



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



6. 1. [3 балла] Найдите все действительные значения  $x$ , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её седьмой член равен

$$\sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}, \text{ тринадцатый член равен } 5-x, \text{ а пятнадцатый член равен } \sqrt{(13x-35)(x+1)}.$$

- [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+3} - \sqrt{4-x-z} + 5 = 2\sqrt{y+x-x^2+z}, \\ |y+1| + 3|y-12| = \sqrt{169-z^2}. \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} \sqrt{2} \\ \times 47 \\ \hline 44 \\ + 329 \\ \hline 188 \\ \hline 2209 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2x^2 + 11x + 12 \\ \hline \times 23 \\ \hline 23 \\ + 69 \\ \hline 46 \\ \hline 529 \\ \hline \times 21 \\ \hline 21 \\ \hline 21 \\ + 96 \\ \hline 42 \\ \hline 441 - 576 \end{array}$$

$561 = 441 + 121$

- [5 баллов] Найдите все значения параметра  $p$ , при которых уравнение  $\cos 3x + 3 \cos 2x + 6 \cos x = p$  имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких  $p$ .

$$\cos 3x + 3 \cos 2x + 6 \cos x = p \quad 576 - 561 = 15$$

4. [5 баллов] Две окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$  пересекаются в точках  $A$  и  $B$ , а их общая касательная имеет с  $\omega_1$  и  $\omega_2$  общие точки  $C$  и  $D$  соответственно, причём точка  $B$  расположена ближе к прямой  $CD$ , чем точка  $A$ . Луч  $CB$  пересекает  $\omega_2$  в точках  $B$  и  $E$ . Найдите отношение  $ED : CD$ , если диагональ  $AD$  четырёхугольника  $ACDE$  делит отрезок  $CE$  в отношении  $3 : 10$ , считая от вершины  $C$ .

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник  $200 \times 250$ . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел  $(a; b; c)$  такие, что:
- $a > b$ ,
  - число  $a - b$  не кратно 3,
  - число  $(a - c)(b - c)$  является квадратом некоторого простого числа,
  - выполняется равенство  $a + b^2 = 560$ .

$$\sqrt[3]{3} - \frac{1}{2} \quad 552 = 246 \cdot 2 = 2^2 \cdot 223$$

$$\frac{2208}{16} + \frac{6}{16} + \frac{3}{4} - 3 = 0$$

$$\frac{9+12}{16} = \frac{4}{8} + \frac{6}{4} + \frac{3}{2} = 9$$

$$\frac{2+6+6}{4} = \frac{14}{4} = 3.5$$

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник со стороной 1. Площади её боковых граней равны 4, 4 и 3. Найдите высоту призмы.

$$\frac{12}{3}$$

$$\frac{4 \cdot 3^3}{4^3} + \frac{6 \cdot 2^2}{4^2} + 3 \cdot \frac{3}{4} = 0$$

$$\frac{-28}{16} + \frac{52}{16} - \frac{9}{4} = 0$$

$$52 + 27 + 36 = 115$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$5-x = \sqrt{\frac{14x-35}{(x+1)^2}} \cdot \sqrt{(x-1)^3} \quad (1)$$

$$5-x = \sqrt{35-14x} \quad (2) \quad x^2 - 10x + 25 - 35 + 14x = 0 \quad (3)$$

$$x^2 + 4x - 10 = 0 \quad (4) \quad (x+5)(x-2) = 0 \quad (5) \quad \begin{cases} x = -5 \\ x = 2 \end{cases}$$

~~45~~ ~~14x~~  $x < -1 \Rightarrow x = 2$  - не решение.

Ответ:  $\{-5; 3\}$ .



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\{a_n\}$  - геом. прогрессия.  $a_4 = \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}$ ;  $a_{13} = 5-x$ , ограничимся:  $x \neq -1$

$$a_{15} = \sqrt{(13x-35)(x+1)}$$

$\{q\}$  - ариф. прогрессия, тогда  $a_{15} = a_4 \cdot q^8$

$$\sqrt{(13x-35)(x+1)} = \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}} \cdot q^8$$

(13x-35)(x+1) > 0

$\begin{cases} 13x-35=0 \text{ (1)}; \Rightarrow x = \frac{35}{13} \Rightarrow a_4 = a_{15} = 0 \Rightarrow a_{13} = a_4 \cdot q^6 = 0, \\ \text{но } a_{13} = 5 - \frac{35}{13} \neq 0 \Rightarrow 13x-35 \neq 0. \end{cases}$

$a_{13} \neq 0$  (2)  $13x-35 > 0$  и  $x+1 > 0$ , тогда делим обе части на  $\sqrt{13x-35} \neq 0$

и получаем:  $\sqrt{x+1} = \frac{1}{\sqrt{(x+1)^3}} \cdot q^8 \Rightarrow q^8 = \sqrt{(x+1)^4} \Rightarrow q^8 = (x+1)^2$

$q = \pm \sqrt[4]{(x+1)^2} \Rightarrow q = \pm \sqrt[4]{x+1}$   $\pm \frac{6}{2} = \pm \frac{3}{2}$

