



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [3 балла] Найдите все действительные значения  $x$ , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её седьмой член равен  $\sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}$ , тринадцатый член равен  $5-x$ , а пятнадцатый член равен  $\sqrt{(13x-35)(x+1)}$ .

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+3} - \sqrt{4-x-z} + 5 = 2\sqrt{y+x-x^2+5}, \\ |y+1| + 3|y-12| = \sqrt{169-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $p$ , при которых уравнение

$$\cos 3x + 3 \cos 2x + 6 \cos x = p$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких  $p$ .

4. [5 баллов] Две окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$  пересекаются в точках  $A$  и  $B$ , а их общая касательная имеет с  $\omega_1$  и  $\omega_2$  общие точки  $C$  и  $D$  соответственно, причём точка  $B$  расположена ближе к прямой  $CD$ , чем точка  $A$ . Луч  $CB$  пересекает  $\omega_2$  в точках  $B$  и  $E$ . Найдите отношение  $ED : CD$ , если диагональ  $AD$  четырёхугольника  $ACDE$  делит отрезок  $CE$  в отношении  $3 : 10$ , считая от вершины  $C$ .

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник  $200 \times 250$ . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел  $(a; b; c)$  такие, что:

- $a > b$ ,
- число  $a - b$  не кратно 3,
- число  $(a - c)(b - c)$  является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство  $a + b^2 = 560$ .

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник со стороной 1. Площади её боковых граней равны 4, 4 и 3. Найдите высоту призмы.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
4 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\{b_n\}$  - геом. прогрессия,  $q$  - знаменатель:

$$\left\{ \begin{array}{l} b_7 = \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}} \\ b_{13} = 5-x = q^6 b_7 \\ b_{15} = \sqrt{(13x-35)(x+1)} = q^8 b_7 \end{array} \right. \quad \left. \begin{array}{l} b_{13} = q^6 b_7 \\ b_{15} = q^8 b_7 \end{array} \right\} \quad \text{ОДЗ: } \begin{cases} \frac{13x-35}{(x+1)^3} \geq 0 \\ (x+1)(13x-35) \geq 0 \\ x+1 \neq 0 \end{cases}$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x \geq \frac{35}{13} \\ x < -1 \end{cases}$$

Все преобразования на ОДЗ.

$$\frac{b_{15}}{b_7} = q^8 = \sqrt{(13x-35)(x+1)} \cdot \sqrt{\frac{(x+1)^3}{13x-35}} = \sqrt{(x+1)^4} = (x+1)^2 \Rightarrow q^2 = \sqrt{|x+1|}$$

(если  $b_7 = 0$ , то  $x = \frac{35}{13}$  и  $b_{13} \neq 0$ ,  
не если  $b_7 \neq 0$ , то  $b_{13} = 0 \Rightarrow b_7 \neq 0$ )

$$b_{13} = 5-x = b_7 \cdot q^6 = b_7 \cdot (q^2)^3 = \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}} \cdot (\sqrt{|x+1|})^3 =$$

$$= \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3} \cdot |x+1|^3} = 5-x$$

$$\begin{cases} \frac{13x-35}{(x+1)^3} |x+1|^3 = 25-10x+x^2 \\ 5-x \geq 0 \end{cases}$$

$$1) \quad x > -1 \quad \begin{cases} 13x-35 = 25-10x+x^2 \\ x \leq 5 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2-23x+60=0 \\ x \leq 5 \end{cases} \quad \begin{cases} x=20 > 5 \\ x=3 < 5 \\ x \leq 5 \end{cases}$$

$$5 \geq 3 > \frac{35}{13} > -1$$

т.е.  $x=3$  - ОДЗ

2)  $x < -1$

$$2) \quad x < -1 \quad \begin{cases} 13x-35 = -x^2+10x-25 \\ 5-x \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+3x-10=0 \\ 5-x \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=-5 < -1 \text{ - ОДЗ} \\ x=2 > -1 \text{ - не ОДЗ} \\ x \leq 5 \end{cases} \quad \text{ОДЗ: } x=-5$$

Омб.: Проверим:

$x=3 \quad b_7 = \frac{1}{4}; b_{13} = 2; b_{15} = 4$   
 $q = \sqrt{2}$  - прогрессия

Омб.: при  $\begin{cases} x=3 \\ x=-5 \end{cases}$

$x=-5 \quad b_7 = \frac{5}{4}; b_{13} = 10; b_{15} = 20 \quad q = \sqrt{2}$   
- прогрессия

