



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [3 балла] Найдите все действительные значения  $x$ , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её четвёртый член равен  $\sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}}$ , десятый член равен  $x+4$ , а двенадцатый член равен  $\sqrt{(15x+6)(x-3)}$ .

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+7} - \sqrt{5-x-3z} + 6 = 2\sqrt{y-2x-x^2+z}, \\ |y-20| + 2|y-35| = \sqrt{225-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $p$ , при которых уравнение

$$\cos 3x + 6 \cos x = 3 \cos 2x + p$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких  $p$ .

4. [5 баллов] Две окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$  пересекаются в точках  $A$  и  $B$ , а их общая касательная имеет с  $\omega_1$  и  $\omega_2$  общие точки  $C$  и  $D$  соответственно, причём точка  $B$  расположена ближе к прямой  $CD$ , чем точка  $A$ . Луч  $CB$  пересекает  $\omega_2$  в точках  $B$  и  $E$ . Найдите отношение  $ED : CD$ , если диагональ  $AD$  четырёхугольника  $ACDE$  делит отрезок  $CE$  в отношении  $9 : 25$ , считая от вершины  $C$ .

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник  $150 \times 200$ . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел  $(a; b; c)$  такие, что:

- $a > b$ ,
- число  $a - b$  не кратно 3,
- число  $(a - c)(b - c)$  является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство  $a + b^2 = 820$ .

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник со стороной 2. Площади её боковых граней равны 5, 5 и 4. Найдите высоту призмы.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

① Множитель геом. прогрессии обозначим за  $q$ . ( $q \neq 0$ )

Заметим, что  $\sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}}$ ,  $x+4$ ,  $\sqrt{(15x+6)(x-3)} \neq 0$  (иначе они все равны 0, это геом. пр-е, что невозможно).

$$\sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}} \cdot q^8 = \sqrt{(15x+6)(x-3)} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{1}{(x-3)^3}} q^8 = \sqrt{x-3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow q^8 = \sqrt{(x-3)^4} \Leftrightarrow q^8 = (x-3)^2 \Leftrightarrow q = \pm \sqrt[8]{(x-3)^2} = \pm \sqrt{|x-3|}$$

Также заметим, что  $(x+4)q^2 = \sqrt{(15x+6)(x-3)}$  Из этого следует, что  $x+4 > 0$  ( $q^2 > 0$ ,  $\sqrt{\quad} > 0$ )

$$\text{Тогда } q^2 = \sqrt{\frac{(15x+6)(x-3)}{(x+4)^2}} \Leftrightarrow q = \pm \sqrt{\frac{(15x+6)(x-3)}{(x+4)^2}}$$

К тому же,  $q$  одинаково для всей прогрессии, поэтому

$$\sqrt{|x-3|} = \sqrt{\frac{(15x+6)(x-3)}{(x+4)^2}} \Leftrightarrow |x-3| = \frac{(15x+6)(x-3)}{(x+4)^2}$$

$$\text{Если } x > 3, \text{ то } \frac{15x+6}{(x+4)^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{15x+6}{x+4} = x^2+8x+16 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 7x + 10 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{7 \pm 3}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = 2 \end{cases}$$

Т.е.  $x=5$  подходит

$$\text{Если } x < 3, \text{ то } 15x+6 = -x^2+8x-16 \Leftrightarrow x^2+23x+22=0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-23 \pm 21}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 < 3 \\ x = -22 < 3 \end{cases}$$

$$\text{Ограничение: } \begin{cases} x+4 > 0 \\ \sqrt{(15x+6)(x-3)} \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-4; +\infty) \\ x \in (-\infty; -2/5) \cup (3; +\infty) \end{cases} \quad \begin{matrix} + & - & + \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & & 3 \\ 5 & & \end{matrix}$$

↪ оп-е ка бы там дайт тоже самое, что и на 120

$$\text{Т.е. } x \in (-4; -2/5) \cup (3; +\infty)$$

Остаток  $x=5$  и  $x=-1$ .