$a_{13} = a_4 \cdot q^6 \Rightarrow 5-x = \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}} \cdot (\sqrt[4]{x+1})^6 \Rightarrow$

$5-x = \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}} \cdot \sqrt{(x+1)^3} \Rightarrow 5-x = \sqrt{13x-35}$  (6)

~~$x^2 - 10x + 25 - 13x + 35 = 0 \Rightarrow x^2 - 23x + 60 = 0 \Rightarrow$~~

~~$(x-20)(x-3) = 0 \Rightarrow (x-20)(x-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=20 - \text{не подходит. т.к. } 5-x > 0 \\ x=3. \end{cases}$~~

$x=3: 13 \cdot 3 - 35 = 39 - 35 > 0. \Rightarrow x=3$  - решение.

(3);  $13x-35 < 0 \Rightarrow x+1 < 0$  делим обе части на  $\sqrt{35-13x} \neq 0$ .

$\sqrt{-x-1} = \frac{1}{\sqrt{(x+1)^3}} \cdot q^8 \Rightarrow q^8 = \sqrt{(-x-1)^4} \Rightarrow q^8 = (x+1)^2$

$q = \pm \sqrt[4]{-x-1}$   $\pm \frac{6}{2} = \pm \frac{3}{2}$

$a_{13} = a_4 \cdot q^6 \Rightarrow 5-x = \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}} \cdot (\sqrt[4]{-x-1})^6$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \sqrt{x+3} - \sqrt{4-x-z} + 5 = 2\sqrt{x+y-x^2+z} & (1) \\ |y+1| + 3|y-12| = \sqrt{169-z^2} & (2) \end{cases}$$

ура

Решение:

$$x \geq -3$$

$$4-x-z \geq 0$$

$$x+y-x^2+z \geq 0$$

$$(2) \quad |y+1| + |y-12| + |y+12| + |y-12| \geq |y+1+y-12-y+12-y+12|$$

11  
13

$$z^2 \leq 169$$

$$|z| \leq 13$$

левая часть больше или равна 13, правая часть меньше или

равна 13, т.к.  $z^2 \geq 0 \Rightarrow$  равенство достигается только тогда,

когда обе части равны 13  $\Rightarrow$

$$\sqrt{169-z^2} = 13 \Rightarrow z = 0$$

$$\begin{aligned} 13 - 36 + 13 &= -2z \\ -13 &= -2z \Rightarrow \frac{13}{2} = z \end{aligned}$$

$$|y+1| + 3|y-12| = 13 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 4y+1-36=13 \\ y \geq 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 12 \\ y \geq 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y+1-3y+36=13 \\ -1 \leq y \leq 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 12 \\ y \leq 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -y-1-3y+36=13 \\ y \leq -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{22}{4} \\ y \leq -1 \end{cases}$$

$y = 12$ ;  $z = 0$  - решаем (2), подставляем их в (1):

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} + 5 = 2\sqrt{x+12-x^2} \quad (3)$$

Решение:

$$x \geq -3$$

$$x \leq 4$$

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} + 5 = 2\sqrt{(x+3)(4-x)} \quad (4)$$

$$\sqrt{x+3} + 4 - x - 2\sqrt{x+3}$$

$$\sqrt{(x+3)(4-x)} = t$$

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} = 2\sqrt{(x+3)(4-x)} - 5 \quad (5)$$

$$x+3+4-x - 2\sqrt{(x+3)(4-x)} = 4(x+3)(4-x) + 25 - 20\sqrt{(x+3)(4-x)}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$7 - 2t = 4t^2 + 25 - 20t \Leftrightarrow 4t^2 - 18t + 18 = 0 \Leftrightarrow$$

~~$$(t-9)(4t-2) \neq 0$$~~
~~$$(4t-9)(t-2) \neq 0$$~~

$$2t^2 - 9t + 9 = 0 \Leftrightarrow$$

$$t = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 8 \cdot 9}}{4} \Leftrightarrow t = \frac{9 \pm 3}{4}$$

~~$$4t - 9 = 18 \Rightarrow t = 10$$~~
~~$$30 = 18$$~~

$$\begin{cases} t = \frac{6}{4} \\ t = 3 \end{cases}$$

одн. замена:  $\begin{cases} \sqrt{(x+3)(4-x)} = 3 \\ \sqrt{(x+3)(4-x)} = \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow$

$$\begin{cases} -x^2 + x + 12 = 9 \\ -x^2 + x + 12 = \frac{9}{4} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x^2 - x - 3 = 0 \\ 4x^2 - 4x - 48 + 9 = 0 \Leftrightarrow 4x^2 - 4x - 39 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2} \\ x = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 16 \cdot 39}}{8} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2} \\ x = \frac{1 \pm \sqrt{40}}{2} \end{cases}$$

по заданию  $-3 \leq x \leq 4$

$$x = \frac{1}{2} + \sqrt{10} < \frac{1}{2} + \sqrt{13,25} = 4 \quad (V)$$

$$x = \frac{1 + \sqrt{13}}{2} - \text{дел. отриц.}, \text{ т.к. } \text{меньше критического и больше крит.}$$

$$x = \frac{1 - \sqrt{10}}{2} - \sqrt{10} > \frac{1}{2} - \sqrt{13,25} = -3 \quad (V)$$

