



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 8



1. [3 балла] Пятый член арифметической прогрессии равен  $6x + 18$ , седьмой член равен  $(x^2 - 4x)^2$ , а одиннадцатый равен  $(-3x^2)$ . Найдите  $x$ .
2. [4 балла] Найдите наименьшее значение выражения  $14x + 7y$  при условии

$$\begin{cases} |4x - 3y| \leq 6, \\ |3x - 4y| \leq 8. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары  $(m, n)$  натуральных чисел, для которых одно из чисел  $A = m^2 - 2mn + n^2 + 9m - 9n$  и  $B = m^2n - mn^2 + 3mn$  равно  $13p^2$ , а другое равно  $3q^2$ , где  $p$  и  $q$  — простые числа.
4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе  $AX$  треугольника  $ABC$ , проходящая через середину  $M$  его стороны  $BC$ , пересекает сторону  $AC$  и продолжение стороны  $AB$  в точках  $Z$  и  $Y$  соответственно. Найдите  $BC$ , если  $AC = 12$ ,  $AZ = 3$ ,  $YZ = 4$ .
5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{5-y} + 5 = 2\sqrt{30-x-y^2}, \\ 4x^4 + x - 5\sqrt[3]{y} = 4y^4 - 5\sqrt{x+y}. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат  $9 \times 9$  клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.
7. [6 баллов] В треугольнике  $ABC$  на медиане  $AM$  и биссектрисе  $CL$  как на диаметрах построены окружности  $\Omega$  и  $\omega$  соответственно, пересекающиеся в точках  $P$  и  $Q$ . Отрезок  $PQ$  параллелен высоте треугольника  $ABC$ , проведённой из вершины  $B$ . Окружность  $\Omega$  пересекает сторону  $AC$  повторно в точке  $N$ . Найдите длины сторон  $AC$  и  $BC$ , если  $AB = 26$ ,  $AN = 20$ .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N1

$$a_5 = 6x + 18$$

$$a_7 = (x^2 - 4x)^2$$

$$a_{11} = -3x^2$$

Т.к. у нас арифм. прогрессия, то  $a_7 = \frac{a_5 + a_9}{2}$ .

$$(x^2 - 4x)^2 = \frac{6x + 18 + a_9}{2}$$

$$2(x^2 - 4x)^2 = 6x + 18 + a_9$$

$$a_9 = 2(x^2 - 4x)^2 - 6x - 18$$

и с другой стороны,  $a_9 = \frac{a_7 + a_{11}}{2}$ .

$$a_9 = \frac{(x^2 - 4x)^2 - 3x^2}{2}$$

$$\text{Имеем: } 2(x^2 - 4x)^2 - 6x - 18 = \frac{(x^2 - 4x)^2 - 3x^2}{2}$$

$$4(x^2 - 4x)^2 - 12x - 36 = (x^2 - 4x)^2 - 3x^2$$

$$3(x^2 - 4x)^2 - 12x - 36 = -3x^2$$

$$3(x^4 - 8x^3 + 16x^2) - 12x - 36 + 3x^2 = 0$$

$$3x^4 - 24x^3 + 48x^2 - 12x - 36 + 3x^2 = 0$$

$$3x^4 - 24x^3 + 51x^2 - 12x - 36 = 0$$

$$x^4 - 8x^3 + 17x^2 - 4x - 12 = 0$$

$$x = 2$$

$$\begin{array}{r|l} x^4 - 8x^3 + 17x^2 - 4x - 12 & x - 2 \\ \hline 2^4 - 2x^3 & 12x^3 - 6x^2 + 5x + 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -6x^3 + 17x^2 \\ -6x^3 + 12x^2 \\ \hline 5x^2 - 4x \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5x^2 - 4x \\ -6x + 12 \\ \hline 6x - 12 \end{array}$$

$$x^3 - 6x^2 + 5x + 6 = 0$$

$$x = 2$$

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 6x^2 + 5x + 6 & x - 2 \\ \hline x^3 - 2x^2 & x^2 - 4x - 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -4x^2 + 5x \\ -4x^2 + 8x \\ \hline -3x + 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -3x + 6 \\ -3x + 6 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$x^2 - 4x - 3 = 0$$

$$D = 16 + 12 = 28 = (2\sqrt{7})^2$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\lambda_1 = \frac{4 + 2\sqrt{7}}{2} = 2 + \sqrt{7}$$

$$\lambda_2 = \frac{4 - 2\sqrt{7}}{2} = 2 - \sqrt{7}$$

Итак, у нас  $\lambda$  может быть равен  $2$ ;  $2 + \sqrt{7}$ ;  $2 - \sqrt{7}$

