



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [3 балла] Найдите все действительные значения  $x$ , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её четвёртый член равен  $\sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}}$ , десятый член равен  $x+4$ , а двенадцатый член равен  $\sqrt{(15x+6)(x-3)}$ .

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+7} - \sqrt{5-x-3z} + 6 = 2\sqrt{y-2x-x^2+z}, \\ |y-20| + 2|y-35| = \sqrt{225-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $p$ , при которых уравнение

$$\cos 3x + 6 \cos x = 3 \cos 2x + p$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких  $p$ .

4. [5 баллов] Две окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$  пересекаются в точках  $A$  и  $B$ , а их общая касательная имеет с  $\omega_1$  и  $\omega_2$  общие точки  $C$  и  $D$  соответственно, причём точка  $B$  расположена ближе к прямой  $CD$ , чем точка  $A$ . Луч  $CB$  пересекает  $\omega_2$  в точках  $B$  и  $E$ . Найдите отношение  $ED : CD$ , если диагональ  $AD$  четырёхугольника  $ACDE$  делит отрезок  $CE$  в отношении  $9 : 25$ , считая от вершины  $C$ .

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник  $150 \times 200$ . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел  $(a; b; c)$  такие, что:

- $a > b$ ,
- число  $a - b$  не кратно 3,
- число  $(a - c)(b - c)$  является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство  $a + b^2 = 820$ .

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник со стороной 2. Площади её боковых граней равны 5, 5 и 4. Найдите высоту призмы.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N1 (страница 1 из 2)

$$b_4 = \sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}} = b_1 \cdot q^3$$

$$* \quad x \neq 3$$

$$\frac{15x+6}{(x-3)^3} \geq 0$$

$$(15x+6)(x-3) \geq 0$$

$$b_{10} = x+4 = b_1 \cdot q^9$$

$$b_{12} = \sqrt{(15x+6)(x-3)} = b_1 \cdot q^{11}$$

$$q^8 = \frac{b_{12}}{b_4} = \frac{\sqrt{(15x+6)(x-3)}}{\sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}}} = \sqrt{\frac{(15x+6)(x-3)(x-3)^3}{(15x+6)}}$$

$$= \sqrt{(x-3)^4} = |(x-3)^2| = (x-3)^2$$

$$q^2 = \frac{b_{12}}{b_{10}} = \frac{\sqrt{(15x+6)(x-3)}}{x+4}$$

На  $15x+6$  и числ. и право сократить, ибо если  $15x+6=0$ , то  $b_4=0$   
 $b_{10} \neq 0 = -\frac{6}{15} + 4 \neq 0$ ,  
это неважно

$$q^2 = \frac{\sqrt{(15x+6)(x-3)}}{x+4}$$

$$q^8 = \frac{((15x+6)(x-3))^2}{(x+4)^4}$$

$$\cancel{(x-3)^2} = \frac{(15x+6)^2 \cancel{(x-3)^2}}{(x+4)^4} \quad | : (x-3)^2 \neq 0$$

$$(x+4)^4 = (15x+6)^2$$

$$((x+4)^2)^2 - (15x+6)^2 = 0$$

$$((x+4)^2 - (15x+6))((x+4)^2 + (15x+6)) = 0$$

$$(x^2 + 8x + 16 - 15x - 6)(x^2 + 8x + 16 + 15x + 6) = 0$$

$$(x^2 - 7x + 10)(x^2 + 23x + 22) = 0$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N1 (страница 2 из 2)

$$\begin{cases} x^2 - 7x + 10 = 0 \\ x^2 + 23x + 22 = 0 \end{cases}$$

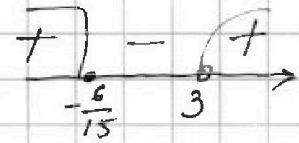
$$\begin{cases} (x-5)(x-2) = 0 \\ (x+22)(x+1) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 5 \\ x = 2 \\ x = -22 \\ x = -1 \end{cases}$$

Осталось учесть, что

$$\frac{15x+6}{(x-3)^3} \geq 0$$

$$(15x+6)(x-3) \geq 0$$



$x = 5$  - подх.  
 $x = 2$  - не подх.  
 $x = -22$  - подх.  
 $x = -1$  - подх.

еще одно замечание:  
 $b_{10} = b_4 \cdot q$  даже если  
 $q < 0$ , то  $q^{10} > 0$ , то есть  
 $b_{10}$  и  $b_4$  - одной знака.  
Но  $b_4 > 0$ , то есть  $b_{10} > 0$ .

Рву  $b_{10} > 0$ , то  $x+4 > 0$ .  $x > -4$

Так отбрасывается  $x = -22$ .

