



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [3 балла] Найдите все действительные значения  $x$ , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её четвёртый член равен  $\sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}}$ , десятый член равен  $x+4$ , а двенадцатый член равен  $\sqrt{(15x+6)(x-3)}$ .

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+7} - \sqrt{5-x-3z} + 6 = 2\sqrt{y-2x-x^2+z}, \\ |y-20| + 2|y-35| = \sqrt{225-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $p$ , при которых уравнение

$$\cos 3x + 6 \cos x = 3 \cos 2x + p$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких  $p$ .

4. [5 баллов] Две окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$  пересекаются в точках  $A$  и  $B$ , а их общая касательная имеет с  $\omega_1$  и  $\omega_2$  общие точки  $C$  и  $D$  соответственно, причём точка  $B$  расположена ближе к прямой  $CD$ , чем точка  $A$ . Луч  $CB$  пересекает  $\omega_2$  в точках  $B$  и  $E$ . Найдите отношение  $ED : CD$ , если диагональ  $AD$  четырёхугольника  $ACDE$  делит отрезок  $CE$  в отношении  $9 : 25$ , считая от вершины  $C$ .
5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник  $150 \times 200$ . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).
6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел  $(a; b; c)$  такие, что:
- $a > b$ ,
  - число  $a - b$  не кратно 3,
  - число  $(a - c)(b - c)$  является квадратом некоторого простого числа,
  - выполняется равенство  $a + b^2 = 820$ .
7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник со стороной 2. Площади её боковых граней равны 5, 5 и 4. Найдите высоту призмы.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$b_4 = b_1 \cdot k^3 = \frac{\sqrt{15x+6}}{(x-3)^3}$$

$$b_{10} = b_1 \cdot k^9 = x+4$$

$$b_{12} = b_1 \cdot k^{12} = \sqrt{(15x+6)(x-3)^3}$$

$$\Rightarrow \frac{b_1 \cdot k^{12}}{b_1 \cdot k^9} = k^3 = \sqrt{\frac{(15x+6)(x-3)^3}{(15x+6)}} = (x-3)^2$$

// ] вот  $15x+6=0$ , тогда  $b_4=0=b_1 \cdot k^3 \Rightarrow \begin{cases} k=0 \\ b_1=0 \end{cases} \Rightarrow b_{10}=0$ , но  $b_{10}=x+4=$

$$4 - \frac{2}{5} \neq 0$$

т.е.  $k^9 = (x-3)^2$  <sup>к<sup>20</sup>р</sup>  $\Rightarrow k^4 = x-3, x \geq 3$

т.е.  $x \geq -\frac{2}{5}$  //

$k^4 = 3-x, x < 3$

1)  $x \geq 3$ , тогда  $k^4 = x-3 \Rightarrow k^2 = \sqrt{x-3}$

тогда  $b_{10} = b_1 \cdot k^9 = \frac{b_1 \cdot k^{12}}{k^3} = \frac{\sqrt{(15x+6)(x-3)^3}}{\sqrt{x-3}} = x+4$   $\Leftrightarrow$

т.к.  $b_1 = \frac{\sqrt{15x+6}}{(x-3)^3} : x+3 //$

оп<sup>3</sup>:  $(15x+6)(x-3)^2 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 & x+3 \\ x \leq -\frac{2}{5} & x+3 \end{cases} \Rightarrow x \geq 3$  ~~и  $x \leq -\frac{2}{5}$  не подходит~~

$\Leftrightarrow \sqrt{15x+6} = x+4 \Leftrightarrow (15x+6) = x^2+8x+16 \Leftrightarrow x^2-7x+10=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ x=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x=5 \end{cases}$

2)  $x < 3$ , тогда  $k^4 = 3-x \Rightarrow k^2 = \sqrt{3-x}$

тогда  $b_{10} = \frac{b_1 \cdot k^{12}}{k^3} = \frac{\sqrt{(15x+6)(x-3)^3}}{\sqrt{3-x}} = x+4 \Leftrightarrow \sqrt{6-15x} = x+4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 6-15x = (x+4)^2 \\ 6-15x \geq 0 \\ x+4 \geq 0 \\ x < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+23x+10=0 \\ -4 \leq x < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-23 \pm \sqrt{529-40}}{2} \\ -4 \leq x < 3 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-23 \pm \sqrt{489}}{2} \\ -4 \leq x < 3 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\frac{-23+\sqrt{489}}{2} < 3 \Leftrightarrow -8 \leq -23+\sqrt{489} < 6 \Leftrightarrow 15 \leq \sqrt{489} < 29 \Leftrightarrow 489 < 29^2$  ~~и  $489 < 29^2$  не подходит~~