~~$$x = \frac{1 - \sqrt{13}}{2} > \frac{1}{2} - \sqrt{10} - \text{дел. отриц.}$$~~

Ответ:  $\left(\frac{1 + \sqrt{13}}{2}; 12; 0\right); \left(\frac{1 - \sqrt{13}}{2}; 12; 0\right); \left(\frac{1 + \sqrt{40}}{2}; 12; 0\right); \left(\frac{1 - \sqrt{40}}{2}; 12; 0\right)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$4\left(t + \frac{1}{2}\right)^3 - p - 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left(t + \frac{1}{2}\right)^3 = \frac{p+2}{4} \Leftrightarrow t = \sqrt[3]{\frac{p+2}{4}} - \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\cos x = \sqrt[3]{\frac{p+2}{4}} - \frac{1}{2}$$

$$4\left(t + \frac{1}{2}\right)^3 - p - 3,5 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left(t + \frac{1}{2}\right)^3 = \frac{p+3,5}{4} \Leftrightarrow t = \sqrt[3]{\frac{p+3,5}{4}} - \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\cos x = \sqrt[3]{\frac{p+3,5}{4}} - \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm \arccos \sqrt[3]{\frac{p+3,5}{4}} - \frac{1}{2} + 2\pi k$$

$$\text{Ответ: } x = \pm \arccos \sqrt[3]{\frac{p+3,5}{4}} - \frac{1}{2} + 2\pi k, p \in (-4, 10);$$

$$x = \pi + 2\pi k, p = -4; \quad x = 2\pi k, p = 10.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\cos 3x + 3\cos 2x + 6\cos x = p \text{ - разрешимо.}$$

$$4\cos^3 x + 6\cos^2 x + 6\cos x - 3\cos x - 3 - p = 0 \Leftrightarrow$$

$$4\cos^3 x + 6\cos^2 x + 3\cos x - 3 - p = 0 \quad 3\cos x$$

$$4t^3 + 6t^2 + 3t - 3 - p = f(t) \quad -|t| \leq 1$$

$$f'(t) = 12t^2 + 12t + 3$$

$$12t^2 + 12t + 3 = 0 \Leftrightarrow \left(t + \frac{1}{2}\right)^2 = 0 \Rightarrow f'(t) \geq 0 \Rightarrow$$

$f(t) \nearrow \Rightarrow$  по т. о край. значений макс, где максимум  $f(t)$  - непрерывная.

Крайней непрерывно и равномерно, чтобы  $f(-1) \leq 0$  и

$$f(1) \geq 0, \text{ т.к. } f(t) \nearrow \text{ монотонно и непрерывно. } \Rightarrow$$

$$f(-1) \leq 0 \Leftrightarrow -4 + 6 - 3 - 3 - p \leq 0 \Leftrightarrow p \geq -4$$

$$f(1) \geq 0 \Leftrightarrow 4 + 6 + 3 - 3 - p \geq 0 \Leftrightarrow p \leq 10.$$

$$\begin{cases} p \geq -4 \\ p \leq 10 \end{cases} \Rightarrow \text{ при } p \in [-4; 10] \text{ - ур-е разрешимо.}$$

решим экв., что при  $p = -4$   $t = -1$  - корень  $p = 10$   $t = 1$  - корень  $\Rightarrow$

$$\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}, p = -4$$

$$\cos x = 1 \Leftrightarrow x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, p = 10.$$