Остаётся  $x = 5$   
 $x = -1$

Ответ:  $\{-1; 5\}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
— ИЗ —

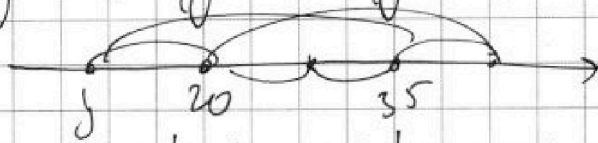
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№2 страница 1 из 2

$$\sqrt{x+7} - \sqrt{5-x} + 6 = 2\sqrt{y-2x-x^2} + z$$

$$\left\{ \begin{array}{l} |y-20| + 2|y-35| = \sqrt{225-z^2} \\ |y-20| + |y-35| + |y-35| = \sqrt{225-z^2} \end{array} \right.$$

$$|y-20| + |y-35| + |y-35| = \sqrt{225-z^2}$$



$$|y-20| + |y-35| \geq 15 \Leftrightarrow |y-20| + 2|y-35| \geq 15$$

$$0 \leq \sqrt{225-z^2} \leq 15$$

Но тогда это возможно только если

$$\left\{ \begin{array}{l} |y-20| + 2|y-35| \geq 15 \quad (1) \\ \sqrt{225-z^2} = 15 \end{array} \right.$$

$$(1) \text{ если } y \leq 20, \text{ то } |y-20| + 2|y-35| > 15$$

$$20 \leq y < 35, \text{ то } |y-20| + |y-35| \geq 15 \text{ и } |y-35| > 0 \text{ и } \geq 15$$

$$y = 35: |y-20| + 2|y-35| = 15$$

$$y > 35: |y-20| + 2|y-35| > 15$$

$y = 35$

$$\sqrt{225-z^2} = 15 \Leftrightarrow z = 0$$

Остаётся найти  $x$ .

$$\sqrt{x+7} - \sqrt{5-x} + 6 = \sqrt{35-2x-x^2}$$

$$(x+7)(5-x) = 5x-x^2 + 35 - 7x = 35 - 2x - x^2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt{x+7} = t \geq 0 \\ \sqrt{5-x} = 2 \geq 0 \end{array} \right.$$

$$t - 2 + 6 = \sqrt{t^2 - 2^2}$$

$$t - 2 + 6 = |t-2|$$

$$t - 2 + 6 - 2 = 0$$

$$t = 2$$

$$t^2 + 2^2 = x+7 + 5-x = 12$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№2 страница 2 из 2

~~$$t - v + 6 = tv$$~~

~~$$t(1-v) = v - 6$$~~

~~$$t = \frac{v-6}{1-v} = -\frac{6-v}{1-v} = -\left(\frac{5}{1-v} + 1\right)$$~~

~~$$\sqrt{x+7} = 1 - \frac{5}{1-\sqrt{5-x}}$$~~

(если  $1 - \sqrt{5-x}$ , то  $x = -6$   $v = 1$ , то  $v-6 \neq 0$ )

~~$$t - v + \frac{t^2 + v^2}{2} = tv \quad | \cdot 2$$~~

~~$$t - 2v + (t-v)^2 = 0$$~~

~~$$(t-v)(t-v+2) = 0$$~~

~~$$\begin{cases} t=v \\ t=v-2 \end{cases}$$~~

~~$$\begin{cases} \sqrt{x+7} = \sqrt{5-x} \\ \sqrt{x+7} = \sqrt{5-x} - 2 \end{cases}$$~~

~~$$\begin{cases} x+7 = 5-x \\ \sqrt{x+7} + 2 = \sqrt{5-x} \end{cases}$$~~

$$\begin{cases} 2x = -2 \\ x+7 + 4\sqrt{x+7} + 4 = 5-x(x) \\ x = -1 \end{cases}$$

$$(2) \quad 2x + 6 = 4\sqrt{x+7}$$

$$x+3 = 2\sqrt{x+7}$$

$$(x+3)^2 = 4(x+7)$$

$$x^2 + 5x + 2 = 0$$

$$D = 25 - 4 \cdot 2 = 25 - 8 = 17$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$x = \frac{-5 + \sqrt{17}}{2}$$

$$\sqrt{17} > \sqrt{16}$$

$$+ \sqrt{7} \quad \frac{-5 + \sqrt{17}}{2} > \frac{-5 + \sqrt{16}}{2} > -3$$

$$\frac{-5 - \sqrt{17}}{2} < -6$$

Ответ:  $\left\{ (-1; 35; 0); \left( \frac{-5 + \sqrt{17}}{2}; 35; 0 \right) \right\}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

При  $p \in [-10; 4]$ :





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N3

$$\cos 3x + 6 \cos x = 3 \cos 2x + p$$

$$\cos 3x - 3 \cos 2x + 6 \cos x = p$$

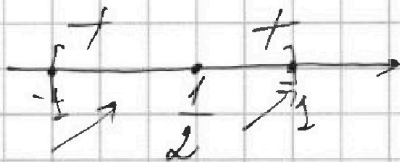
$$4 \cos^3 x - 3 \cos x - 3(2 \cos^2 x - 1) + 6 \cos x = p$$

$$4 \cos^3 x - 6 \cos^2 x + 3 \cos x + 3 = p$$

Рассмотрим функцию  $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 3x + 3$   
и исследуем её на  $[-1; 1]$

$$f'(x) = 12x^2 - 12x + 3 = 3(4x^2 - 4x + 1) = 3(2x - 1)^2$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3(2x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow (2x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$



$$f(-1) = 4 \cdot (-1)^3 - 6 \cdot (-1)^2 + 3 \cdot (-1) + 3 = -4 - 6 - 3 + 3 = -10$$

$$f(1) = 4 - 6 + 3 + 3 = 4.$$

Стало быть, при любом  $p \in [-10; 4]$

$f(x) = p$  имеет  $\neq$  решение, при  $x \in [-1; 1]$

А теперь  $f(\cos x) = p$ . Поскольку  $\cos x \in [-1; 1]$ ,  
то и ур-ие  $f(\cos x) = p$  имеет хотя бы 1 решение,  
при любом  $p \in [-10; 4]$