$\frac{-23-\sqrt{489}}{2} < 3 \Leftrightarrow -8 \leq -23-\sqrt{489} < 6 \Leftrightarrow -31 \leq -\sqrt{489} < 29 \Leftrightarrow \sqrt{489} \leq 31$  ~~и  $\sqrt{489} \leq 31$  не подходит~~

Ответ:  $\left\{ \frac{-23 \pm \sqrt{489}}{2}, 5 \right\}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt{x+7} - \sqrt{5-x-3z} + 6 = 2\sqrt{y-2x-x^2+z} \\ |y-20| + 2|y-35| = \sqrt{225-z^2} \end{array} \right. \Rightarrow \sqrt{x+7} - \sqrt{5-x-3z} + 6 = 2\sqrt{y-2x-x^2+z}$$

$$\text{a) } \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{x+7} - \sqrt{5-x-3z} + 6 = 2\sqrt{y-35+35-2x-x^2+z} \\ |y-20| + 2|y-35| = \sqrt{225-z^2} \end{array} \right. \Rightarrow \sqrt{x+7} - \sqrt{5-x-3z} + 6 = 2\sqrt{y-35+(5-x)(x+7)+z}$$

$$\text{b) } \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{x+7} - \sqrt{5-x-3z} + 6 = 2\sqrt{y-35+(5-x)(x+7)+z} \\ |y-20| + 2|y-35| = \sqrt{225-z^2} \end{array} \right. \Rightarrow \sqrt{225-z^2} \geq 0 \Rightarrow z \in [-15; 15]$$

$$\text{c) } A: |y-20| + 2|y-35| = \sqrt{225-z^2} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} y-20+2y-70 = \sqrt{225-z^2}, y \geq 35 \\ y-20-2y+70 = \sqrt{225-z^2}, 20 \leq y < 35 \\ 70-y+70-2y = \sqrt{225-z^2}, y \leq 20 \end{array} \right.$$

$$\text{e) } \left\{ \begin{array}{l} 3y-90 = \sqrt{225-z^2}, y \geq 35 \\ 50-y = \sqrt{225-z^2}, 20 \leq y < 35 \text{ - не пойд.} \\ 90-3y = \sqrt{225-z^2}, y \leq 20 \text{ - не пойд.} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = 35 \\ z = 0 \end{array} \right., \text{ тогда:}$$

$$\sqrt{x+7} - \sqrt{5-x-3z} + 6 = \sqrt{35-35+(5-x)(x+7)+0} \Rightarrow \sqrt{x+7} - \sqrt{5-x} + 6 = \sqrt{(5-x)(x+7)}$$

$$\text{e) } \left\{ \begin{array}{l} x+7 \geq 0 \\ 5-x \geq 0 \\ x+7+5-x-2\sqrt{(x+7)(5-x)} = (5-x)(x+7)+36-12\sqrt{(5-x)(x+7)} \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\text{e) } \left\{ \begin{array}{l} -7 \leq x \leq 5 \\ (5-x)(x+7) + 24 = 12\sqrt{(x+7)(5-x)} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -7 \leq x \leq 5 \\ (\sqrt{(x+7)(5-x)} - 4)(\sqrt{(x+7)(5-x)} - 6) = 0 \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\text{e) } \left\{ \begin{array}{l} -7 \leq x \leq 5 \\ \sqrt{(x+7)(5-x)} = 4 \\ \sqrt{(x+7)(5-x)} = 6 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -7 \leq x \leq 5 \\ 35-2x-x^2=16 \\ 35-2x-x^2=36 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -7 \leq x \leq 5 \\ x^2+2x-19=0 \\ x^2+2x+1=0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -7 \leq x \leq 5 \\ x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+76}}{2} \\ x = -1 \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\text{e) } \left\{ \begin{array}{l} -7 \leq x \leq 5 \\ x = -1 \pm 2\sqrt{5} \\ x = -1 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -1 \\ x = -1 \pm 2\sqrt{5} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -7 \leq -1-2\sqrt{5} \leq 5 \\ -7 \leq -1+2\sqrt{5} \leq 5 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -6 \leq -2\sqrt{5} \leq 6 \\ -6 \leq 2\sqrt{5} \leq 6 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2\sqrt{5} \leq 6 \\ \sqrt{5} \leq 3 \text{ - не!} \end{array} \right. //$$

$$\text{Ответ: } \left\{ (-1+2\sqrt{5}; 35; 0); (-1-2\sqrt{5}; 35; 0); (-1; 35; 0) \right\}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
18 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\cos^3 x + 6 \cos x = 3 \cos^2 x + p \Leftrightarrow 4 \cos^3 x - 3 \cos x + 6 \cos x = 6 \cos^2 x - 3 + p \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4 \cos^3 x - 6 \cos^2 x + 3 \cos x + 3 = p \quad \text{по}$$