Проверим:  $\lambda = 2$

$$a_5 = 30$$

$$a_7 = 16$$

$$a_{11} = -12$$

$$\left. \begin{array}{l} a_5 = 30 \\ a_7 = 16 \end{array} \right\} \Rightarrow a_9 = 2$$

$$\left. \begin{array}{l} a_7 = 16 \\ a_{11} = -12 \end{array} \right\} \Rightarrow a_9 = 2$$

$$\lambda = 2 + \sqrt{7}$$

$$a_5 = 30 + 6\sqrt{7}$$

$$a_7 = 9$$

$$a_{11} = -33 + 19\sqrt{7}$$

$$\lambda = 2 - \sqrt{7}$$

$$\left. \begin{array}{l} a_5 = 30 + 6\sqrt{7} \\ a_7 = 9 \end{array} \right\} \Rightarrow a_9 = -17 - 6\sqrt{7}$$

$$\left. \begin{array}{l} a_7 = 9 \\ a_{11} = -33 + 19\sqrt{7} \end{array} \right\} \Rightarrow a_9 = -17 - 6\sqrt{7}$$

$$a_5 = 30 - 6\sqrt{7}$$

$$a_7 = 9$$

$$a_{11} = -33 + 19\sqrt{7}$$

$$\left. \begin{array}{l} a_5 = 30 - 6\sqrt{7} \\ a_7 = 9 \end{array} \right\} \Rightarrow a_9 = -12 + 6\sqrt{7}$$

$$\left. \begin{array}{l} a_7 = 9 \\ a_{11} = -33 + 19\sqrt{7} \end{array} \right\} \Rightarrow a_9 = -12 + 6\sqrt{7}$$

Ответ:  $\lambda = 2$ ;  $\lambda = 2 + \sqrt{7}$ ;  $\lambda = 2 - \sqrt{7}$



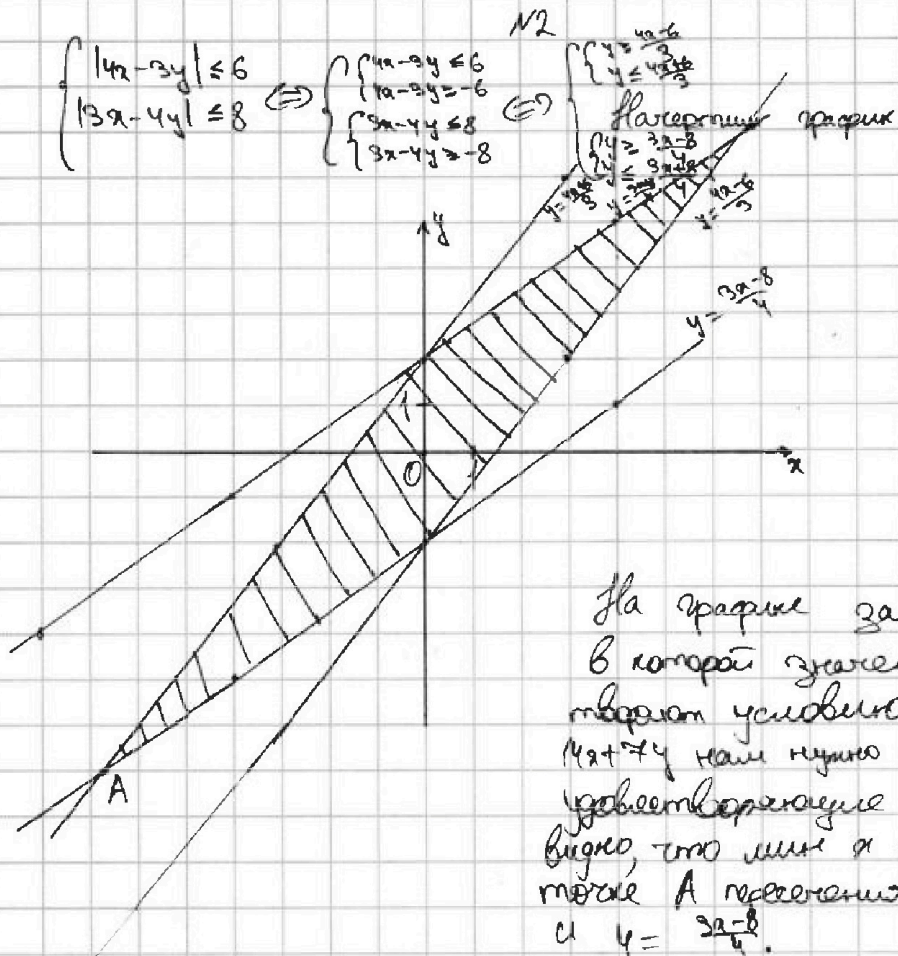
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



На графике заштрихована область, в которой значения  $x$  и  $y$  удовлетворяют условию. Для наименьшего  $4x+7y$  нам нужно минимизировать  $x$  и  $y$ , удовлетворяющие условию. По графику видно, что мин  $x$  и  $y$  достигаются в точке A пересечения прямых  $y = \frac{4x+6}{3}$  и  $y = \frac{3x-8}{4}$ .