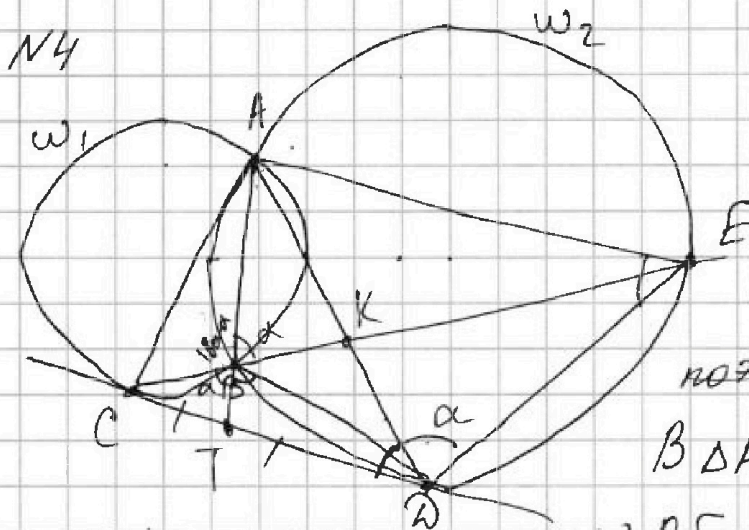


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\angle AED = \angle ADC$$

$$\parallel \frac{\sphericalangle AD}{2} \quad \parallel \frac{\sphericalangle AD}{2}$$

ABDE - вписанный,  
поэтому

в  $\triangle ABE$   $\sphericalangle CBA$  - внешний

$$\sphericalangle CBA = \sphericalangle BAE + \sphericalangle AEB = \frac{\sphericalangle BE}{2} + \frac{\sphericalangle AB}{2} = \frac{\sphericalangle AE}{2}$$

( $\sphericalangle AE \ni D$ )

Но тогда  $\sphericalangle CBA = \frac{\sphericalangle AE}{2} + \sphericalangle ADE = \frac{\sphericalangle AE}{2} + \frac{\sphericalangle AE}{2} = 180^\circ$

$\sphericalangle AB \sphericalangle CD = T$ ,  $\sphericalangle AD \sphericalangle CE = K$ .

$\sphericalangle TBD = \sphericalangle AED$ , т.к. ABDE - вписанный

$$\left. \begin{aligned} TC^2 &= TB \cdot TA \\ TD^2 &= TB \cdot TA \end{aligned} \right\} TC = TD$$



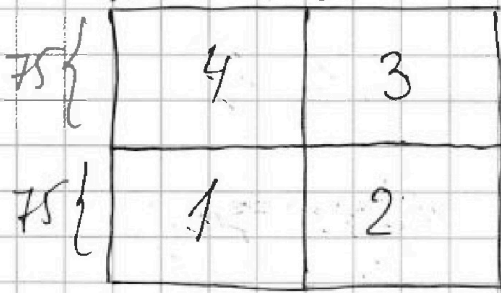


1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

NS (сторона 1 и 2)  
100 100



Разобьем прямоугольник средними линиями на 4 прямоугольника, как на рисунке.

Вместо того, чтобы закрашивать в ~~клетки~~, закрасим 4, а дальше

придем к нужной симметрии.

Случай 1: все 4 закрашенные клетки - в одном прямоугольнике (дане 2 который  $75 \times 100$ )

и выбрать их  $C_{750}^4$ . Далее есть 3 варианта, как их отразить: относительно вертик. ср. линии, горизонт. и отн. центра. То есть,  $3 \cdot C_{750}^4$

Случай 2: Замечание: эти 4 клетки мы выбираем в 1-ом ~~прямоугольнике~~. Поскольку нас интересуют симметр. расклады, то выбирать 4 клетки в 3 и 4 бессмысленно, ибо они углены в 1 и 2.

Аналогично для прямоугольника 2: тоже  $3 \cdot C_{750}^4$ , только нужно выгесить случай отражения в 1-ый. то есть,  $2 \cdot C_{750}^4$ . Итого, для 1-го случая:  $6 \cdot C_{750}^4$  \*

Случай 2: 2.1) в 1-ом - 3, во 2-ом - 1. Тогда возможны только симм. от гор. и центра. Способов выбрать 4 клетки так:  $C_{750}^3 \cdot C_{750}^1$  2 симметрии  $\rightarrow 2 \cdot C_{750}^3 \cdot C_{750}^1$

Аналогично во 1-ом - 1, во 2-ом - 3. Получаем те же  $2 \cdot C_{750}^3 \cdot C_{750}^1$ . Итого, суммарно -  $4 \cdot C_{750}^3 \cdot C_{750}^1$

2.2) в 1-ом и 2-ом по 2 клетки. Способов их так выбрать:  $C_{750}^2 \cdot C_{750}^2$ . И можно отразить 2-мя способами.