$$\text{Ответ: } \{-1; 5\}$$

(где  $x=1$   $q = \pm \sqrt{2}$ ; где  $x=5$   $q = \pm \sqrt{2}$ )  
т.е. прогр-ии существуют





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\textcircled{2} \quad \sqrt{x+7} - \sqrt{5-x-3z} + 6 = 2\sqrt{y-2x-x^2+z}$$

$$|y-20| + 2|y-35| = \sqrt{225-z^2}$$

$$\sqrt{225-z^2} \leq \sqrt{225} = 15, \quad z \geq 0$$

Т.е.  $|y-20| + 2|y-35| \leq 15$  (\*)

Оценим, при каких  $y$  это возможно.

1.  $y \geq 35$ . (\*)  $y-20 + 2y-70 \leq 15 \Leftrightarrow 3y \leq 105 \Leftrightarrow y \leq 35$ .  
Т.е.  $y = 35$ .

2.  $y \in [20; 35)$  (\*)  $\Leftrightarrow y-20 + 70-2y \leq 15 \Leftrightarrow y \geq 35$ .

3.  $y < 20$  (\*)  $\Leftrightarrow 20-y + 70-2y \leq 15 \Leftrightarrow 75 \leq 3y \Leftrightarrow y \geq 25$ .

Т.е. нижнее ур-е может выполняться только при  $y = 35$ .  
(для других  $y$   $|y-20| + 2|y-35| > 15 \geq \sqrt{225-z^2}$ )

Для  $y = 35$ :  $|35-20| + 2|35-35| = 15 = \sqrt{225-z^2} \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow z = 0$ .

Т.е.  $y$  всегда равно 35,  $z$  всегда равно 0.

Подставим их в первое ур-е, чтобы найти  $x$ .

$$\sqrt{x+7} - \sqrt{5-x} + 6 = 2\sqrt{35-2x-x^2} \Leftrightarrow \sqrt{x+7} - \sqrt{5-x} + 6 =$$

$$= 2\sqrt{(5-x)(x+7)}$$

Рассмотрим  $(\sqrt{x+7} - \sqrt{5-x})^2 = x+7+5-x - 2\sqrt{(5-x)(x+7)} =$   
 $= 12 - 2\sqrt{(5-x)(x+7)}$

Обозначим  $\sqrt{x+7} - \sqrt{5-x} = t$ . Тогда  $2\sqrt{(5-x)(x+7)} = 12 - t^2$ .

Т.е.  $t+6 = 12 - t^2 \Leftrightarrow t^2 + t - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=2 \\ t=-3 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+7} - \sqrt{5-x} = 2 \\ \sqrt{x+7} - \sqrt{5-x} = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+7} = 2 + \sqrt{5-x} & (1) \\ \sqrt{x+7} = -3 + \sqrt{5-x} & (2) \end{cases}$$

В обоих полуз. ур-ях справа монотонно возраст. ф-я, слева - монотонно убывающая, значит, они оба имеют



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

не более 1 корня.

Решим ур-е (1):

$$\sqrt{x+7} = 2 + \sqrt{5-x} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -7 \\ x+7 = 4+5-x+4\sqrt{5-x} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -7 \\ 2x - 2 = 4\sqrt{5-x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -7 \\ x-1 = 2\sqrt{5-x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [-7; 5]; x \geq 1 \\ x^2 - 2x + 1 = 4(5-x) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in [-7; 5]; x \geq 1 \\ x^2 + 2x - 19 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [-7; 5]; x \geq 1 \\ x = -1 \pm \sqrt{20} \end{cases} \Leftrightarrow x = \sqrt{20} - 1$$