при  $p \in (-4; 10)$ ; - если решение имеет. т.к.  $f(t) \nearrow$

можно решить на  $(t+1)^3 + 1$

$$4t^3 + 6t^2 + 3t - 3 - p = 0$$

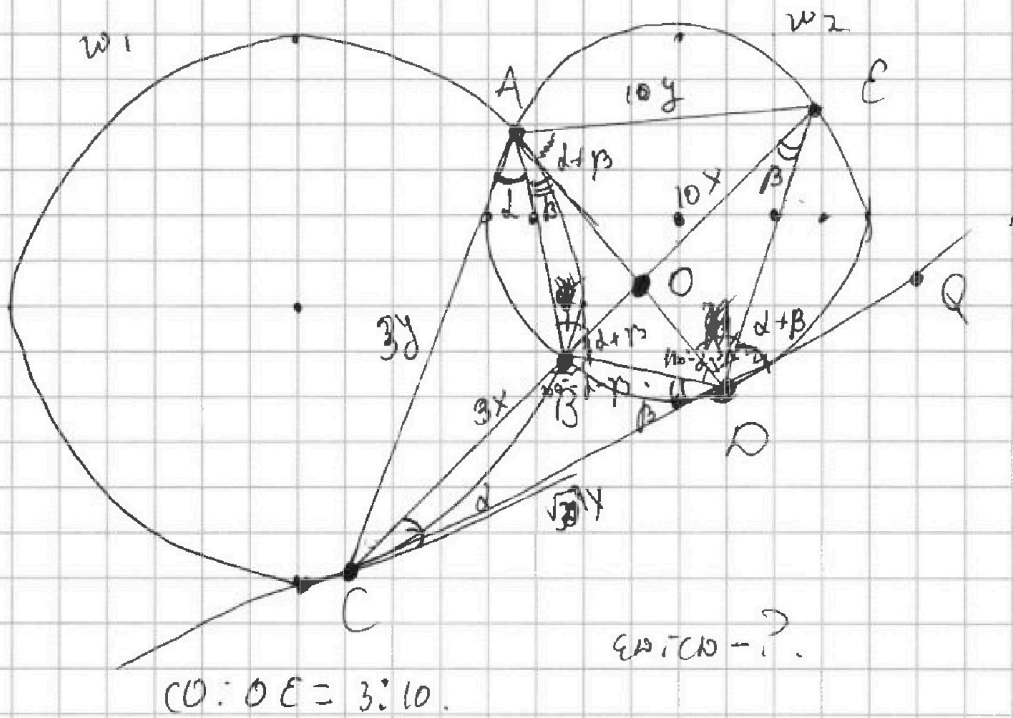


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



1)  $\angle OCB = \angle OAB = \alpha$  — углы между хордой и кас.

$\angle COB = \angle MAO = \angle BEO = \beta$  — как углы между хордой и касательной.

$\triangle CBO \sim \triangle OCE$  по 3-м углам.

$\angle CBO = \angle OCE = 180^\circ - (\alpha + \beta) \Rightarrow \angle EOQ = 180^\circ - \angle CNE = \alpha + \beta$

~~$\triangle AOC \sim \triangle OCE \sim \triangle OEA$~~

$\angle EOQ = \angle OAE$  — как углы между кас. и хордой.  $\Rightarrow$

$AO$  — биссектриса угла  $\angle AOE$ , т.  $\angle CAO = \alpha + \beta$ ;  $\angle OAE = \alpha + \beta$

по Т. о биссектрисе:  $\frac{AC}{AE} = \frac{CO}{OE} = \frac{3}{10}$ .

$\triangle CBO \sim \triangle OCE \Rightarrow \frac{CB}{CO} = \frac{CO}{CE} \Rightarrow \frac{3x}{CO} = \frac{CO}{10x} \Rightarrow CO^2 = 30x^2$

~~$\frac{CB}{CO} = \frac{CO}{CE} = \frac{AO}{EO}$~~

~~$\triangle CBO \sim \triangle OCE \sim \triangle OEA$~~ ,  ~~$\triangle CBO \sim \triangle OCE \sim \triangle OEA$~~





На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

ААААА

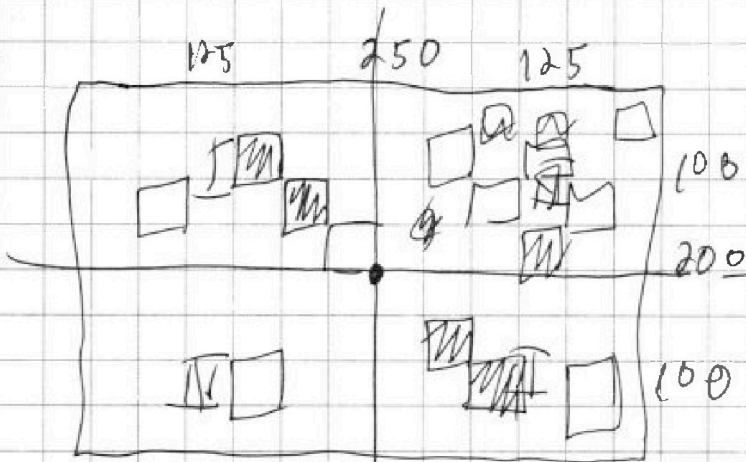


На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

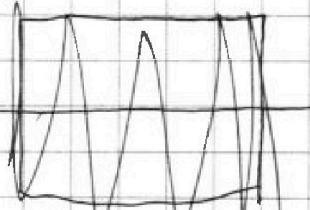
СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



См. 944. чертёж:

Выбирает клетку из I четверти  $\rightarrow$  автоматически получаем  
клетку, см. ей из II четверти.



аналогично с II и IV четвертями.

т.е. мы можем выбрать 4 клетки из одной четверти;

$$\sqrt{x+5} - \sqrt{4-x} = 1$$

$$\sqrt{x+5} + \sqrt{4-x} = 2$$

$$\sqrt{x+5} = 1 + \sqrt{4-x}$$

$$x+5 = 1 + 2\sqrt{4-x} + 4-x$$

$$2x = 2 + 2\sqrt{4-x}$$

$$x = 1 + \sqrt{4-x}$$

$$x - 1 = \sqrt{4-x}$$

$$(x-1)^2 = 4-x$$

$$x^2 - 2x + 1 = 4-x$$

$$x^2 - x - 3 = 0$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$4t^3 + 6t^2 + 3t = 3 + p \quad p \in [-4, 10]$$