$$\frac{4x+6}{3} = \frac{3x-8}{4} \quad | \cdot 12$$

$$16x+24 = 9x-24$$

$$7x = -48$$

$$x = -\frac{48}{7}$$

$$y = \frac{4 \cdot (-\frac{48}{7}) + 6}{3} = -\frac{192}{7} + 6 = -\frac{64}{7} + \frac{42}{7} = -\frac{22}{7}$$

$$\min (4x+7y) = 4 \cdot (-\frac{48}{7}) + 7 \cdot (-\frac{22}{7}) = -96 - 22 = -118$$

Ответ: -118.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = (m-n)^2 + 9(m-n) = (m-n)(m-n+9)$$

$$B = mn(m-n+3)$$

Начнем рассуждения с начала, когда  $p=13$ ,  $q=3$ , т.е.  $p=13$   
 $q=3$ .

$$p=13: 13p^2 = 13^3 = 2197$$

$$(m-n)(m-n+9) = 2197$$

$$t = m-n$$

$$t^2 + 9t - 2197 = 0$$

$$D = 81 + 4 \cdot 2197 = 8869 \notin \mathbb{N} \Rightarrow t \notin \mathbb{N}, \text{ но } m-n \in \mathbb{N}.$$

Тогда

$$mn(m-n+3) = 2197$$

$$\begin{cases} mn=1 \Rightarrow m=1, n=1 \\ m-n+3=2197 \end{cases} \text{ — не встает, но } m-n+3 \neq 2197$$

$$\begin{cases} mn=13 \Rightarrow m=1, n=13 \text{ или } m=13, n=1 \\ m-n+3=169 \end{cases} \text{ — не встает, но } m-n+3 \neq 169$$

$$\begin{cases} mn=169 \Rightarrow m=1, n=169; m=13, n=13; m=169, n=1 \\ m-n+3=13 \end{cases} \text{ — не встает, но } m-n+3 \neq 13$$

$$\begin{cases} mn=2197 \Rightarrow m=1, n=2197; m=13, n=169; m=169, n=13; m=2197, n=1 \\ m-n+3=1 \end{cases} \text{ — не встает, но } m-n+3 \neq 1 \text{ — не встает.}$$

Итак,  $p \neq 13$ .

$$q=3: 3q^2 = 27$$

$$(m-n)(m-n+9) = 27$$

$$t = m-n$$

$$t^2 + 9t - 27 = 0$$

$$D = 81 + 108 = 189 \notin \mathbb{N}, \text{ тогда } t \notin \mathbb{N}, \text{ но } m-n \in \mathbb{N}$$

$$mn(m-n+3) = 27$$

$$\begin{cases} mn=1 \Rightarrow m=1, n=1, \text{ но } m-n+3 \neq 27 \\ m-n+3=27 \end{cases} \text{ — не встает.}$$

$$\begin{cases} mn=3 \Rightarrow m=1, n=3; m=3, n=1, \text{ но } m-n+3 \neq 27 \text{ — не встает.} \\ m-n+3=27 \end{cases}$$

$$\begin{cases} mn=9 \Rightarrow m=1, n=9; m=3, n=3; m=9, n=1 \\ m-n+3=9 \end{cases} \text{ — не встает, но тогда } A=0, \text{ что не встает.}$$

$$\begin{cases} mn=27 \Rightarrow m=1, n=27; m=3, n=9; m=9, n=3; m=27, n=1 \\ m-n+3=1 \end{cases} \text{ — не встает, но } m-n+3 \neq 1 \text{ — не встает.}$$

Итак,  $p \neq 13$  и  $q \neq 3 \Rightarrow A: 13$  и  $B: 3$  или  $A: 3$  и  $B: 13$ .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Предположим,  $A:13$  и  $B:3$ .

$$(m-n)^2 + 9(m-n) = (m-n)(m-n+9):13. \text{ Тогда } m-n:13 \text{ или } m-n+9:13$$

$$mn(m-n+3):3. \text{ Тогда } m:3 \text{ или } n:3 \text{ или } (m-n):3. \text{ При}$$

этом однозначно  $m$  и  $n$  не могут быть кратны 3, т.к. иначе  $mn(m-n+3):27$ , а  $39 \nmid 27$ .