НО! При определенном раскладе эти симметрии могут совпасть когда 4 точки получатся симметричными. Таких случаев в  $C_{750}^2$  Выгтем их и получим  $(C_{750}^2 \cdot C_{750}^2 - C_{750}^2) \cdot 2 + C_{750}^2$

\* + если все 4 точки - в 4-ом и симметрим в 3.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА \_\_\_\_\_ ИЗ \_\_\_\_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N5 (страница 2 из 2)

Итого: 1) все 4 клетки в одном-прямоуг.:  $6 \cdot C_{7500}^4$

- 2) 1) 1 клетка в 1-ом, 3-во 2-ом:  $2 \cdot C_{7500}^3 \cdot C_{7500}^1$
- 2) 3 клетки в 1-ом, 1-во 2-ом:  $2 \cdot C_{7500}^3 \cdot C_{7500}^1$
- 3) 1 клетка в 1-ом, 3-во 4-ом:  $2 \cdot C_{7500}^3 \cdot C_{7500}^1$
- 4) 3 клетки в 1-ом, 1-во 4-ом:  $2 \cdot C_{7500}^3 \cdot C_{7500}^1$

но надо понимать, что при центр. симм в сл. 3) 4) мы углы лишние, углы в сл. 1) 4) Итого, для 2)  $6 \cdot C_{7500}^3 \cdot C_{7500}^1$

3) 1) 2 в 1-ом, 2-во 2-ом:  $(C_{7500}^2 \cdot C_{7500}^2 - C_{7500}^2) \cdot 2 + C_{7500}^2$

2) 2 в 1-ом, 2-во 4-ом  $(C_{7500}^2 \cdot C_{7500}^2 - C_{7500}^2) \cdot 2$   
 (аналогично, как в 1), только слугаб полной симметрии уже не учитываем).

Итого:  $6 \cdot C_{7500}^4 + 6 \cdot C_{7500}^3 \cdot C_{7500}^1 + 4 \cdot (C_{7500}^2)^2 - 3C_{7500}^2$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N 6

$$a - b \equiv 1 \pmod{3}:$$

$$(a - c)(b - c) = ab - ac - bc - c^2 =$$

$$= ab - c^2 - c(a + b)$$

Если  $a < c$   $a > b$ , то  $a - c > b - c$ .

Следовательно  $(a - c)$  и  $(b - c)$  — 2 разных числа. Но тогда, чтобы это был квадрат простого,

надо, чтобы один из них был квадратом простого, а другой — 1.

$$\boxed{a - c = 1; b - c = p^2}$$

$$a - c - (b - c) = 1 - p^2$$

$$a - b = 1 - p^2 < 0. \text{ противоречие.}$$

$$\boxed{b - c = 1; a - c = p^2}$$

$$b \mid p^2 - 1 \equiv 1 \pmod{3}$$

$$p^2 - 1 \equiv 2 \pmod{3}$$

$$p^2 = 3 \cdot (k + 1) \Rightarrow k = 2.$$

$$p = 3 \quad \begin{cases} b - c = 1 \\ a - c = 9 \end{cases}$$

$$k = a = 1 \quad a - b = 8$$

$$\begin{cases} a + b^2 = 820 \dots \end{cases}$$

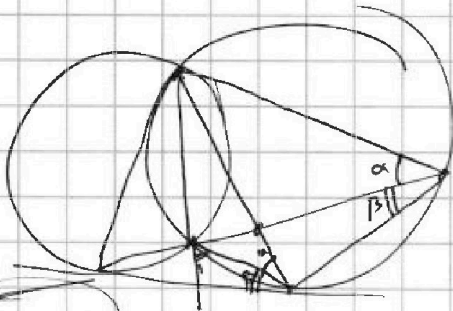


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

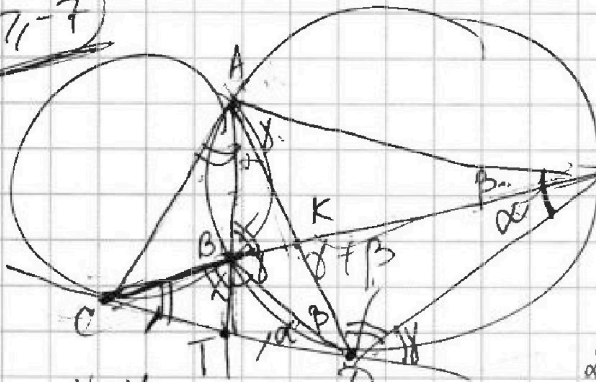
1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

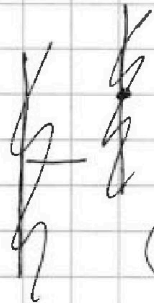
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$x+y=7$