(2): (покажем, что ОДЗ равен  $[-7; 5]$ )

$$\sqrt{x+7} = -3 + \sqrt{5-x} \Leftrightarrow \begin{cases} x+7 = 5-x+9-6\sqrt{5-x} \\ x \in \text{ОДЗ} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-7 = 6\sqrt{5-x} \\ x \in \text{ОДЗ} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in [-7/2; 5] \\ 4x^2 - 28x + 49 = 36 \cdot 5 - 36x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [-7/2; 5] \\ 4x^2 + 8x - 131 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in [-7/2; 5] \\ x = \frac{-2 \pm 3\sqrt{15}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{-2 + 3\sqrt{15}}{2}$$

Ответ:  $\left[ (\sqrt{20} - 1; 35; 0); \left(-1 + \frac{3}{2}\sqrt{15}; 35; 0\right) \right]$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\textcircled{3} \cos 3x = \cos x (4\cos^2 x - 3); \cos 2x = 2\cos^2 x - 1$$
$$\cos 3x + 6\cos x = 3\cos 2x + p \Leftrightarrow \cos x (4\cos^2 x - 3) + 6\cos x = 6\cos^2 x - 3 + p \Leftrightarrow 4\cos^3 x - 6\cos^2 x + 3\cos x = p - 3$$
$$\cos x \stackrel{t}{=} t$$
$$4t^3 - 6t^2 + 3\cos x = p - 3$$

$$f(t) = 4t^3 - 6t^2 + 3t; f'(t) = 12t^2 - 12t + 3 =$$
$$= 3(4t^2 - 4t + 1) \geq 0$$
$$4t^2 - 4t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4}}{4} = \frac{1}{2} \quad D = 0$$

Т.е.  $f(t) \uparrow \mathbb{R}$ , т.е. ур.е  $f(t) = p - 3$  имеет 1 корень при всех  $p \in \mathbb{R}$ .

$t \in [-1; 1]$  (т.к.  $t = \cos x$ ). Значит,  $p - 3 \in [f(-1); f(1)]$ , т.е.  $p - 3 \in [-4 - 6 - 3; 4 - 6 + 3] = [-13; 1]$   
Значит,  $p \in [-10; 4]$  - условие для того, чтобы ур.е имело хотя бы одно решение (т.е. равно 1)

Ответ: при  $p \in [-10; 4]$



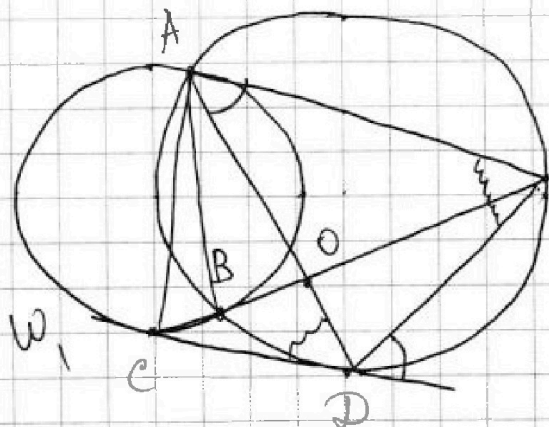
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

4



$$CO : OE = 9 : 25$$
$$\angle ADC = \angle AED \text{ (впис. и м/у кас. и хорд)}$$

Также  $CO^2 = CB \cdot CE$ ;  
 $BO \cdot OE = AO \cdot OD$   
(из теор. об отрезках хорды и касат. и секущей)

Т.е.  $\triangle ABO \sim \triangle DOE$  (отрезки хорд и верт. углы)

Значит,  $\frac{ED}{AB} = \frac{EO}{BO}$  . ~~Аналогично~~





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 1

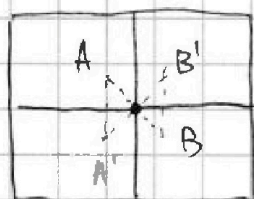
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

5) При центральной / осевой симметрии каждой клетке однозначно сопоставляется симметричная ей (по с-вам симметрии).