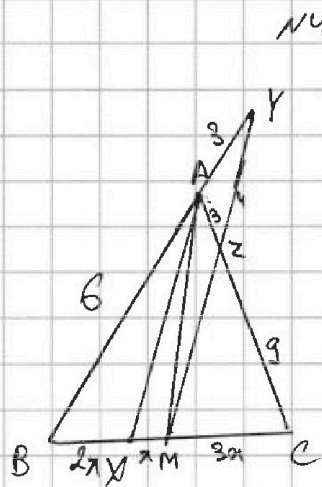
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} AC=12 \\ AZ=3 \end{cases} \Rightarrow ZC=9$$

Т.к.  $AX \parallel ZM$ , то по теореме Фалеса

$$\frac{AZ}{ZC} = \frac{XM}{MC} = \frac{1}{3}$$

$XM=x \Rightarrow MC=3x$ , а т.к.  $BM=MC$ , то  $BX=2x$

Т.к.  $AX$  — биссектриса, то

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BX}{XC}$$

$$\frac{6}{12} = \frac{2x}{9-2x}$$

$$\frac{AB}{12} = \frac{2x}{6x}$$

$$\frac{AB}{12} = \frac{1}{2}$$

$$AB=6$$

Данные мы можем применить теорему Менелая для треугольника ABC и прямой AY.

$$\frac{BM}{MC} \cdot \frac{CZ}{ZA} \cdot \frac{AY}{YB} = 1$$

$$1 \cdot 3 \cdot \frac{AY}{YB} = 1$$

$$\frac{AY}{YB} = \frac{1}{3}$$

$$3AY = YB = AB + AY$$

$$3AY = AB + AY$$

$$2AY = 6$$

$$AY = 3$$

Мы знаем все стороны треугольника AYZ. Применим в нем теорему косинусов и узнаем  $\cos \angle ZAY$ :

$$16 = 9 + 9 - 2 \cdot 3 \cdot 3 \cos \angle ZAY$$

$$16 = 18 - 18 \cos \angle ZAY$$

$$-2 = -18 \cos \angle ZAY$$

$$\cos \angle ZAY = \frac{1}{9} \quad \angle BAC = (180^\circ - 2\angle ZAY) \Rightarrow \cos \angle BAC = -\cos 2\angle ZAY = -\frac{1}{9}$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Мы знаем  $\cos \angle BAC$ ,  $AB$  и  $AC$ , а значит можем найти  $BC$  по теореме косинусов:

$$BC^2 = 36 + 144 - 2 \cdot 6 \cdot 12 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)$$

$$BC^2 = 180 + 2 \cdot 6 \cdot 12 \cdot \frac{1}{3}$$

$$BC^2 = 180 + 16$$

$$BC = 196$$

$$BC = 14$$

Ответ:  $BC = 14$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{5-y} + 5 = 2\sqrt{30-x-y^2} \\ 4x^4 + x - 5\sqrt{y} = 4y^4 - 5\sqrt{x} + y \end{cases}$$

$$\text{O3: } \begin{cases} x+6 \geq 0 \\ 5-y \geq 0 \\ 30-x-y^2 \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -6 \\ y \leq 5 \\ y \geq 0 \\ x \geq 0 \\ 30-x-y^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [0, +\infty) \\ y \in [0, 5] \\ 30-x-y^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [0, +\infty) \\ y \in [0, 5] \\ x \leq 30-y^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

т.к. мин.  $y=0$ ,  
то макс.  $30-y^2=30$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y \in [0, 5] \\ x \in [0, 30] \end{cases}$$

$$4x^4 - 4y^4 + x - y + 5\sqrt{x} - 5\sqrt{y} = 0$$

$$4(x^2-y^2)(x^2+y^2) + (x-y) + 5(\sqrt{x} - \sqrt{y}) = 0$$

$$4(x-y)(x+y)(x^2+y^2) + (x-y) + 5(\sqrt{x} - \sqrt{y}) = 0$$

$$(x-y)(4(x+y)(x^2+y^2) + 1) + 5(\sqrt{x} - \sqrt{y}) = 0$$

$$(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})(4(x+y)(x^2+y^2) + 1) + 5(\sqrt{x} - \sqrt{y}) = 0$$

$$(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})(4(x+y)(x^2+y^2) + 1) + 5(\sqrt{x} - \sqrt{y}) = 0$$

$$(\sqrt{x} - \sqrt{y}) \underbrace{\left( \underbrace{(4\sqrt{x} + 4\sqrt{y})}_{\geq 0} \underbrace{(\sqrt{x} + \sqrt{y})}_{\geq 0} \underbrace{(4(x+y)(x^2+y^2) + 1)}_{\geq 0} + 5 \right)}_{\geq 0} = 0$$

$$\begin{aligned} 4\sqrt{x} &= 4\sqrt{y} \\ x &= y \end{aligned}$$

$$\underbrace{\left( \underbrace{(\sqrt{x} + \sqrt{y})}_{\geq 0} \right) \underbrace{(\sqrt{x} + \sqrt{y})}_{\geq 0} \underbrace{\left( \underbrace{4(x+y)(x^2+y^2) + 1}_{\geq 0} + 5 \right)}_{\geq 0}}_{\geq 0} > 0, \text{ т.е.}$$

возможно только  $x=y$  из 2-ого уравнения системы.