тогда c)  $f(t) = 4t^3 - 6t^2 + 3t + 3$ , где  $t = \cos x \Rightarrow t \in [-1; 1]$

$$f'(t) = 12t^2 - 12t + 3 = 3(4t^2 - 4t + 1) = 3(2t - 1)^2$$

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}, \text{ ищем } f(t) \text{ на } [-1; 1]$$

$$f(0) = 0 - 0 + 0 + 3 = 3$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8} - \frac{6}{4} + \frac{3}{2} + 3 = 3,5$$

$$f(-1) = -4 - 6 - 3 + 3 = -10$$

$$f(1) = 4 - 6 + 3 + 3 = 4$$

попр. График  $y = f(t)$

~~$$f(t) = 0 \Leftrightarrow 4t^3 - 6t^2 + 3t + 3 = 0 \Leftrightarrow 2t^2 - 3t - 3 = 0$$~~

~~$$D = \frac{9}{4} + 6 = \frac{33}{4}$$~~

или

тогда  $p \in [-10; 4]$  и  $y$ -я есть решение

c)  $p \in [-10; 4]$ , тогда:

$$4 \cos^3 x - 6 \cos^2 x + 3 \cos x + 3 = p \Leftrightarrow 4 \cos^3 x - 6 \cos^2 x + 3 \cos x - \frac{1}{2} = p - 3,5 \Leftrightarrow$$

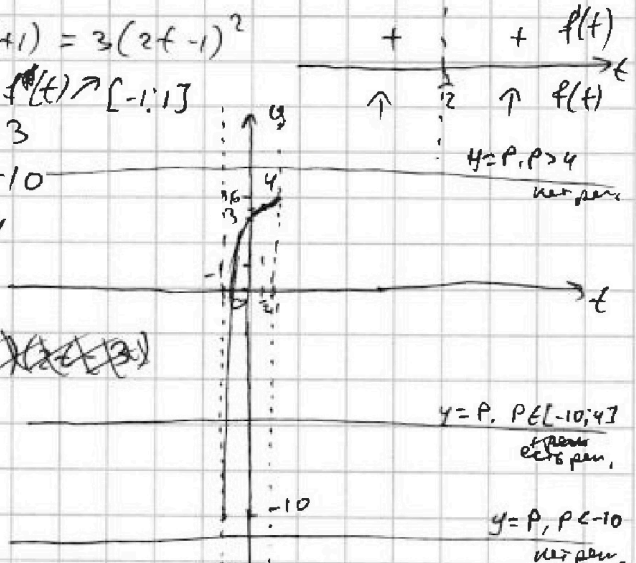
~~$$\Leftrightarrow (\cos x - \frac{1}{2})^3 = p - 3,5 \Leftrightarrow (2 \cos x - 1)^3 = 2p - 7 \Leftrightarrow 2 \cos x - 1 = \sqrt[3]{2p - 7} \Leftrightarrow$$~~

~~$$\Leftrightarrow 4(\cos x - \frac{1}{2})^3 = p - 3,5 \Leftrightarrow (\cos x - \frac{1}{2})^3 = \frac{2p - 7}{4} \Leftrightarrow \cos x - \frac{1}{2} = \sqrt[3]{\frac{2p - 7}{4}} \Leftrightarrow$$~~

~~$$\Leftrightarrow \cos x = \frac{1 + \sqrt[3]{2p - 7}}{2} \Leftrightarrow x = \arccos\left(\frac{1 + \sqrt[3]{2p - 7}}{2}\right) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$~~

~~$$x = -\arccos\left(\frac{1 + \sqrt[3]{2p - 7}}{2}\right) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$~~

Ответ:  $\left\{ \arccos\left(\frac{1 + \sqrt[3]{2p - 7}}{2}\right) + 2\pi k; -\arccos\left(\frac{1 + \sqrt[3]{2p - 7}}{2}\right) + 2\pi n \mid k, n \in \mathbb{Z} \right\}$   
или  $p \in [-10; 4]$