ЧНА ЧНА

$$a, b, c \in \mathbb{Z}$$

$$a > b$$

$$a - b \neq 3$$

$$(a - c)(b - c) = p^2$$

$$a + b^2 = 560$$

$$a - c = d_1^{d_1} \cdot d_2^{d_2} \cdot \dots \cdot d_n^{d_n}$$

$$b - c = e_1^{e_1} \cdot e_2^{e_2} \cdot \dots \cdot e_m^{e_m}$$

$$\Rightarrow (a - c)(b - c) = d_1^{d_1} \cdot d_2^{d_2} \cdot \dots \cdot d_n^{d_n} \cdot e_1^{e_1} \cdot e_2^{e_2} \cdot \dots \cdot e_m^{e_m}$$

$p^2 \Rightarrow$   
пробачим

$$\Rightarrow \begin{cases} a - c = \pm 1 \\ b - c = \pm p^2 \\ a - c = \pm p^2 \\ b - c = \pm 1 \\ a - c = \pm p \\ b - c = \pm p \end{cases}$$

$$(1) \begin{cases} a - c = t \\ b - c = p^2 \\ c = b - a \\ b + a - t = p^2 \end{cases}$$

- знаки у всех  
однозначные

- , - или +, не

$$a + b^2 = 560 \Rightarrow a = 560 - b^2$$

~~ЧНА~~ умножаем все +, -, - +

$$b + 560 - b^2 - t = p^2 \Rightarrow$$

$$b - b^2 + 559 = p^2$$

$$b(1 - b) = p^2 - 559$$

$$p^2 = 1, 4, 9, 25, 49, 121, 169;$$

$$a > b \Rightarrow a - c > b - c \Rightarrow \text{при } a - c = \pm 1 \text{ - нет решений } \Rightarrow$$

ли там случаи не проверяет. а также:

$$a - c = p^2, b - c = -t$$

$$a - c = b - c - \text{тоже не подходит. ф.к. } a > b. \Rightarrow p^2$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a - c = -p^2; \quad b - c = -1 \text{ — тоже не подходит верн.}$$

$$-p^2 \leq -1; \quad a - c > b - c, \text{ т.е. } a > b \Rightarrow$$

Ответов только один вариант, когда

$$\begin{cases} a - c = p^2 \\ b - c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - b + 1 = p^2 \Rightarrow a - b = (p-1)(p+1) \\ c = b - 1 \end{cases} \quad a - b \text{ д.з.} \Rightarrow \text{АВ}$$

$$a + b^2 = 560 \Rightarrow a = 560 - b^2, \text{ т.е. } (p-1)(p+1) \text{ д.з.}$$

~~$$561 - b^2 - b = p^2 \quad p^2 \neq 1$$~~

~~АВ~~

~~$$b^2 + b = 1$$~~

~~$$b(b+1) = 561 - p^2$$~~

~~$$b(b+1) = 21^2 + 11^2 - p^2$$~~

~~$$p^2 = 21^2 + 11^2 - b(b+1)$$~~

~~$$p^2 = 561 - b(b+1)$$~~

~~$$p^2 = 21^2 + 11^2 - b(b+1)$$~~

~~$$\begin{aligned} b(b+1) &= 21^2 \\ b(b+1) &= 11^2 \end{aligned}$$~~

~~$b$  и  $b+1$  — взаимно простые.~~

~~АВ~~  
 $p \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow p-1 \equiv 0 \pmod{3}$

~~не ок.~~  
 $p \equiv 2 \pmod{3} \Rightarrow p+1 \equiv 0 \pmod{3}$

$p \equiv 0 \pmod{3} \Rightarrow p \text{ д.з.}$

$p$  — простое число,

значит  $p^2 = 9$ .

$$a - b + 1 = 9 \Rightarrow \begin{cases} a - b = 8 \\ a = b + 8 \end{cases} \quad (\Leftrightarrow)$$

$$\begin{cases} a + b^2 = 560 \\ b^2 + b + 8 = 560 \end{cases}$$

$$b^2 + b - 552 = 0 \Rightarrow b = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 552}}{2} \Rightarrow b = \frac{1 + 47}{2} \quad (\Leftrightarrow)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1    2    3    4    5    6    7  
                 

СТРАНИЦА  
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} b = 24 \\ b = -23. \end{cases}$$

$$a = b + 6 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a = 32 \\ a = -15. \end{cases}$$

$$c = b - 1 \Rightarrow \begin{cases} c = 23 \\ c = -24 \end{cases}$$

*Ans.*

Ответ:  $(32; 24; 23); (-23; -15; -24)$ .