$x+y+5-x = 3z = -3z+5$



$-15 \leq z \leq 15$

$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 180^\circ$

$BK \cdot KE = AK \cdot KA$

$C^2 = TB \cdot TA$   
 $(\frac{2AC}{y})^2 = CB \cdot CE$

$2\sqrt{y+z-1} - (x-1)^2$

$\sqrt{x+y} \Rightarrow \sqrt{5-x-3z} + 6 = 2\sqrt{y-2x-x^2+2}$

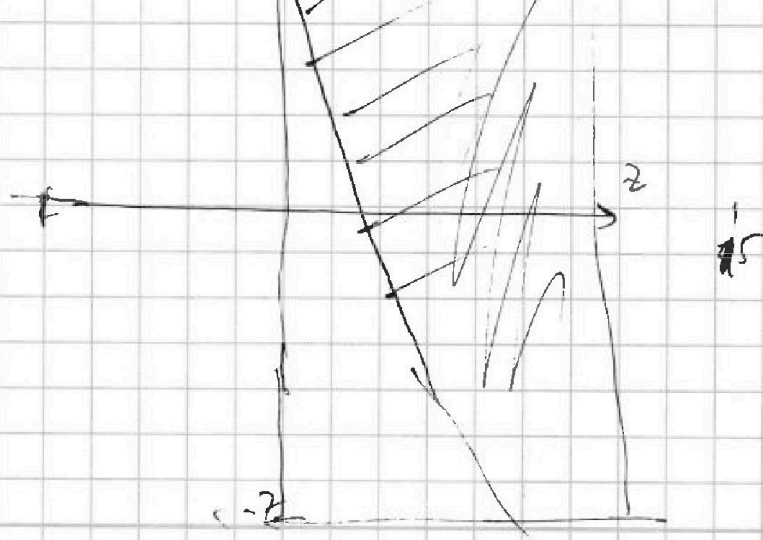
$|y-20| + 2|y-35| = \sqrt{225-z^2}$

$x+y=7$   
 $-15 \leq z \leq 15$

$5-x-3z \geq 0$   
 $x = 5-3z$

$\frac{CB \cdot CE}{TB \cdot TA} = 4$

$\frac{CB}{TB} = 4 \frac{TA}{CE}$







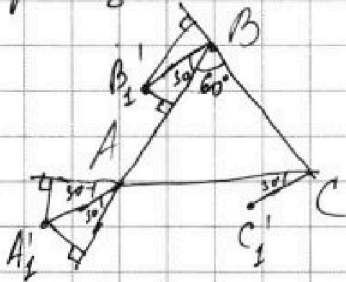
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА \_\_\_\_\_ ИЗ \_\_\_\_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N 7  
страница 2



$$h_{AA_1, C_1, C} = h_{AA_1, B_1, B} = \frac{5}{2} = 2,5 = \sqrt{h_{\text{прямая}}^2 + \rho^2(A_1; AC)}$$

$$h_{CC_1, B_1, B} = \frac{4}{2} = 2 = \sqrt{h_{\text{прямая}}^2 + \rho^2(B_1; BC)}$$

Заметим что  $BB_1 \perp BC$ . Стало бы  $BB_1$ ,  
то  $\rho(B_1; BC) = BB_1$ .

$AA_1 = BB_1$  как проекции равных отрезков.

Тогда  $\rho(A_1; AB) = \frac{1}{2} AA_1 = \frac{1}{2} BB_1$ .

$$\begin{cases} 6,25 = h_{\text{прямая}}^2 + \rho^2(A_1; AB) = h_{\text{прямая}}^2 + \frac{1}{4} (BB_1)^2 \\ 4 = h_{\text{прямая}}^2 + (BB_1)^2 \end{cases}$$

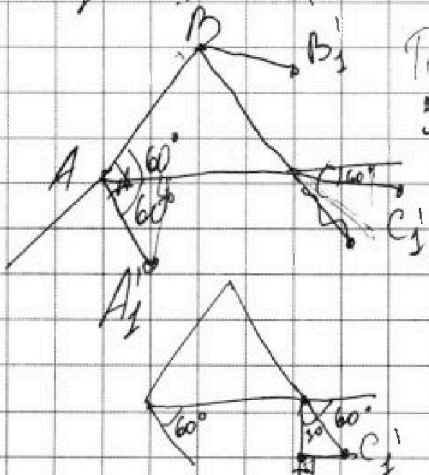
$$2,25 =$$

по т. о трех перп.  $BB_1 \perp BC$

~~$\rho(BB_1; AB) \parallel AA_1$~~   ~~$\rho(BB_1; BC) \perp BC$~~  а  ~~$BB_1, C_1, C$~~  - прямые.

Тогда  $BB_1 \cdot BC = 4 \Rightarrow BB_1 = 2$ . Но тогда  $B$   
 $AA_1, B_1, B$  высота равна стороне, что невозможно. Значит,

$A_1$  лежит на биссектрисе внешнего угла  $A_1, C, BAC$ .



Тогда  $BB_1$  не  $\perp BC$ ...

это  $AA_1 \perp AB$  —  $BB_1 \parallel AA_1$  и  $CC_1 \parallel AA_1$

и все, наконец, мы можем

сказать, что

$$h_{AA_1, C_1, C}^2 = h_{\text{прямая}}^2 + \left( AA_1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2$$

$$h_{BB_1, C_1, C}^2 = h_{\text{прямая}}^2 + \left( CC_1 \cdot \frac{1}{2} \right)^2$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N7 страница 3.