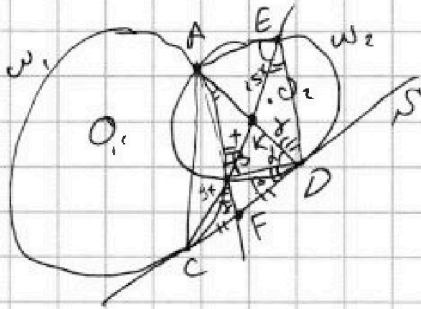


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$K = AP \cap CE \quad \frac{CK}{KE} = \frac{9}{25}$$

$$1) CB \cdot CE = CD^2 \text{ т.к. } CD - \text{кас.}, CE - \text{сеч.}$$

$$CD^2 = AB \cap CD = F$$

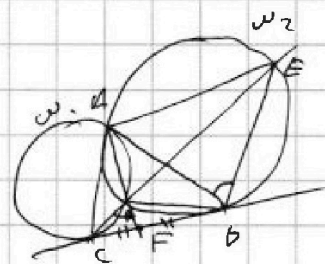
$$CF^2 = FC^2 = FB \cdot FA$$

$$\text{т.к. } \angle K = \angle BK \text{ тогда } \angle K = \angle BK$$

$$a^2 = FB \cdot BA$$

$$(CK - FK)(CK + FK)$$

$$AK \cdot KP = BK \cdot KE$$



$$\begin{aligned} \angle ADF &= \angle AEB = \angle \alpha \\ \angle AEP &= \angle APD = \angle \beta \\ \angle AKE &= \angle CKD \text{ (верт. углы)} \end{aligned} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \triangle CKD \sim \triangle AKE \quad \frac{CK}{KE} = \frac{9}{25} \quad \text{т.к. } \frac{CK}{KE} = \frac{9}{25} \Rightarrow$$

$$\angle CBF = \angle ABK \text{ (верт.)}$$

$$\angle ABK = \angle ADE = \frac{\angle \alpha}{2} \Rightarrow \angle CBF = \angle ADE$$

$$\angle DAB = \angle BED = \frac{\angle \beta}{2}$$

$$\angle ADF = \frac{\angle \alpha}{2}$$

$$\angle BCF = \frac{\angle \beta - \angle \alpha}{2} = \angle EDB - \angle DBF$$

$$\angle EDA = \angle \gamma = \angle ABD$$

$$\angle ADB = \angle \delta = \angle AEB = \frac{\angle \alpha}{2}$$

$$\angle BDC = \angle CED = \frac{\angle \beta}{2} = \beta$$

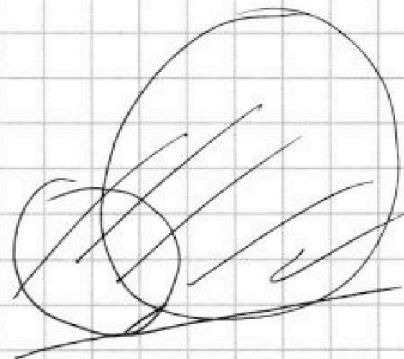
$$\angle EDB = 180^\circ - \delta - \beta - \gamma = \angle EAD = \frac{\angle \alpha}{2} = \gamma$$

$$\angle BCF = \frac{\angle \beta - \angle \alpha}{2} = \beta - 180^\circ - \delta - \beta - \gamma = 180^\circ - \delta - 2\beta - \gamma$$

$$\angle BKP = \beta + \gamma = (180^\circ - (180^\circ - \beta - \gamma))$$

$$\angle KCD = 180^\circ - (\beta + \gamma) - (\delta + \beta) = 180^\circ - \delta - 2\beta - \gamma = \gamma - \beta$$

$$\angle CBD = 180^\circ - (\gamma - \beta) - \beta = 180^\circ - \gamma = \delta + \beta + \gamma$$



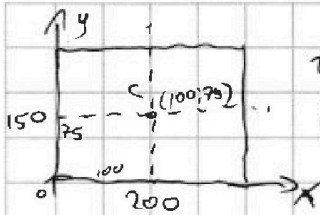


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



т.к.  $150:2 = 75$  и  $200:2 = 100$  центр имеет координаты  $(75, 100)$

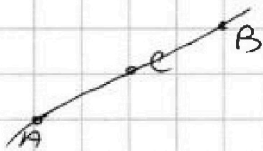
Введем координаты ячеек (см. рис-и)

Тогда центральная ячейка находится на  $(100, 75)$

т.к. весь ряд  $y=75$  и столбец  $x=100$  сами себе симметричны оти. сред. лин. т.к. сами явл. сред. линиями.

на 8 задач

1) Симметрия оти. центра: чтобы записать м. в ячейку было симметрично относительно центра квадрата, чтобы либо 1 ячейка в центре, и остальные симметричны оти. друг-другу центра, либо 0 ячеек в центре и ост. симметричны оти. центра.



1) A, B - сим. оти. C - центра.

чтобы A, B были симметричны оти. C

тогда должно быть  $AC = CB$ , т.е.

тогда задает центр. положение C, B

и тогда все 8 точек (или 7 если C-закрывает)

можно разбить по парам.