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{5-x} + 5 = 2\sqrt{30-x-x^2}$$

$$\sqrt{x+6} - 2\sqrt{(x+6)(5-x)} - \sqrt{5-x} + 5 = 0$$

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{5-x} = -5 + 2\sqrt{(x+6)(5-x)}$$

$$x+6 - 2\sqrt{(x+6)(5-x)} + 5-x = 4(x+6)(5-x) - 20\sqrt{(x+6)(5-x)} + 25$$

$$11 - 2\sqrt{(x+6)(5-x)} = 4(x+6)(5-x) - 20\sqrt{(x+6)(5-x)} + 25$$

$$4(x+6)(5-x) - 18\sqrt{(x+6)(5-x)} + 14 = 0$$

$$t = \sqrt{(x+6)(5-x)}$$

$$4t^2 - 18t + 14 = 0$$

$$2t^2 - 9t + 7 = 0$$

$$t_1 = 1$$

$$t_2 = 3,5$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$t=1:$

$$\sqrt{(x+6)(5-x)} = 1$$

$$(x+6)(5-x) = 1$$

$$5x - x^2 + 30 - 6x = 1$$

$$-x^2 - x + 30 = 1$$

$$x^2 + x - 29 = 0$$

$$D = 1 + 4 \cdot 29 = 117$$

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{117}}{2}, \text{ тогда } y = \frac{\sqrt{117} - 1}{2}, \text{ тогда } \sqrt{30 - \frac{\sqrt{117} - 1}{2} - \frac{(\sqrt{117} - 1)^2}{4}} =$$

$$x_2 = \frac{-1 - \sqrt{117}}{2} - \text{негод.}, x \geq 0 = \sqrt{30 - \frac{\sqrt{117} - 1}{2} - \frac{117 - 2\sqrt{117} + 1}{4}} =$$

$$= \sqrt{30 - \frac{\sqrt{117} - 1}{2} - 29 + \frac{\sqrt{117}}{2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{\sqrt{117} - 1}{2} - 29} =$$

$$= \sqrt{\frac{\sqrt{117} + 1}{2} - 29} \leq 0, \text{ негод.}$$

$t=3,5:$

$$\sqrt{(x+6)(5-x)} = 3,5$$

$$(x+6)(5-x) = 12,25$$

$$4(x+6)(5-x) = 49$$

$$4(5x - x^2 + 30 - 6x) = 49$$

$$4(-x^2 - x + 30) = 49$$

$$-4x^2 - 4x + 120 = 49$$

$$-4x^2 - 4x + 71 = 0$$

$$4x^2 + 4x - 71 = 0$$

$$D = 16 + 4 \cdot 4 \cdot 71 = 1152 = (24\sqrt{3})^2$$

$$x_1 = \frac{-4 + 24\sqrt{3}}{8} = \frac{6\sqrt{3} - 1}{2}, \text{ тогда } y = \frac{6\sqrt{3} - 1}{2}$$

$$x_2 = \frac{-4 - 24\sqrt{3}}{8} \leq 0, \text{ негод.}$$

$$30 - \frac{6\sqrt{3} - 1}{2} - \frac{(6\sqrt{3} - 1)^2}{4} = 30 - \frac{6\sqrt{3} - 1}{2} - \frac{73 - 12\sqrt{3}}{4} = 30 - \frac{12\sqrt{3} - 2 + 73 - 12\sqrt{3}}{4} =$$

$$= 30 - \frac{71}{4} = 12,25 > 0 \checkmark \text{ и } \frac{6\sqrt{3} - 1}{2} < 5$$

Ответ:  $\left(\frac{\sqrt{117} - 1}{2}; \frac{\sqrt{117} - 1}{2}\right), \left(\frac{6\sqrt{3} - 1}{2}; \frac{6\sqrt{3} - 1}{2}\right)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

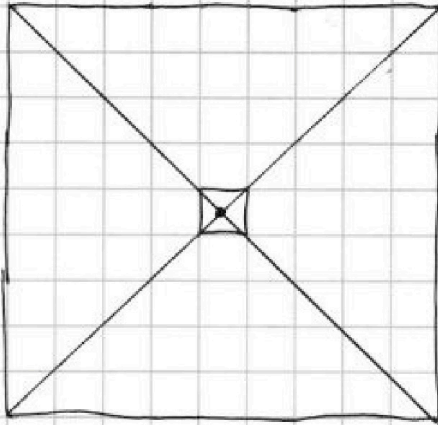


1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№6



Всего узлов  $10 \cdot 10 = 100$  штук.

Заметим, что узлы, лежащие на выделенных диагоналях и лежащие на одинаковой расстановке узлов

Заметим, что два узла, лежащие вместе на одной из выделенных диагоналей на одинаковой расстановке от центра таблицы, симметричны, а значит, при 4 поворотах фигуры будут повторяться одинаковые случаи. У других узлов

~~при 4 поворотах~~ при 4 поворотах будут 4 разных случая. Выбрать узел, не лежащий на диагоналях, и любой другой узел, а после их перекрасить можно  $\frac{20 \cdot 99}{2 \cdot 4}$ . Выбрать два узла, лежащих на диа-

нет разницы в каком порядке мы выберем узлы.