$$\begin{cases} 6,25 = h_{\text{прям}}^2 + (AA_1')^2 \cdot \frac{3}{4} \\ 4 = h_{\text{прям}}^2 + (AA_1')^2 \cdot \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$2,25 = \frac{1}{2} AA_1'^2$$

$$AA_1'^2 = 4,5$$

$$h_{\text{прям}}^2 = 6,25 - \frac{4,5 \cdot 3}{4} = \frac{6,25 \cdot 4 - 13,5}{4} =$$

$$= \frac{25 - 13,5}{4} = \frac{11,5}{4}$$

$$h = \sqrt{\frac{11,5}{4}} = \frac{\sqrt{11,5}}{2}$$

Ответ:  $\frac{\sqrt{11,5}}{2}$

$(CC_1' = AA_1')$  как проекции  
равных  
отрезков)

$$\begin{array}{r} 1 \\ 4,5 \\ \times 3 \\ \hline 13,5 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 135 \cancel{14} \\ - 12 \cancel{14} 3 \\ \hline 15 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 15 \\ \times 6,25 \\ \hline 4 \end{array}$$

$$(6 + 0,25) \cdot 4 = 25$$

$$= 4 + 1 = 25$$



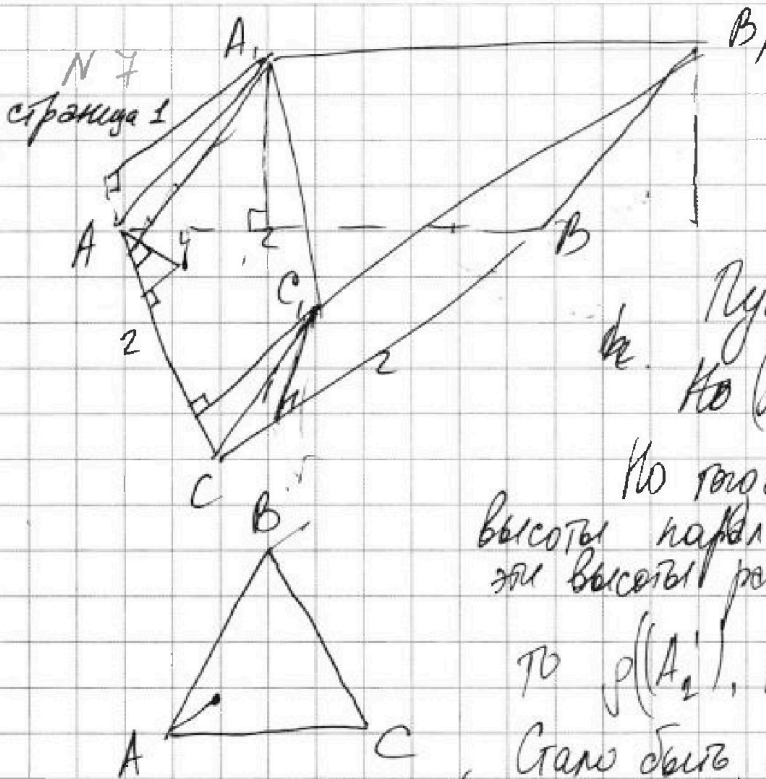


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$S_{AA_1C_1C} = S_{AA_1B_1B} = 5$$

$$S_{CC_1B_1B} = 4$$

Пусть высота призмы -  $h$   
 $h \perp (A_1C_1)$   
 $h \perp (A_1B_1)$   
 $h \perp (A_1C_1)$

Но тогда, поскольку  $S_{AA_1C_1C} = S_{AA_1B_1B}$ ,  
 высоты параллелограммов равны, а  
 эти высоты равны  $\sqrt{h^2 + \rho^2(A_1', AB)}$   
 $\sqrt{h^2 + \rho^2(A_1', AC)}$ ,  
 то  $\rho(A_1', AB) = \rho(A_1', AC)$ .

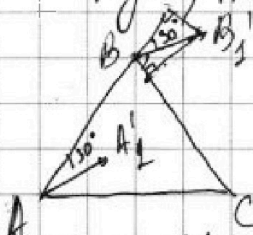
Стало быть,  $A_1'$  лежит на прямой,  
 содержащей биссектрису  $\angle BAC$ !

Но тогда  $AA_1$  лежит в плоскости  $\alpha$ , тогда, это  
 $\alpha$  содержит бисс.  $\angle A$  и  $\alpha \perp ABC$ .

$$CC_1 \parallel AA_1, BB_1 \parallel AA_1, \dots \Rightarrow B_1' = \text{Пр}_{ABC}(B_1)$$

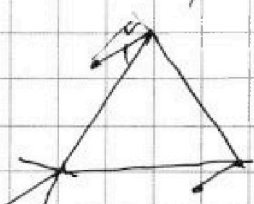
$$C_1' = \text{Пр}_{ABC}(C_1)$$

Пусть нуо  $A_1'$  лежит внутри  $\triangle ABC$ . Тогда



Высота паралл.  $AA_1C_1C, BB_1B_1B \leq$  высоты  $AA_1, B_1B$ ,  
 стало быть, расстояние от  $B_1'$  до  $BC <$   
 расстояние от  $B_1'$  до  $AB$ .