Сразу видно, что центр не может быть закрыт т.к.  $7/2$

Тогда можно пойти способом пометить 4 точки в прямоугольнике

и не пометить в центр.

Это кон. в способ пометить в попарную прямоугольнике симметрично оти. C, без центра, ведь каждая точка задает друг-другу симметрию оти. C.

т.е. Способ пометить в  $150 \cdot 99 + 76$  ячеек.

$150 \cdot 99 + 76 = 14950 + 76 = 14926 = 15000 - 74 = 14926$  ячеек.

А кон. в таких способ  $14924 \cdot 14923 \cdot 14922 \cdot 14921$

2) Симметрия оти. одной из центр. линий.

У точек не разлучает это. Каждая точка задает положение второй, линии симметрии оти. центра. Тогда каждая точка

или центр. линия не может иметь четное кон. в  $14926$ , т.к. тогда

оставляется кон. в  $14926$  ячеек и можно разбить по парам

Тогда можно пойти кон. в способ пометить 4 точки в D, т.к. чтобы они были сим-ны оти. центра, но не повт. друг-другу симметричны.

Во первых, можно пометить точки только в попарную D, без центра, т.к. каждая точка задает еще одну, при этом попарно ряд можно закрыть одну точку, так как не повт. друг-другу симметричны.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Тогда отдельно рассмотрим все эти случаи.

1) Горизонт. центр линии.

1.1) Как центр. линия Операции

тогда кол-во станков поменяется в 100:74 раза  
=  $7400 \cdot 7399 \cdot 7398 \cdot 7397$

1.2) Как ц. л. - 2 станка

тогда: кол-во станков поменяется =

$$\frac{7400 \cdot 7399 \cdot 7398}{3} \cdot \frac{100 \cdot 99}{2}$$

1.3) Как ц. л. - 4 станка, тогда кол-во станков:

$$\frac{7400 \cdot 7399}{2} \cdot \frac{100 \cdot 99 \cdot 98 \cdot 97}{4}$$

1.4) Как ц. л. - 6 станков, тогда кол-во станков:

$$7400 \cdot \frac{100 \cdot 99 \cdot 98 \cdot 97 \cdot 96 \cdot 95}{6}$$

1.5) Как ц. л. - 8 станков, тогда:

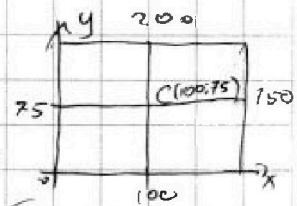
1.6) 2 станка -  $75 \cdot 99 + 74 = 14924$  | 15000 - 75 - 74 = 14851 ст.

2 станка -  $(14851 - 2)$  ст.

3 станка -  $(14851 - 4)$  ст.

4 станка =

8 станков -  $(14851 - 14)$  ст.





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} a > b \\ a - b \neq 3 \\ (a-c)(b-c) - \text{ном. квадрат} \\ a + b^2 = 820 \end{cases} \quad a, b, c \in \mathbb{Z}$$

1)  $a + b^2 = 820, b, a \in \mathbb{Z} \Rightarrow b^2 \in [1; 819] \Rightarrow b \in [1; 28]$

тогда:

b	a	b	a
1	819	15	595
2	816	16	564
3	811	17	531
4	804	18	498
5	795	19	459
6	784	20	420
7	771	21	379
8	756	21	379
9	739	23	335
10	720	24	293
11	699	25	246
12	676	26	185
13	651	27	142
14	624	28	36

$$\begin{array}{r} 28 \\ \times 28 \\ \hline 224 \\ 224 \\ \hline 784 \end{array} \quad \begin{array}{r} 28 \\ \times 28 \\ \hline 224 \\ 224 \\ \hline 784 \end{array} //$$

причем  $b \in [1; 28]$

$$\begin{aligned} a &= 820 - b^2 \\ a > b &\Rightarrow 820 - b^2 > b \Rightarrow \\ &\Rightarrow b^2 - 820 + b < 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow b^2 + b < 820 \\ &\leq 28^2 + 28 = 812 < 820 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a &= 820 - b^2 \\ a - b \neq 3 &\Rightarrow 820 - b^2 - b \neq 3 \Rightarrow 1 - b^2 - b \neq 3 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} -b^2 - b = 3n + 1, n \in \mathbb{Z} \\ -b^2 - b = 3k, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 - b^2 - b = 3n + 2, n \in \mathbb{Z} \\ 1 - b^2 - b = 3k + 1, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \\ &\Rightarrow b(b+1) = 3m, m \in \mathbb{Z} \\ &\Rightarrow a(b+1) = 3k', k' \in \mathbb{Z} \Rightarrow b \in [1; 28] \end{aligned}$$

$\Rightarrow b \in \{2; 3; 5; 6; 7; 8; 9; 11; 12; 14; 15; 17; 18; 20; 21; 23; 24; 26; 27; 16; 25; 28\}$

$(a-c)(b-c) - \text{ном. кв.} \Rightarrow (a-c)(b-c) = k^2, k \in \mathbb{Z}$

т.е.  $(820 - b^2 - c)(b - c) = k^2 \Rightarrow b^3 - 820b - cb = b^2c - 820c + c^2 - k^2$

т.е.  $(820 - b^2 - c)(b + c) = k^2$ , где  $k$  - прост.