Т.е. все клетки разбиваются на пары, и каждую пару можно либо красить, либо не красить (т.е. для неё два варианта выбора).

Для каждой симметр. раскраски  $2^{\frac{150 \cdot 200}{2}} = 2^{15000}$  сп. её создать.

Центр прямоугольника - точка пересечения его средних линий. Пусть А, В симметр. отн-ко центра.



Тогда В', которая симметр. В отн-ко одной из ср. л., симметрична А отн-ко другой ср. л.

(одинак. расст-е до центра и оси, лежат в одной полуплоскости).

Ну и аналогично т. А' симметр. В' отн-ко центра, симметр. А отн-ко другой ср. л.

Т.е. все клетки можно разбить на такие 4-ки (пары А и В её симметр.).

Очевидно, что раскраска симметр. отн-ко двух осей (или осей и центра)  $\Leftrightarrow$  она обладает всеми тремя симметриями (см. пред. рассуждения).

Т.е. раскраски, симметр. всем трём, считаются 3 раза (мы считали их для каждой из осей).

$2^{\frac{150 \cdot 200}{4}} = 2^{7500}$  раскрасок, симметр. всем 3м объектам (разбиваем всё на 4-ки, как написано выше).

Тогда всего  $3 \cdot 2^{15000} - 2 \cdot 2^{7500}$  раскрасок (симметр. всем 3м вычитаем 2 раза).

Ответ:  $3 \cdot 2^{15000} - 2^{7501}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$6) (a-c)(b-c) = p^2, \quad a, b, c \in \mathbb{Z} \text{ по усл. } p - \text{простое число}$$

$$p^2: 1, -1, p, -p, p^2, -p^2, \text{ т.е. } p^2 = p \cdot p, p^2 = (-p)(-p), \\ p^2 = 1 \cdot p^2, p^2 = (-1)(-p^2).$$

Первые два вар-та невозм-ны, т.к. они предполагают рав-во  $a-c = b-c \Leftrightarrow a=b$ ?! по усл.  $a > b$

$$\text{Значит, } \begin{cases} a-c = p^2 \wedge b-c = 1 \\ a-c = -1 \wedge b-c = p^2 \end{cases}$$

$$\text{] } a-c = p^2, b-c = 1.$$

$$\text{Тогда } a-b = p^2 - 1 \Leftrightarrow a-b+1 = p^2.$$

$$p^2 \equiv 3 \Leftrightarrow p \equiv 3 \text{ (3 - простое число)}$$

$$\text{Если } p \equiv 1 \text{, то } p^2 \equiv 1 \text{, если } p \equiv 2 \text{, то } p^2 \equiv 1$$

$$\text{Т.е. если } p^2 \equiv 3 \text{ (и } p \equiv 3) \text{, то } p^2 - 1 \equiv 0 \text{. Тогда } a-b \equiv 3 \text{?! по усл. нет}$$

$$\text{Значит, } p \equiv 3, \text{ т.е. } p = 3.$$

$$\text{Тогда } \begin{cases} a-b = 8 \\ a+b^2 = 820 \end{cases} \Rightarrow b^2 + b = 812 \Leftrightarrow b(b+1) = 812$$

Поскольку  $b \in \mathbb{Z}$ , таких способов получить  $b$  равно 2:

$$\text{либо } b = 28, \text{ либо } b = -29$$

$$\text{Если } b = 28: a = 36, c = 27$$

$$\text{Если } b = -29: a = -21, c = -30$$

$$\text{] } a-c = -1, b-c = p^2.$$

Тогда  $a-b = -1 + p^2$ , и справедливо всё то же самое:

$$p = 3, \text{ иначе } a-b \equiv 3$$

$$\begin{cases} a-b = 8 \\ a+b^2 = 820 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 28, a = 36 \text{ (т.е. } c = 37) \\ b = -29, a = -21 \text{ (т.е. } c = -20) \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } \{(36; 28; 27); (36; 28; 37); (-21; -29; -30); (-21; -29; 20)\}$$



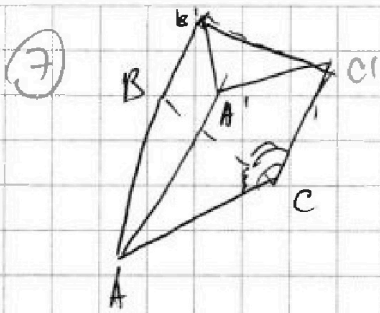


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$ABCA'B'C'$  - призма.

