x = p$$

$$10y^2 - 20y - 24 + z^2 = 0 + 6[y^2 - 11y - 12] = 0$$

$$D = 121 + 48 = 169$$

$$y \in (-\infty; -1] \cup [12; \infty)$$

$$4\cos^3 x - 3\cos x + 6\cos^2 x - 3 =$$

$$16y^2 - 136y - 56 + z^2 = 0 \quad 13^2 = 16y^2 - 136y - 56 \leq 0$$

$$+ 6\cos x = p$$

$$u = 4$$

$$4y^2 - 4y + 48 + z^2 = 0 \quad \text{решений нет}$$

$$p = 4\cos^3 x + 6\cos^2 x + 3\cos x - 3$$

$$16 - 4u + z^2 < 0$$

$$p' = 12t^2 + 12t + 3 = 3(t^2 + 4t + 1) =$$

$$D = 144 - 4 \cdot 3 \cdot 1 = 0$$

$$= 3(2t+1)^2$$

$$= (2\cos^2 x - 1)\cos x - 2\cos x(1 - \cos^2 x) =$$

$$= 2\cos^3 x - \cos x - 2\cos x + 2\cos^3 x =$$

$$= 4\cos^3 x - 3\cos x$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

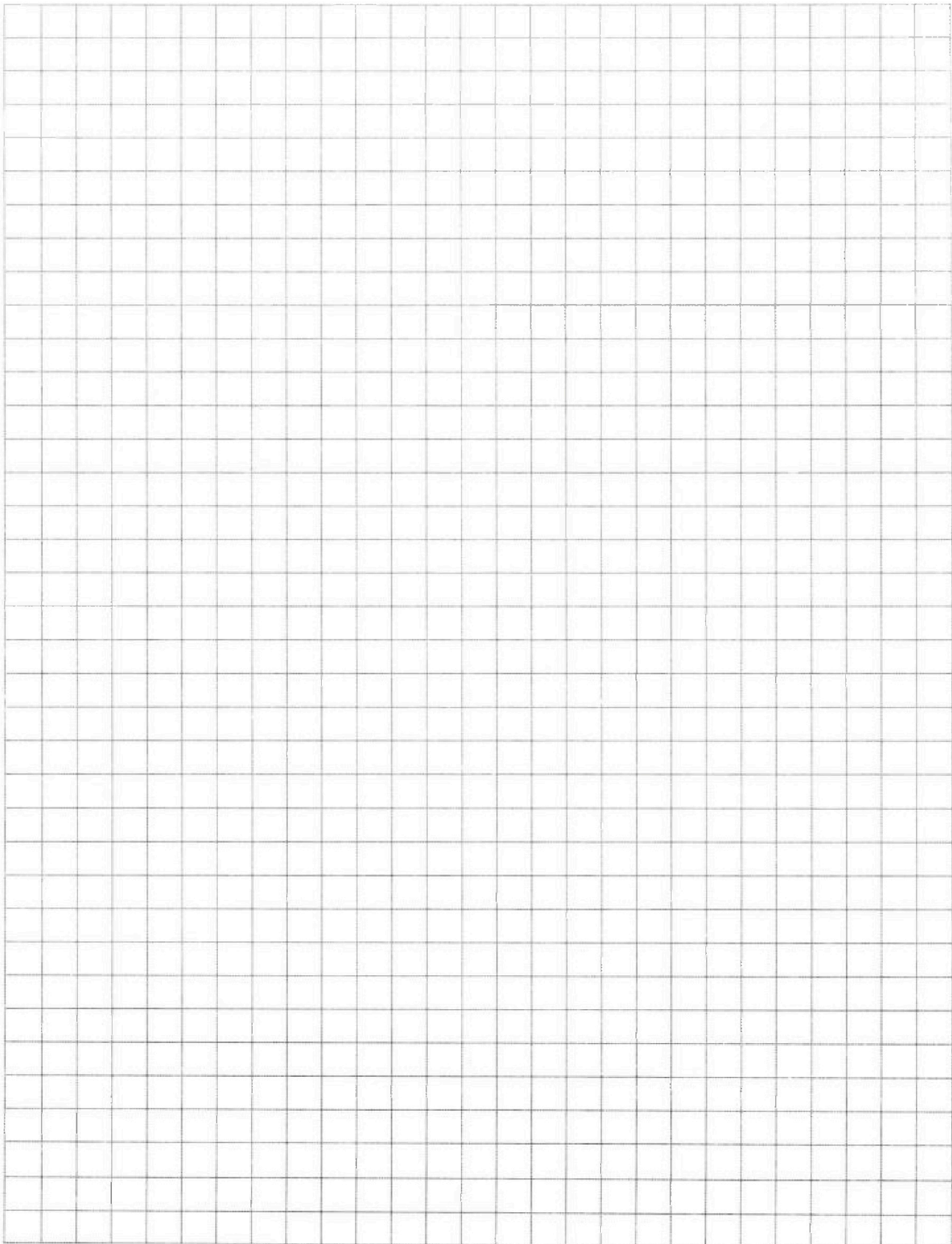
5

6

7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№6.

Введем обозначение ^{простого} числа p , квадрат которого равен $(b-c)(a-c)$.

$$(b-c)(a-c) = p^2$$

Т.к. a, b, c - целые числа, ~~то есть~~ а p - простое, то это верно при вариантах:

$$1) \begin{cases} b-c=p \\ a-c=p \end{cases} \Rightarrow a=b - \text{противоречие}$$

$$2) \begin{cases} a-c=1 \\ b-c=p^2 \end{cases} \begin{cases} a=b-1 \\ b-c=p^2 \end{cases} \quad b-a+1=p^2$$

p - простое $\Rightarrow p^2 \geq 4$. Из условия $a > b$ получаем $b-a < 0$ $b-a+1 \leq 0$, то есть $p^2 \leq 0$ - противоречие.

$$3) \begin{cases} b-c=1 \\ a-c=p^2 \end{cases} \quad \begin{cases} a-b+1=p^2 \\ a-b=p^2-1 \end{cases}$$

Заметим, что квадрат любого ^{целого} числа при делении на 3 может

давать остаток 0 или 1, а т.к. $a-b \neq 0$, то и