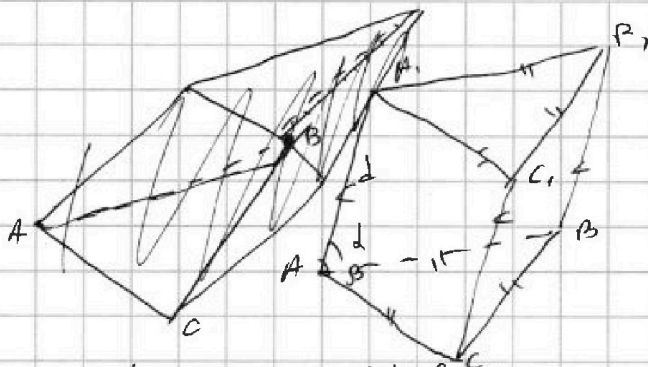
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



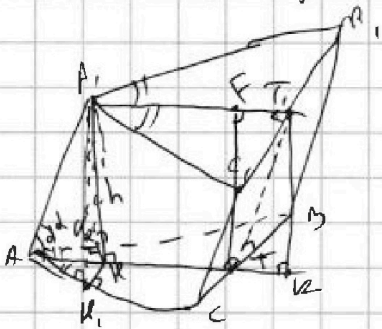
$$d \cdot \sin \beta = AB = BC = CA = a, A_1 = 2$$

$$S_{AA_1B_1B} = S; S_{AA_1C_1C} = S; S_{CC_1B_1B} = 4$$

$$S_{AA_1B_1B} = 2 \cdot d \cdot \sin \beta = S \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} d \sin \beta = \frac{S}{2} \\ S_{AA_1C_1C} = 2 d \sin \beta = S \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} d \sin \beta = \frac{S}{2} \\ d = \beta \\ \cos(\beta) \sin \beta = \frac{S}{2} \end{cases}$$

1)  $d = \beta$ , тогда  $h$  - выс. из  $A_1$  на  $ABC$ ,  $h_1 \triangle ABC = H$ , из  $K$  - перп. выс. на  $AC$  на  $AB$



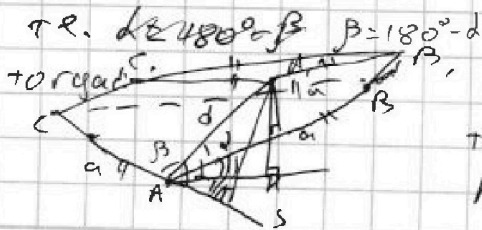
$AK \perp AC \Rightarrow A_1K \perp AC$   
 $AK \perp AB \Rightarrow A_1K \perp AB$   
 $\Rightarrow A_1K \perp \text{пл. } ABC$  (т.о. з. перп.)  
 тогда  $A_1K_1 = A_1K_2 = d \cos \beta$

$\angle \circ A_1K_1K_2$   
 $A_1K_1 = A_1K_2 = d \cos \beta$   
 $A_1K$  - об. ш.  
 $\angle A_1K_1K_2 = \angle A_1K_2K = 90^\circ$   
 $\Rightarrow \angle K_1AK_2 = \angle K_1AK_2$  (с.с.у)  
 $\Rightarrow AK$  - выс.  $\angle BAC$

т.к.  $\triangle ABC$  - равностор.  $AK$  - выс.  $[AK] \cap [CB] = T$

построим высоту из  $T$  на  $ABC$  -  $TK$ ;  $KE \in [AK]$ , т.к.  $A_1T \parallel AT$   
 тогда  $TK \perp CB$   
 $TK \perp ABC \Rightarrow T, T \perp CB$  (т.о. з. перп.)  
 построим  $TF$  - высоту на  $A, B, C$ ,  
 $TF \perp A, B, C$ ,  
 $FT \perp C, B, (FT, AT, BT, CT, TF \parallel TK \text{ и } TE \parallel K)$   
 $\Rightarrow TT_1 \perp C, B, \Rightarrow$

$\Rightarrow TT_1$  - об. ш. выс.  $\triangle CC_1B_1B$   
 $AA_1 = TT_1$  (т.к.  $A_1T \parallel AT$  и  $AT = A_1T$ )  $\Rightarrow TT_1$  - об. ш. выс.  $\triangle CC_1B_1B$   
 $TT_1 = CC_1B_1B$   
 $\Rightarrow \triangle CC_1B_1B$  - равноср.  $\Rightarrow S_{CC_1B_1B} = ad = 4 \Rightarrow \sin \beta = \frac{4}{a}$   
 $\Rightarrow d = 2 \Rightarrow \sin \beta = \frac{S}{4} > 1$  ?!