Н.ч.о, пусть единич. плоскость  
идеют грани  $AA'C'C$  и  $AA'B'B$ .

$$S_{AA'C'C} = AA' \cdot AC \sin \angle A'AC = S_{\alpha}$$

$$S_{AA'B'B} = AA' \cdot AB \sin \angle A'AB = S_{\beta}$$

$$S_{BB'C'C} = BC \cdot CC' \cdot \sin \angle BCC' = S_{\gamma}$$

Т.е.  $\frac{5}{4} = \frac{\sin \angle A'AE}{\sin \angle BCC'}$  (реша нап-ны друг другу;  $\Delta A/C$ ).

Рассмотрим 3-х. угол  $CC'BA$ .

$$\cos \angle BCA = \cos \angle BCC' \cdot \cos \angle C'CA + \sin \angle BCC' \cdot \sin \angle C'CA \cdot \cos \angle (d, \delta)$$

$\frac{1}{2} = \sin \angle C'CA = \frac{4}{5}$ , тогда  $\sin \angle BCC' = \frac{4}{5}$

Аналог. с 3-х. углом  $AA'CB$ :

$$\frac{1}{2} = \cos^2 \delta + \sin^2 \delta \cos \angle (d, \beta)$$

$$\frac{1}{2} = \cos \delta \cos \epsilon + \sin \delta \sin \epsilon \cos \angle (d, \delta)$$

$$\cos^2 \delta + \sin^2 \delta \cos \angle (d, \beta) = \cos \delta \cos \epsilon + \frac{4}{5} \sin^2 \delta \cos \angle (d, \delta)$$

$$\cos \angle (d, \delta) = \cos (180^\circ - 2 \angle (d, \beta)) = -\cos 2 \angle (d, \beta)$$

$$\frac{|\cos \delta|}{|\cos \epsilon|} = \frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-\frac{16}{25}x^2}} = \sqrt{\frac{1-x^2}{\frac{25-16x^2}{25}}} = \sqrt{\frac{25-25x^2}{25-16x^2}} = \sqrt{1-\frac{9x^2}{25-16x^2}}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\cos 3x = \cos x \cos 2x - \sin x \sin 2x = \cos x (\cos^2 x - \sin^2 x) - 2 \sin^2 x \cos x = \cos x (1 - 2 \sin^2 x) - 2 \sin^2 x \cos x = \frac{1}{2} (4 \frac{1}{4} - 3) = \cos x (1 - 4 \sin^2 x) = \cos x (1 - 4(1 - \cos^2 x)) = \cos x (4 \cos^2 x - 3)$$

$$|z| \leq 15 \quad x \geq -7 \quad x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 131 \cdot 4}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{540}}{2} = \frac{-4 \pm 3\sqrt{60}}{2} = \frac{-4 \pm 6\sqrt{15}}{2}$$

$$|y - 20| + 2|y - 35| \leq 15$$

$$\begin{aligned} y - 20 + 2(35 - y) &\leq 15 \\ 20 - y + 70 - 2y &\leq 15 \\ 90 - 3y &\leq 15 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3y &\geq 75 \\ y &\geq 25 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y - 20 + 2(y - 35) &\leq 15 \\ y - 20 + 2y - 70 &\leq 15 \\ 3y - 90 &\leq 15 \Rightarrow 3y \leq 105 \\ y &\leq 35 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y - 20 + 2(y - 35) &\leq 15 \\ y - 20 + 2y - 70 &\leq 15 \\ 3y - 90 &\leq 15 \Rightarrow 3y \leq 105 \\ y &\leq 35 \end{aligned}$$