$p^2-1 \neq 0$, то есть $p^2 \not\equiv 1 \pmod 3 \Rightarrow p^2$ делится на 3, но так как

p - простое, то $p=3$. Т.к. $p=3$, то $a=b+8$ - подставим в $a+b^2=550$.

$$b^2+b-552=0$$

$$b = -24 \quad b = 23$$

$$a = -16 \quad a = 31$$

$$c = -25 \quad c = 22$$

Ответ: $(-16; -24; -25)$ $(31; 23; 22)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№5

Разделим прямоугольник пополам вертикальной линией. Значит, что при центральной симметрии ровно 4 клетки находятся справа от этой линии и ровно 4 слева. Значит, чтобы определить количество из восьми элементов с центральной симметрией достаточно выбрать 4 клетки с одной половины: C_{25000}^4 . Также такое рассуждение можно повторить для симметрии относительно "средних линий" прямоугольника. Тогда всего элементов получится $3 \cdot C_{25000}^4$. Некоторые из элементов оказались посчитаны несколько раз, а именно, те элементы, что имеют несколько разную симметрий. При этом никакие элементы не могут иметь только две симметрии, так как если элемент симметричен относительно вертикальной и горизонтальной линии, то симметричен и относительно центра и т.д. Значит, посчитали столько элементов могут иметь три симметрии. Для их определения достаточно выбрать две клетки из четверти доски: C_{12500}^2 . Т.к.

Известных элементов, имеющих три симметрии были посчитаны 3 раза, то ответом будет: $3 \cdot C_{25000}^4 - 2 \cdot C_{12500}^2 =$

$$= 3 \frac{(25000)!}{4! \cdot (25000-4)!} - 2 \frac{(12500)!}{2 \cdot (12500-2)!} = \frac{25000!}{8 \cdot 24997!} - \frac{12500!}{12498!}$$

Ответ: $\frac{25000!}{8 \cdot 24997!} - \frac{12500!}{12498!}$