построим  $CA - CS$   $\angle A_1AS = 180^\circ - \beta = \alpha$   
 тогда из ср. пр. получим, что в  $\triangle$   
 $AK$  лежит на  $SAC - CS \angle B_1AS$   
 $\angle BAK = \angle HAS = \frac{180^\circ - 60^\circ}{2} = 60^\circ$   
 см. прод. перп.  $CT$ ?

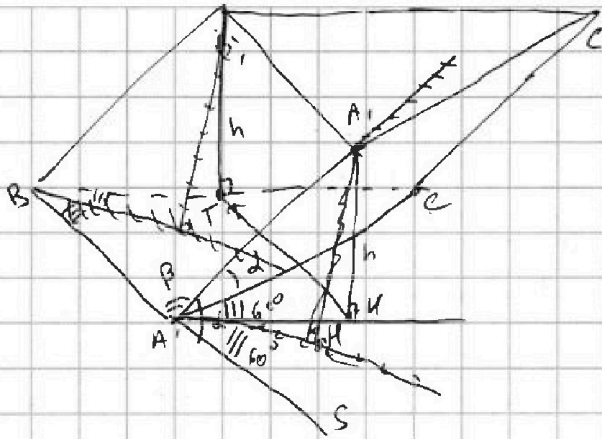


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Построим высоту из  $B_1 \rightarrow B_1T$   
 $B_1T \perp AA_1$

Построим высоту из  $B_1 \rightarrow B_1T$   
 $B_1T \perp AA_1$

Заметим, что  $\angle KAA_1S = \angle CBA_1 = 60^\circ$   
 $AA_1 \perp BC$

$B_1T = AK = h$  - вые. призмы  
 $BB_1 = AA_1 = d$  - грань призмы  
 $\angle B_1TB = \angle A_1KA = 90^\circ$   
 $\Rightarrow \triangle B_1TB = \triangle A_1KA, \Rightarrow$

$\Rightarrow B_1AK = BT$

$\angle BTA_1$

$TK \perp$  плоск.  $A_1B_1C_1$

или  $ABC$   $TK = B_1A_1$  ( $TK \perp B_1A_1, \parallel ABC$ )

$AA_1 = B_1A_1$   
 $AB \parallel B_1A_1$   
( $AD \dots C$ ) - паралл.

$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} TK \parallel B_1A_1 \\ TK = B_1A_1 \end{array} \right\} \Rightarrow ABTK$  - параллелограмм

$\Rightarrow \angle TBA = \angle KAS = 60^\circ \Rightarrow T \in BC$

тогда  $B_1T$  - вые.  $BB_1, CC_1 \Rightarrow S_{BB_1CC_1} = B_1T \cdot BC = 2 \cdot h = 4 \Rightarrow h = 2$

Ответ: высота призмы  $h = 2$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

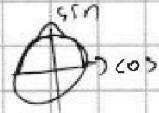


1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$v_1 = v_0 \cdot k^t \quad v_2 = v_1 \cdot k^t \quad ; \quad v_4 = \sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}} \quad ; \quad v_{10} = v_1 \cdot k^9 = x+4$$



$$v_{12} = v_1 \cdot k^{11} = \sqrt{(15x+6)(x-3)^{11}}$$

OD3:

$$\left\{ \begin{aligned} v_{k''} &= \sqrt{(15x+6)(x-3)} \\ v_{k^3} &= \sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}} \\ v_{k^9} &= x+4 \end{aligned} \right. \quad \begin{aligned} // 15x+6 & \quad \frac{15x+6}{(x-3)^3} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{15x+6}{x-3} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x+\frac{2}{5}}{x-3} \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -\frac{2}{5}] \cup (3; +\infty) \\ \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) &= 2\cos\alpha\cos\beta \\ \cos 2\alpha + \cos 2\beta &= 2\cos\alpha\cos\beta \end{aligned}$$

$$\text{тогда: } \frac{v_{k''}}{v_{k^3}} = k^8 = \sqrt{\frac{(15x+6)(x-3)(x-3)^3}{(15x+6)}} = \sqrt{(x-3)^4} = |x-3|$$