$$y = 35$$

$$\frac{1}{2\sqrt{x+7}} + \frac{1}{2\sqrt{5-x}}$$

$$x = -1 \pm 6$$

$$\begin{cases} x = 5 \\ x = -7 \end{cases} \quad -(x-5)(x+7)$$

$$0 - \sqrt{12} + 6 = 6 - \sqrt{12}$$

$$\begin{aligned} -x^2 - 2x + 35 \\ \frac{2}{-2} = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x+7 &= t \\ 5-x &= \end{aligned}$$

$$2\sqrt{6^2} = 12$$

$$\begin{aligned} 5 \cos^3 x - 3 \cos x + 6 \cos x &= \\ &= 8 \cos^3 x - 3 \cos x \end{aligned}$$

$$-x+5 = -t+12$$

$$-t+12 = -x-7+12 = 5-x$$

$$t \in [0; \sqrt{12}] = [0; 3\sqrt{2}]$$

$$\sqrt{x+7} \geq 0$$

$$5-x+x+7$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

-3

$$\sqrt{5-x} \in [0; 3\sqrt{2}]$$

$$x+7 = 4+5-x+2\sqrt{5-x}$$

$$\cos x + i \sin x = e^{ix}$$

$$2x - 2 = 2\sqrt{5-x}$$

$$\cos x - i \sin x = e^{-ix}$$

$$x-1 = 2\sqrt{5-x}$$

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$x^2 - 2x + 1 = 20 - 4x$$

$$x^2 - x - 19 = 0$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}} q^6 = x+4$$

$$x^3 + px + q = 0 \quad x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

$$\sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}} q^8 = \sqrt{(15x+6)(x-3)} = \sqrt{\frac{(15x+6)(x-3)^4}{(x-3)^3}} = \sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}} (x-3)^2$$

$$\begin{array}{c} + \quad - \quad + \\ \hline -\frac{6}{15} \quad 3 \end{array}$$

$$(x+4) q^2 = \sqrt{(15x+6)(x-3)} \Rightarrow q^2 = \frac{\sqrt{(15x+6)(x-3)}}{x+4}$$

$$q = \pm \sqrt[8]{(x-3)^2} \Rightarrow q = \pm \sqrt[4]{(x-3)^2}$$

$$q = \pm \sqrt{\frac{\sqrt{(15x+6)(x-3)}}{x+4}} = \pm \frac{\sqrt[4]{(15x+6)(x-3)}}{\sqrt{x+4}}$$

$$= \pm \sqrt[4]{\frac{(15x+6)(x-3)}{(x+4)^2}} = \pm \sqrt[4]{|x-3|}$$

$$q^6 = \pm \sqrt[4]{\frac{(x+4)^2(x-3)^3}{15x+6}} \Rightarrow q = \pm \sqrt[12]{\frac{(x+4)^2(x-3)^3}{15x+6}}$$

$$-\frac{6}{15} = -\frac{2}{5}$$

$$\begin{array}{r} \times 23 \\ 23 \\ \hline + 69 \\ 6 \\ \hline 529 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} - 529 \\ 128 \\ \hline 401 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 32 \\ 4 \\ \hline 128 \end{array}$$

$$\frac{-23 \pm \sqrt{401}}{2}$$

$$\sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}} q^6 = x+4$$

$$x^2 + 23x + 22 = 0 \quad q^6 = \sqrt{\frac{(x+4)^2(x-3)^3}{15x+6}} \Rightarrow q = \pm \sqrt[12]{\frac{(x+4)^2}{15x+6} (x-3)^3}$$