два узла, не лежащих на диагоналях

даны на 4, т.к. при повороте у нас 4 симметричных расстановки, поэтому для них узлы разные

нельзя учесть симметричные и разные узлы

значит, ~~то~~ но при этом несимметричны, можно  $\frac{20 \cdot 18}{2 \cdot 4}$  способами.

а после перекрасить узлы

Выборить два симметричных узла, а после перекрасить, можно  $\frac{20 \cdot 1}{2 \cdot 2}$  - симметричный узел после выбранного определяется однозначно.

$\frac{20 \cdot 1}{2 \cdot 2}$  10 способами.

Итого:  $\frac{20 \cdot 99}{2 \cdot 4} + \frac{20 \cdot 18}{2 \cdot 4} + \frac{20 \cdot 1}{2 \cdot 2} = 990 + 45 + 5 = 1040$  способов.

Ответ: 1040 способов

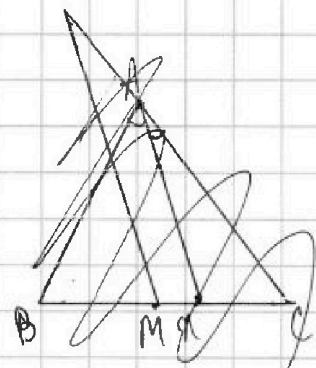
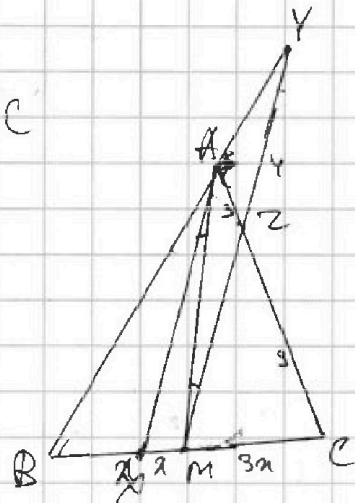
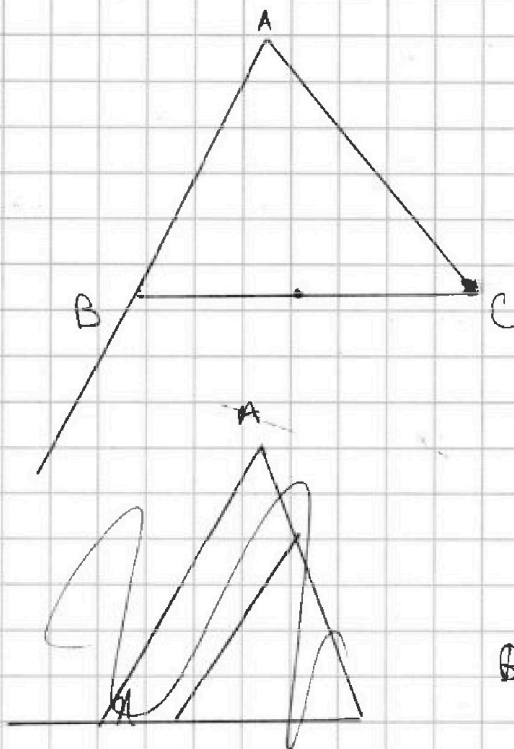


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\Leftrightarrow \sqrt{3x+6}$$

$$\begin{aligned} & \sqrt{3x+6} - \sqrt{3y} + 5 = 2\sqrt{30-x-y^2} \\ & \sqrt{3x+6} - \sqrt{3y} = 4y^2 - 5\sqrt{x} + y \end{aligned}$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_\_ ИЗ \_\_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = m^2 - 2mn + n^2 + 9(m-n) = 169^2 \quad \text{или} \quad = 89^2$$

$$B = mn(m-n+3) = 3q^2 \quad \text{или} \quad = 13p^2 \quad m, n \in \mathbb{N}$$

$$A = (m-n)^2 + 9(m-n) = (m-n)(m-n+9) : 3$$

$$B = mn(m-n+3) : 3 \quad m-n : 3 \quad \text{или} \quad m-n+9 : 3$$

или  $m : 3$   
 $n : 3$   
 $m-n : 3$

$$\begin{array}{r} \times 169 \\ 13 \\ \hline 169 \\ + 507 \\ \hline 2197 \end{array}$$

$$(m-n)(m-n+9) = 2197$$

~~$m-n = 13$~~   
 $m-n = 13$   
 $m-n+9 = 169$   
 $13+9 = 22$

$$mn(m-n+3) = 89^2$$

$m-n = 13$   
 $m-n+3 = 169$   
 $m-n = 169$   
 $m-n+3 = 172$

$$\begin{array}{r} \times 2197 \\ 13 \\ \hline 2197 \\ + 8789 \\ \hline 8863 \end{array}$$