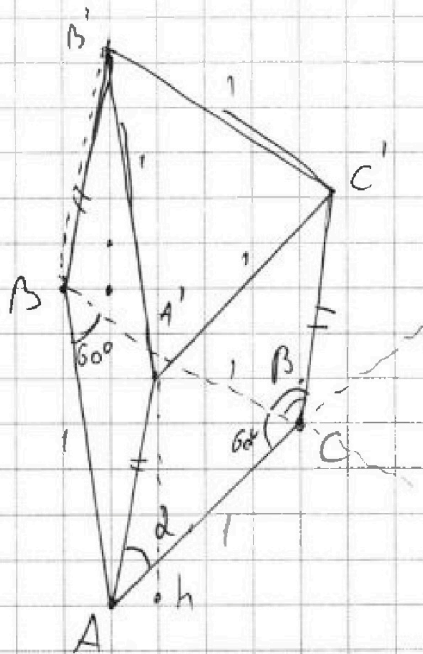
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- 1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$S_{AA'C'C} = S_{AA'B'B} = 4 = S_I$$

$$S_{II} = S_{BB'C'C} = 3.$$

$$AC = 1.$$

$$AA' \cdot AC \cdot \sin \alpha = S_I = AA' \cdot \sin \alpha$$

$$S_{II} = BC \cdot CC' \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} \cdot CC' \cdot \sin \beta.$$

$$AA' \cdot \sin \alpha = 4$$

$$AA' = CC' = x$$

$$CC' \cdot \sin \beta = 3.$$

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{4}{3}.$$

~~$$S_{ABC A'B'C'} = 2S_{ABC} + 2S_I + S_{II}$$~~

$$V_{ABCA'B'C'} = S_{ABC} \cdot h$$

~~$$4 + 3 + 6 + 2 + 3 + 1 = 0$$~~

~~$$4 + 3 + 6 + 2 + 3 + 1 = 0$$~~

~~$$\cos x = -1 \Rightarrow x = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$~~

~~$$x = \sqrt{0}$$~~

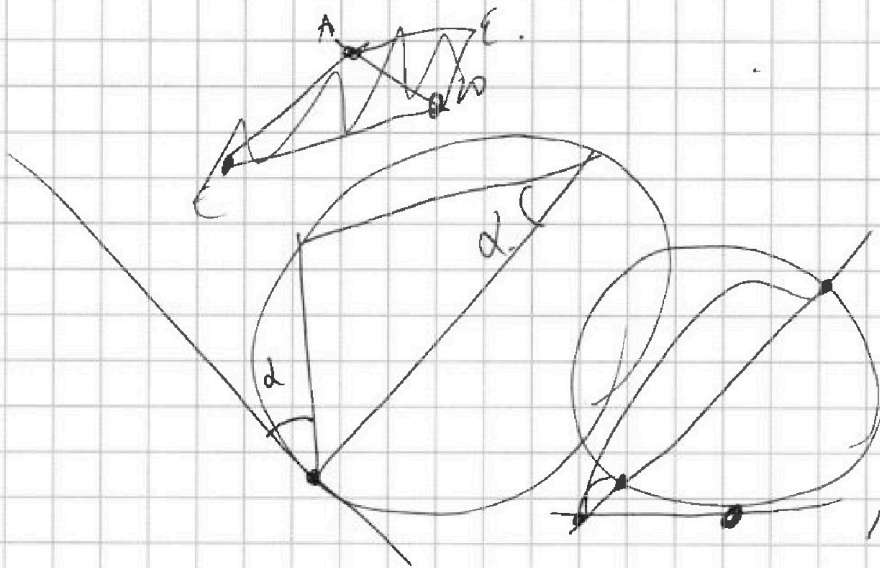


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

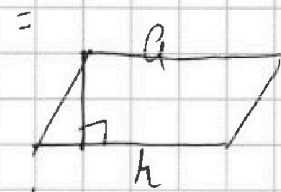
СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



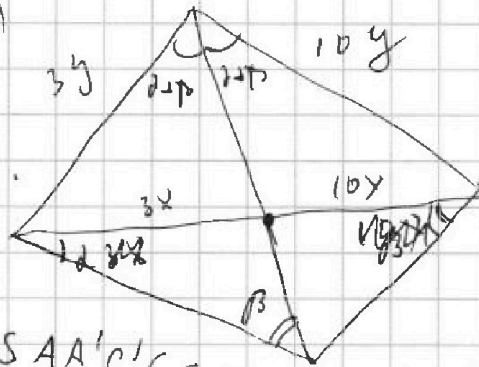
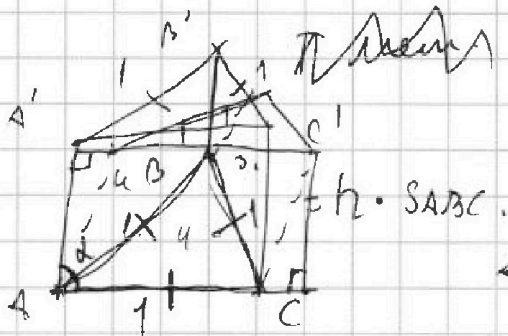
$$\frac{EO}{\sin \alpha} =$$

$$\Rightarrow BO \cdot \sin \alpha = AO \cdot \sin \alpha$$



$$BO = \frac{AO \cdot \sin \alpha}{\sin \alpha} = AO$$

$$|AE|^2 = CO^2 + BO^2 = CO^2 + BO^2 + OE^2 + EO^2 - 2CO \cdot BO \cos \alpha - 2EO \cdot BO \cos \alpha$$