$$\sqrt{529-88} = \sqrt{441}$$

$$\begin{array}{r} \overset{10}{529} \\ - 88 \\ \hline 441 \end{array}$$

$$= \pm \sqrt[12]{\frac{(x+4)^2}{15x+6} \sqrt[4]{|x-3|}}$$

$$\frac{-9}{(-4)^3} = \sqrt[3]{\frac{9}{64}}$$

$$= \frac{3}{8}$$

$$3 \quad (-9)(-4) = 36$$

$$\begin{array}{r} \times 21 \\ 21 \\ \hline + 42 \\ 441 \end{array}$$

$$q^2 = 2 \quad q = \sqrt{2}$$

$$81 \cdot 2$$

$$\sqrt{\frac{81}{8}} = \frac{9}{2\sqrt{2}}$$

$$q^2 = \sqrt{2} \quad q = \pm \sqrt[4]{2} \quad q^2 = 2\sqrt{2}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{e^{3xi} + e^{-i \cdot 3x}}{2} + 3(e^{xi} + e^{-ix}) = 3 \frac{e^{2xi} + e^{-i2x}}{2} + p$$

$$e^{ix} = t \quad e^{-ix} = \frac{1}{t}$$

$$\frac{t^3 + t^{-3}}{2} + 3t + 3t^{-1} = \frac{t^2 + t^{-2}}{2} + p$$

$$p = \cos 3x + 6 \cos x - 3 \cos 2x$$

$$\cos x + \cos y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\frac{x+y}{2} = t$$

$$\frac{x-y}{2} = t_1$$

$$x = 2t - y$$

$$y = 2t - x$$

$$\cos(t+t_1) + \cos(t-t_1) =$$

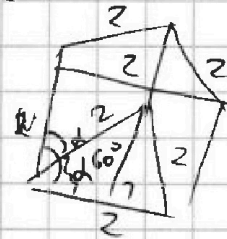
$$= \cos t \cos t_1 - \sin t \sin t_1 + \cos t \cos t_1 + \sin t \sin t_1$$

$$= 2 \cos t \cos t_1$$

$$\cos 3x + 6 \cos x = 2 \cos 2x \cos x$$

$$2 \cos 2x \cos x + 6 \cos x - 3 \cos 2x$$

$$\cos x (2 \cos 2x + 6) - 3 \cos 2x$$



$$\frac{1}{2} = \cos^2 \alpha + \frac{1}{2} \sin^2 \alpha$$

$$\frac{1}{2} =$$

$$1, p, p^2$$

a

z

$$p-1 \quad p \cdot p$$

$$a-c = p$$

$$b-c = -p$$

$$a-b = 2p$$

$$a-c = p^2$$

$$b-c = 1$$

$$p = 3$$

$$a-c = p^2 \Leftrightarrow$$

$$c = b-1$$

$$p^3 = 27$$

$$p^2 = 9$$

$$p^2 = 3$$

$$a-b = 3$$

$$a-b = 8$$

$$a-c = 9$$

$$b-c = 1$$

$$812 \mid 2$$

$$\begin{cases} a-b=8 \\ a+b^2=820 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 812 \mid 2 \\ 406 \mid 2 \end{array}$$

$$b^2 + b = 812 \quad b(b+1) = 812$$

$$\begin{array}{r} \times 29 \\ 28 \\ \hline + 232 \\ 58 \\ \hline 812 \end{array}$$

$$\frac{1}{2} = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha \cos \delta$$

$$S_{\text{бок}} = S_{\text{нефн}} l$$

$$14 = S_{\text{нефн}} l$$





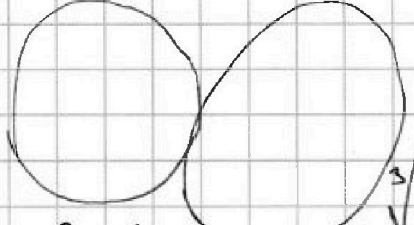
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