$$(m-n)(m-n+9) = 27 \quad \text{или} \quad = 1 \cdot 27$$

$$mn(m-n+3) = 27$$

$m-n = 1 - 1009$   
 $m-n+3 = 27$   
 $m-n = 27$   
 $m-n+3 = 30$

$$\begin{array}{r} 97 \\ \times 93 \\ \hline 873 \\ + 873 \\ \hline 9409 \end{array}$$

$$(m-n+3) = 3 \quad m-n = 0$$

$m-n = 0$   
 $m = n$   
 $33$   
 $m = 3$   
 $n = 3$   
 $q = 3$

$$\begin{array}{r} 93 \\ \times 93 \\ \hline 873 \\ + 873 \\ \hline 8649 \end{array}$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{matrix} 6x+18 \\ 8+4q \end{matrix} \quad \begin{matrix} (x^2-4a) \\ 8+6q \end{matrix} \quad \begin{matrix} \times 1 \\ (-3x^2) \\ 8+10q \end{matrix} \quad \rightarrow (11+4\sqrt{7}) = -33-12\sqrt{7}$$

$$x^2-4x = \frac{6x+18+4q}{2} \quad (8=30+6\sqrt{7}+4q) \\ -12-6\sqrt{7}$$

$$2x^2-8x = 6x+18+4q \quad (6\sqrt{7})^2 - 4(2\sqrt{7})^2 =$$

$$4q = 2x^2-8x-6x-18 = 2x^2-14x-18 \quad = (4+7+4\sqrt{7}-8-4\sqrt{7})^2 =$$

$$\frac{x^2-4x-3a^2}{2} = \frac{-2x^2-4a}{2} = -x^2-2a \quad (2-\sqrt{7})^2 = 9$$

$$2x^2-14x-18 = -x^2-2a \quad = 4-4\sqrt{7}+4 = 11-4\sqrt{7}$$

$$3x^2-18x-18 = 0 \quad 11-4\sqrt{7}-4(2-\sqrt{7}) =$$

$$x^2-4x-6 = 0 \quad = 11-4\sqrt{7}-8+4\sqrt{7} = 3$$

$$\Delta = 16+24 = 40 = 2\sqrt{10}$$

$$x_1 = \frac{4+\sqrt{10}}{2}$$

$$x_2 = \frac{4-\sqrt{10}}{2}$$

$$18 = 20+6\sqrt{7}+4q$$

$$-12+6\sqrt{7} = 4q$$

$$\frac{30}{4=\sqrt{7}} \quad 16 \quad 2 \quad -12$$

$$2+\sqrt{7}$$

$$6(2+\sqrt{7})+18 = 30+12\sqrt{7}$$

$$(9+2\sqrt{7})^2 - 4(2\sqrt{7})^2 =$$

$$= (4+7+4\sqrt{7}-8-4\sqrt{7})^2 =$$

$$= 9$$

$$(2+\sqrt{7})^2 = 4+7+4\sqrt{7} = 11+4\sqrt{7}$$

$$2^2 - 6x^2 + 5x + 6$$

$$8 - 24 + 10 + 6$$

$$16 - 8 \cdot 8 + (7 \cdot 4 - 4 \cdot 2 - 12) =$$

$$= 16 - 64 + 68 - 8 - 12 =$$

$$= 16 + 4 - 8 - 12 = 0$$

$$2+\sqrt{7} \quad a_6 \quad 9 \quad a_8 \quad a_9 \quad a_{10} \quad 11+4\sqrt{7}$$

$$\frac{10\sqrt{7} \cdot 2\sqrt{7} + 7}{16-5\sqrt{7}} = 7$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