Если  $A_1'$  - внутри  $\triangle ABC$ , то  $\rho(B_1', AB) = \frac{BB_1'}{2}$  противоречие  
 $\rho(B_1', BC) = \frac{\sqrt{3}}{2} BB_1'$   
 Значит,  $A_1'$  вне  $\triangle ABC$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$q^8 = (x-3)^2$   
 $\frac{b_{12}}{b_{10}} = (q^2)^4$   
 $\frac{\sqrt{(15x+6)(x-3)}}{x+4} = \frac{(15x+6)(x-3)^2}{(x+4)^4}$

$\cos 3x = \cos(2x+x) = \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x = (2\cos^2 x - 1)\cos x - 2\sin x \cos x = 2\cos^3 x - \cos x - 2(1-\cos^2 x)\cos x = 2\cos^3 x - \cos x - 2\cos x + 2\cos^3 x = 4\cos^3 x - 3\cos x$

$(x-3)^2 = \frac{(15x+6)(x-3)^2}{(x+4)^4}$   
 $x=3$   
 $(x+4)^4 = 15x+6$   
 $\frac{b_{12}}{b_4} = \frac{\sqrt{(15x+6)(x-3)}}{\sqrt{(15x+6)(x-3)^3}} = \sqrt{\frac{(15x+6)(x-3) \cdot (x-3)^3}{(15x+6)^2}}$   
 $= \sqrt{(x-3)^4} = (x-3)^2 = q^8$   
 $\frac{b_{12}}{b_{10}} = \frac{\sqrt{(15x+6)(x-3)}}{x+4} = q^2$   
 $\frac{(15x+6)^2(x-3)^2}{(x+4)^4} = q^8$   
 $(x-3)^2 = \frac{(15x+6)^2(x-3)^2}{(x+4)^4}$   
 $(x+4)^4 = (15x+6)$   
 $((x+4)^2 - (15x+6))(x+4)^2 + (15x+6) = 0$   
 $15x = -6$   
 $x = -\frac{6}{15}$

$4x^3 - 6x^2 + 3x + 3 = p$   
 $4x^3 - 4x^2 + x + 2x^2 - 2x + 12 = p$   
 $x(2x-1)^2 - 2(x^2 - x - 1) = p$   
 $-1 \leq \leq 1$

$4\cos^3 x + 3\cos x = 6\cos^3 x - 3 + p$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

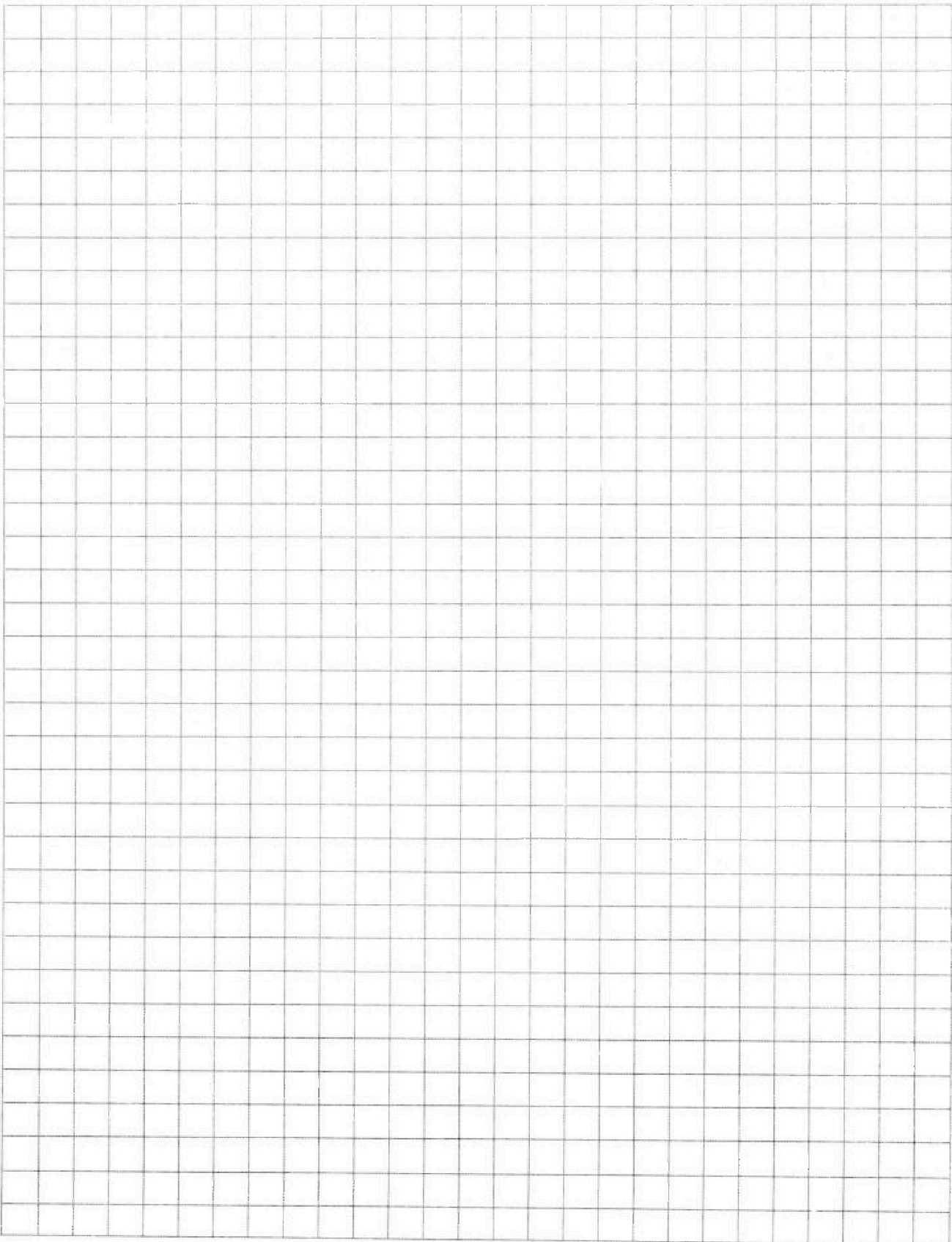
5

6

7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!