$$\angle CAQ = 2(2 - \beta)$$

$$S_{AA'C'C} = 4$$

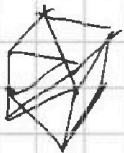
$$AE \cdot AA' \sin \alpha = 4$$

$$\angle CDE = 180^\circ - 2 - \beta$$

$$CO^2 =$$

$$AO^2 = CO^2 + BO^2 - 2CO \cdot BO \cos \alpha$$

$$BO^2 = EO^2 + BO^2 - 2EO \cdot BO \cos \beta$$



$$180^\circ - 2 - \beta + 2(2 + \beta) = 180^\circ + 2$$

$$\begin{cases} CO^2 = CO^2 + BO^2 - 2CO \cdot BO \cos \alpha & I \\ BO^2 = EO^2 + BO^2 - 2EO \cdot BO \cos \beta & II \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a > b$$

$$a, b, c \in \mathbb{Z}$$

$$a - b + 5 = 0$$

$$a - b \equiv 3 \Rightarrow \begin{cases} a - b \equiv 1 \\ a - b \equiv 3 \end{cases}$$

$$a - b - 2ab = 15$$

$$a(1 - 2b) - b = 15$$

$(a-c)(b-c)$  - квадрат целого числа

$$a + b^2 = 560$$

$$a + b^2 = 5 \cdot 2 \cdot 56 = 5 \cdot 2^2 \cdot 28 = 5 \cdot 2^3 \cdot 14 = 5 \cdot 2^4 \cdot 7$$

$$b^2 = 560 - a$$

$$(a-c)(b-c) = d^2, d \in \mathbb{N}$$

$d$  - простое.

(Лемма)

$$(a-c) = p_1^{d_1} \cdot p_2^{d_2} \cdot \dots \cdot p_k^{d_k} \quad \text{— согласно теореме о разложении}$$

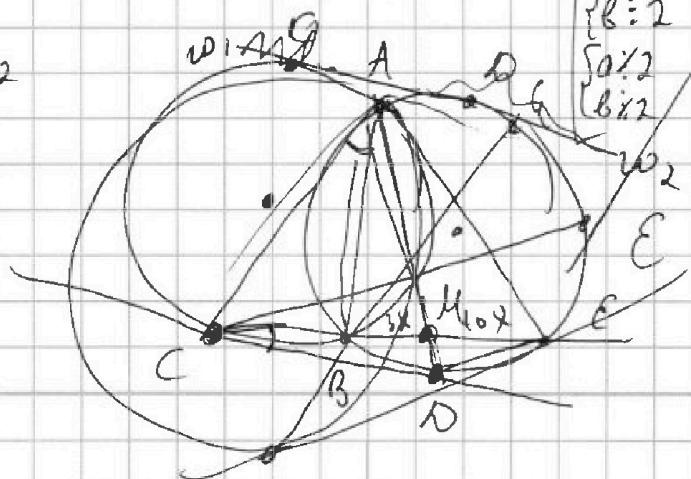
$$(b-c) = p_1^{d'_1} \cdot p_2^{d'_2} \cdot p_3^{d'_3} \cdot \dots \cdot p_l^{d'_l} \quad \Rightarrow \quad (a-c)(b-c) = p_1^{d_1+d'_1} \cdot p_2^{d_2+d'_2} \cdot \dots \cdot p_k^{d_k+d'_k} \cdot p_{k+1}^{d'_{k+1}} \cdot \dots \cdot p_l^{d'_l}$$

— простое число  $\leq$

$$\begin{cases} a-c = \pm 1 \\ b-c = \pm 2 \\ a-c = \pm d \\ b-c = \pm 1 \\ a-c = \pm d^2 \\ b-c = \pm 2^2 \end{cases}$$

$$a + b + c = a$$

$$a + b^2 = 5 \cdot 2^4 \cdot 7 \Rightarrow \begin{cases} a: 2 \\ b: 2 \\ a: 2 \\ b: 2 \end{cases}$$