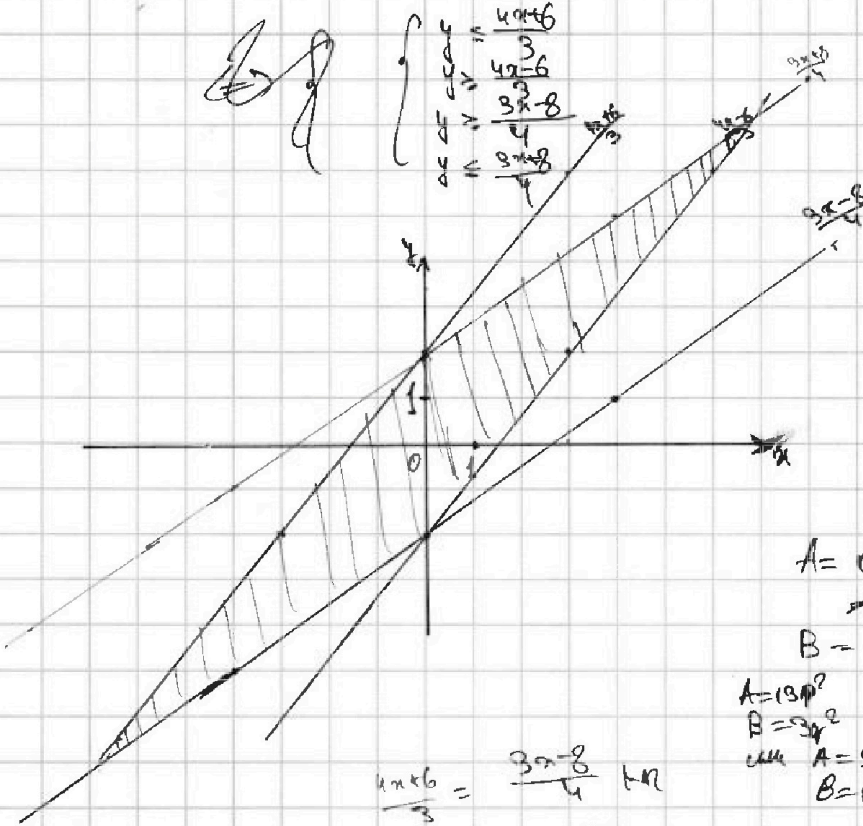


1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} |4x-3y| \leq 6 \\ |3x-4y| \leq 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x-3y \geq -6 \\ 4x-3y \leq 6 \\ 3x-4y \leq 8 \\ 3x-4y \geq -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3y \leq 4x+6 \\ 3y \geq 4x-6 \\ 4y \geq 3x-8 \\ 4y \leq 3x+8 \end{cases}$$



мен REN  
 $A = (m-n)^2 + q(m-n) =$   
 $B = mn(m-n+q)$

$A = 13p^2$   
 $B = 3q^2$   
 или  $A = 3q^2$   
 $B = 13p^2$   
 p, q — простые

$$\frac{4x+6}{3} = \frac{3x-8}{4} + n$$

$$16x+24 = 9x-24$$

$$7x = -48$$

$$x = -\frac{48}{7}$$

$$\frac{3 \cdot -\frac{48}{7} - 8}{4} = \frac{-\frac{144}{7} - 8}{4} = -\frac{26}{7} - 2 = -\frac{50}{7}$$

$$\frac{4 \cdot -\frac{48}{7} + 6}{3} = \frac{-\frac{192}{7} + 6}{3} = -\frac{64}{7} + 2 = -\frac{50}{7}$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

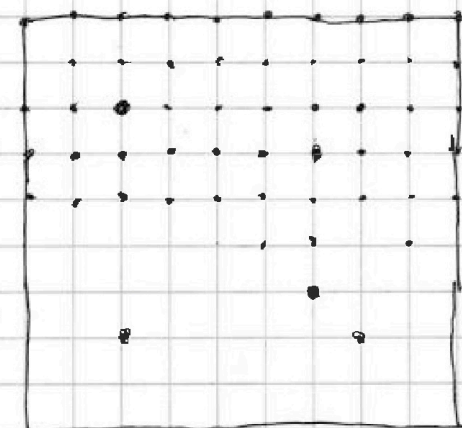
$x \geq -6$   
 $y \leq 5$   
 $30 - x - y^2 \geq 0$   
 $y \geq 0$   
 $x \geq 0$

$4x^2 - 4y^2 + 2x - 5y + 5 = 0$   
 $4(x^2 - y^2) + 2x - 5y + 5 = 0$   
 $4(x^2 - y^2) + 2x - 5y + 5 = 0$

$x \in [-6; +\infty)$   
 $y \in [0; 5]$   
 $30 - x - y^2 \geq 0$   
 $x \in [0; 5]$   
 $x \in [0; 5]$   
 $y \in [0; 5]$

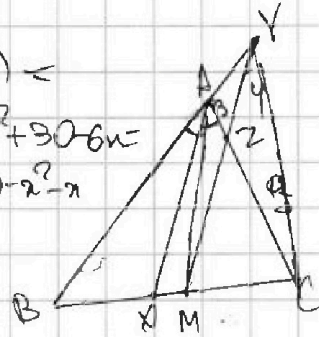
$\sqrt{x+6} - \sqrt{5-y} = 2\sqrt{30-x-y^2} - 5$   
 $\sqrt{x+6} - \sqrt{5-y} + 5 = 2\sqrt{30-x-y^2}$   
 $4x^2 - 4y^2$

$x^2 - x + 30$   
 $x = \frac{1}{2}$   
 $y = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 30$   
 $= 30.25$   
 $= 30.25$



$10 \cdot 10 = 100$  точек  
 $\frac{100 \cdot 99}{4} = 25 \cdot 99 =$   
 $= 2475$   
 Кроме центра  
 по диагонали по  
 четырем делится  
 на 2.

$(4+6)(5-x) =$   
 $= 5x - x^2 + 30 - 6x =$   
 $= 30 - x^2 - x$



$BC = ?$   
 $\sqrt{1+4} = \sqrt{5}$   
 $\sqrt{1+9} = \sqrt{10}$   
 $\sqrt{1+1} = \sqrt{2}$   
 $\sqrt{1+1} < 11$