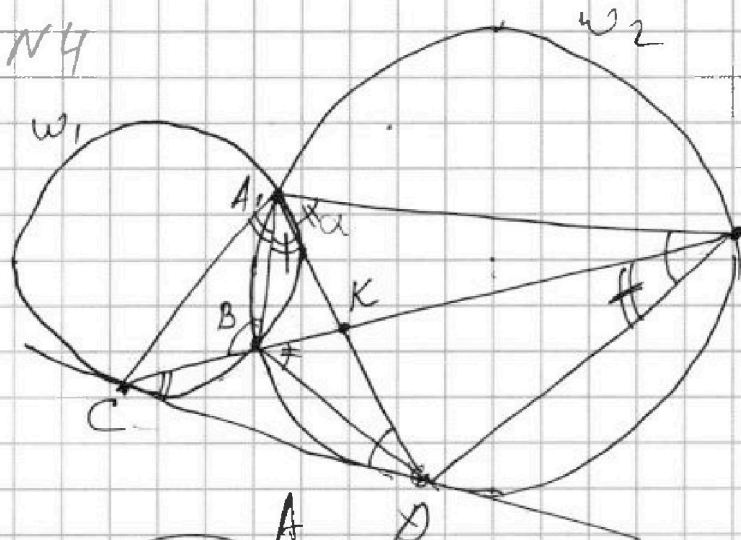


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\angle AED = \angle ADC$$

$$E \frac{ED}{\sin \alpha} = 2R_{\omega_2}$$

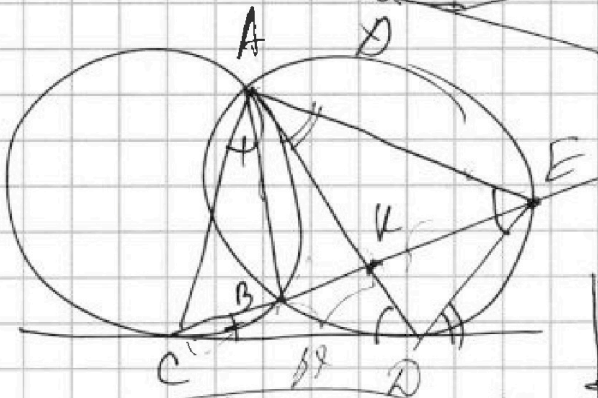
$$CD^2 = CB \cdot CE$$

$$\] CE = 34x$$

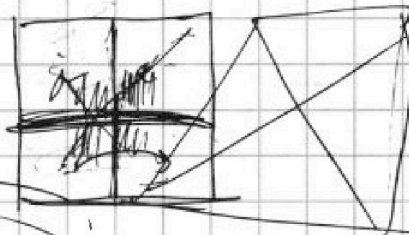
$$CK = 9x$$

$$KE = 25x$$

$$AK \cdot KD = BK \cdot KE$$



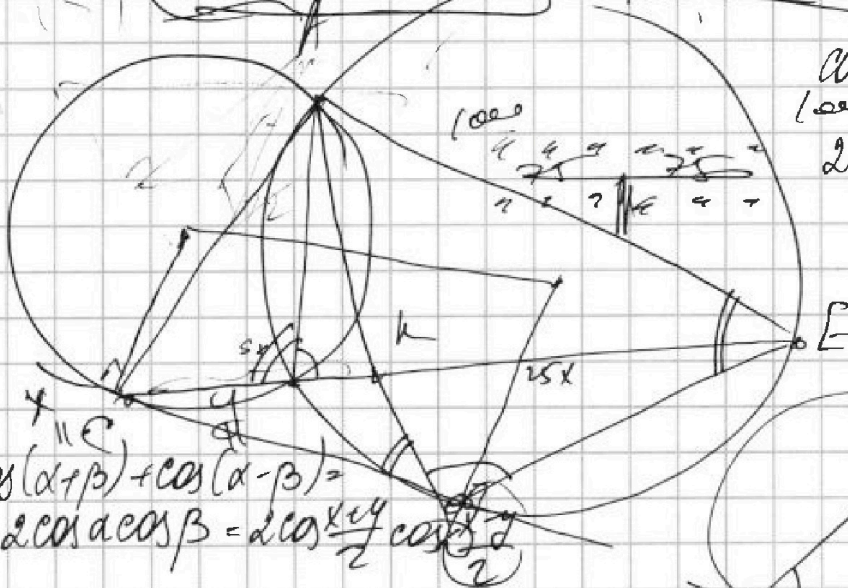
$$\cos 3x = \cos 2x \cos x + \sin 2x \sin x$$



$$\cos 3x + \cos x = 2 \cos 2x \cos x$$

$$2 \cos 2x \cos x + \cos x =$$

$$= 3 \cos 2x + \cos x$$



$$\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) =$$

$$= 2 \cos \alpha \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