EX  
CX





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

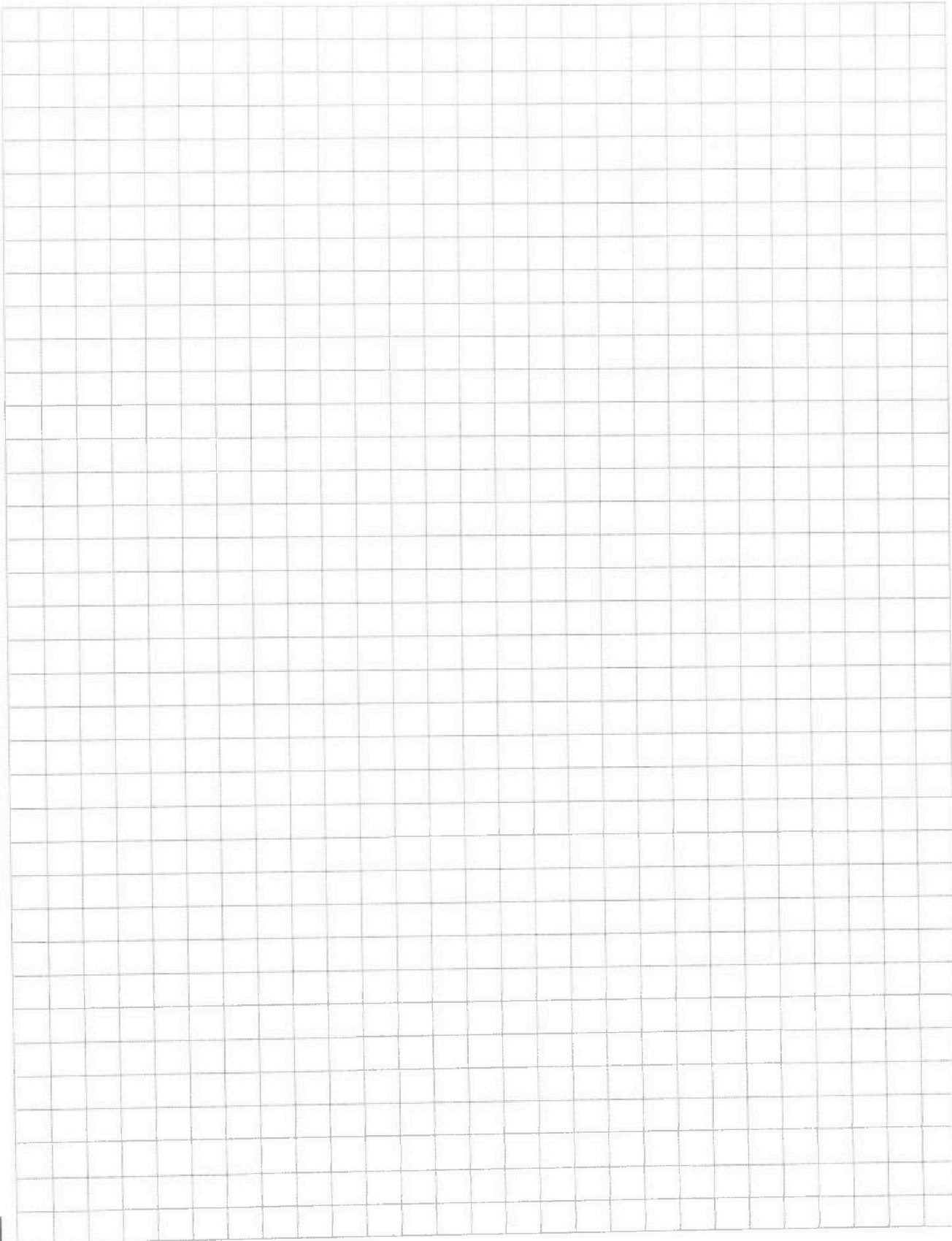
5

6

7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\cos 3x + 3\cos 2x + 6\cos x = p \quad (- \text{решилим})$$

$$4\cos^3 x - 3\cos x + 3 \cdot (2\cos^2 x - 1) + 6\cos x = p \quad (\Rightarrow)$$

$$4\cos^3 x - 3\cos x + 6\cos^2 x - 3 + 6\cos x = p \quad (\Rightarrow)$$

$$4\cos^3 x + 6\cos^2 x + 3\cos x - 3 = p \quad \} \cos x = t.$$

$$4t^3 + 6t^2 + 3t - 3 = p \quad - \text{решилим при } -|2t| \leq 1 \Rightarrow$$

$$4t^3 + 6t^2 + 3t - 3 - p = f(t)$$

$$f'(t) = 12t^2 + 12t + 3 = 0$$

$$12t^2 + 12t + 3 = 0 \Leftrightarrow 4t^2 + 4t + 1 = 0 \quad \Delta = 16 - 16 = 0$$

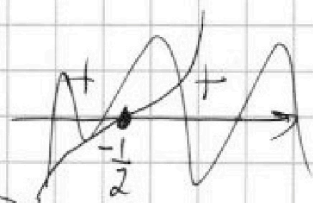
$$t = -\frac{1}{2}$$

$$\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 = 0$$

$$\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 = f(t)$$

$$\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0.$$

$f(t)$  - кубическая функция  $\Rightarrow$



уже макс. один корень.  $\Rightarrow$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{-1}{8} + \frac{6}{4} - \frac{3}{2} - 3 - p = -5 - p + \frac{3}{2}$$

из теоремы о промежуточной функции. должны выполняться следующие неравенства:

$$\begin{cases} f(-1) \leq 0 \\ f(1) \geq 0 \end{cases}$$

- условие наличия решений у кубической функции.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

реш (1):

$$4t^3 + 6t^2 + 3t - 3 - p \leq 0$$

$$t=1: -4 + 6 - 3 - 3 - p \leq 0 (=)$$

$$p \geq -4.$$

реш (2):

$$4t^3 + 6t^2 + 3t + 3 - p \geq 0; t=1(=)$$

$$4 + 6 + 3 - 3 - p \geq 0 (=)$$

$$p \leq 10. (=)$$

ответ:  $[-4; 10]$ .

~~реш~~