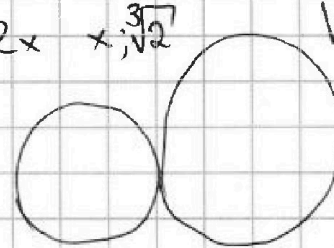
СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$4t^3 - 6t^2 + 3t + 3 \quad x^3 - 2x + 1$$



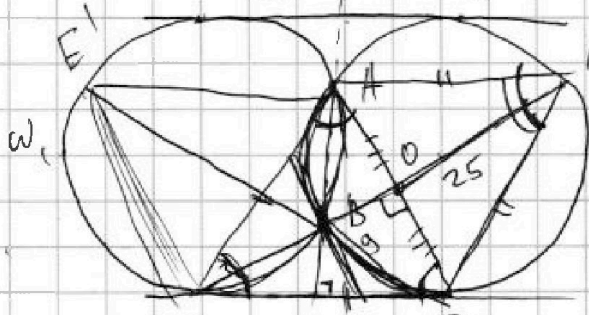
$$x^3 - 2x + 1$$



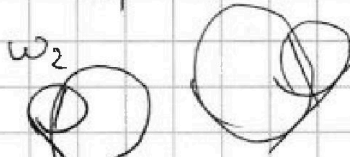
$$\sqrt[3]{-\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{8}{27}}}$$

$$\begin{aligned} &= \sqrt[3]{-\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{8}{27}}} \\ &= \sqrt[3]{-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2 \cdot 3\sqrt{3}}} \end{aligned}$$

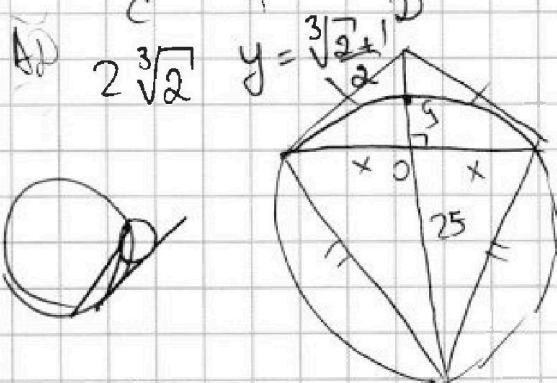
$$t^3 - 3t^2 + 3t - 3 \quad F \quad 3t^3 - 3t^2 + 6 \quad G$$



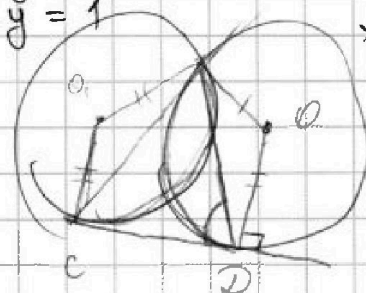
$$\sqrt[3]{\frac{1}{2} + 1 + \sqrt{1}}$$



$$360^\circ - \overset{\frown}{AD} - \overset{\frown}{AD} = 180^\circ - \overset{\frown}{AD}$$

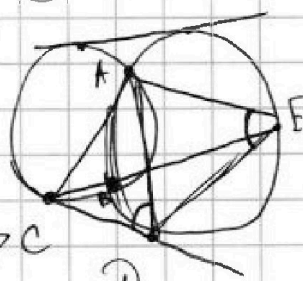


$$\begin{aligned} x + y &= \sqrt[3]{2} & 2x &= \sqrt[3]{2} + 1 \\ x - y &= 1 & x &= \frac{\sqrt[3]{2} - 1}{2} \end{aligned}$$



$$x = \sqrt[3]{-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4}}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4}}}$$

$$\sqrt[3]{1 + \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{27}}} \pm \sqrt[3]{1 - \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{27}}}$$



$$\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{27}} = \sqrt{\frac{36 + 29}{54}}$$

$$\sqrt[3]{1+1} \pm \sqrt[3]{1-1}$$

$$4t^3 - 6t^2$$

$$\sqrt[3]{2}$$

$$\sqrt[3]{2}$$