$$\left. \begin{aligned} 163 \quad \left. \begin{aligned} x < -\frac{2}{5}, \text{ тогда: } v_{k''} = 0 \\ v_{k^3} = a \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} k=0 \\ v=0 \end{cases}, \text{ но тогда } v_{k^3} = 0, \text{ но } v_{k^9} = x+4 = -\frac{2}{5} \neq 0 \\ \text{т.е. } x + \frac{2}{5} = 9\cos^3\alpha + \frac{10x}{2} - 4\cos^2\alpha \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \text{с) } x > 3, \text{ тогда: } k^8 = x-3 \Rightarrow v_1 \cdot k(x-3) = x+4 \Rightarrow v_1 \cdot k = \frac{x+4}{x-3} \Rightarrow -2\cos^2\alpha - \frac{1}{8} \\ \left. \begin{aligned} k &= \frac{v_{k''}}{v_{k^3}} \\ k &= \frac{v_{k^9}}{v_{k^3}} \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{array}{r} 23 \\ \times 23 \\ \hline 69 \\ +46 \\ \hline 529 \end{array}$$

$$\Rightarrow \text{тогда: } v_{k''} = v_1 \cdot k$$

$$\text{т.е. } v_{k''} = \sqrt{(15x+6)(x-3)} \Rightarrow v_k = \frac{\sqrt{(15x+6)(x-3)}}{(x-3)(\sqrt{x-3})} = \frac{\sqrt{(15x+6)(x-3)}}{(x-3)^2 \sqrt{x-3}}$$

$$v_{k^9} = v_k \cdot k^9 = x+4 = \frac{\sqrt{(15x+6)(x-3)}}{(x-3)^2 \sqrt{x-3}} \cdot (x-3) = \frac{\sqrt{(15x+6)(x-3)}}{(x-3)\sqrt{x-3}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{(15x+6)\sqrt{x-3}} = x+4 \Leftrightarrow \begin{cases} x+4 \geq 0 \\ (15x+6)\sqrt{x-3} = (x+4)^2 \end{cases} \quad (x^2 + 8x + 16)(x^2 + 8x + 16)$$

$$(15x+6)^2(x-3) = (x+4)^4 \Leftrightarrow (225x^2 + 36 + 180x)(x-3) = (x^2 + 8x + 16)^2$$

$$\Leftrightarrow 225x^3 + 36x + 180x^2 - 675x^2 - 108 - 540x = x^4 + 8x^3 + 16x^2 + 8x^3 + 44x^2 + 128x + 16x^2 + 428x + 256$$

$$\sqrt{80} = 2\sqrt{20} = 4\sqrt{5} \quad x^4 - 208x^3 + 591x^2 + 760x + 364 = 0$$

$$\begin{array}{r} 225 \\ -180 \\ \hline 45 \\ +36 \\ \hline 81 \\ +96 \\ \hline 177 \\ +504 \\ \hline 681 \\ +256 \\ \hline 937 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{80} &= \cos 3\alpha + 6\cos\alpha = 3\cos 2\alpha + p \\ = 16.5 & \quad \cos 2\alpha \cos \alpha - \sin 2\alpha \sin \alpha = (2\cos^2\alpha - 1)\cos\alpha - 2\cos\alpha\sin^2\alpha = \\ & \quad \cos 2\alpha \cos \alpha - 2\cos^3\alpha = 2\cos^3\alpha - \cos\alpha - 2 + 2\cos^3\alpha = \\ & \quad 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha + 6\cos\alpha = 6\cos^3\alpha - 3 + p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -2 \pm \sqrt{80} & \quad 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha + 6\cos\alpha = 6\cos^3\alpha - 3 + p \Leftrightarrow \\ & \quad \Leftrightarrow 4\cos^3\alpha - 6\cos^2\alpha + 3\cos\alpha + 3 = p \end{aligned}$$

$$\text{с) } f(t) = 4t^3 - 6t^2 + 3t + 3, \text{ где } t = \cos \alpha \Rightarrow t \in [-1; 1]$$

$$f'(t) = 12t^2 - 12t + 3, \text{ тогда: } f'(t) = 0 \Leftrightarrow 4t^2 - 4t + 1 = 0 \Leftrightarrow (t-1)^2 = 0 \Leftrightarrow t = 1$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{1}{2}, \text{ где } \cos \alpha = \frac{1}{2}$$

$$\begin{array}{c} f(t) \\ \uparrow \quad \uparrow \\ \frac{1}{2} \quad 1 \\ \leftarrow \quad \rightarrow \\ f(t) \end{array}$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