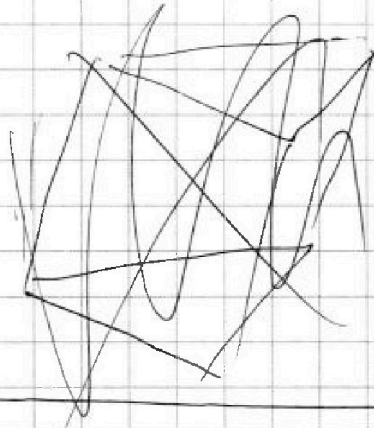


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} \sqrt{x+3} - \sqrt{4-x-2z+5} = 2\sqrt{y+x-x^2+z} \\ |y+1| + 3|y-12| = \sqrt{169-z^2} \end{cases}$$

~~5:~~  $x+3 \geq 0 \Rightarrow x \geq -3$   
 $4-x-2z \geq 0$   
 $4-2z \geq x \geq -3$   
 $\sqrt{169-z^2}$   $z \leq 7$

$$x-x^2 \leq -3+9=6$$
$$x_6 = \frac{1}{2} > -3$$

при  $x < x_6$   $x-x^2 \uparrow$

$$y+x-x^2+z \leq y+13$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~$$\sqrt{x+5} = \sqrt{4-x-z} + 5 = 2\sqrt{y+x-x^2+z}$$

$$|y+1| + 3|y-12| = \sqrt{169-z^2}$$~~

$$t = \cos x \in [-1; 1]$$

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 2t^2 - 1$$

$$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x = 4t^3 - 3t$$

$$\cos 3x + 3\cos 2x + 6\cos x = p \quad \text{— имеет } \geq 1 \text{ реш.}$$



$$(1) 4t^3 + 6t^2 + 3t - 3 = p \quad \text{— имеет } \geq 1 \text{ решение } t_0 \in [-1; 1]$$

~~$$f(t) = 4t^3 + 6t^2 + 3t - 3$$~~

~~$$f'(t) = 12t^2 + 12t + 3 = 3(2t+1)^2 \geq 0 \Rightarrow t = -\frac{1}{2} \text{ — экстр. мин.}$$~~

~~$$f'(1) \geq 0$$~~

~~$$f(1) = 0 \text{ — экстр. макс.}$$~~

$\Rightarrow f \uparrow \Leftrightarrow f(t) = p$   
 Система имеет  
 хотя бы один  
 корень  $t_0 \in [-1; 1]$   
 при  $f(1) \leq p \leq f(-1) = 10$   
 $-4 = f(-1) \leq p \leq f(1) = 10$

~~$$p \in [-4; 10]$$~~

~~$$(1) \Leftrightarrow \left( 3\sqrt{2}t + \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^3 - 3 - \frac{1}{2} = p$$~~

~~$$f(t) = \left( 3\sqrt{4}t + \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^3 - \frac{7}{2} = p$$~~

н.р.  $\uparrow \Rightarrow \geq 1$  корень  $t_0 \in [-1; 1]$   
 при  $f(-1) \leq p \leq f(1)$  т.е.  $p \in [-4; 10]$

$$\begin{cases} 4t^3 + 6t^2 + 3t - 3 = (at+b)^3 + c \\ a^3 = 4 \\ 3ab^2 = 6 \\ b^3 + c = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \sqrt[3]{4} \\ b = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \\ c = -\frac{7}{2} \end{cases}$$

~~$$3\sqrt{4}t = \sqrt[3]{p + \frac{7}{2}} - \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$~~

~~$$t = \sqrt[3]{\frac{p}{4} + \frac{7}{8}} - \frac{1}{2} = \cos x$$~~



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{при } p = 10 \quad \cancel{f=1} \quad \cos x = 1 \quad x = \cancel{\frac{\pi}{2}} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{при } p = -4 \quad \cos x = -1 \quad x = +\pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{при } p \in (-4; 10) \quad x = \pm \arccos\left(\frac{\sqrt[3]{2p+7} - \frac{1}{2}}{\frac{3}{8}}\right) =$$
$$x = \pm \arccos\left(\left(\sqrt[3]{2p+7} - 1\right) \cdot \frac{1}{2}\right) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Ответ:  $\therefore$  1 корень при  $p \in [-4; 10]$

$$\text{при } p = 10 \quad x = \cancel{\frac{\pi}{2}} + 2\pi k \quad x = 2\pi k$$

$$\text{при } p = -4 \quad x = +\pi + 2\pi k \quad x = \pi + 2\pi k$$

$k \in \mathbb{Z}$ .

$$\text{при } p \in (-4; 10) \quad x = \pm \arccos\left(\frac{\sqrt[3]{2p+7} - 1}{2}\right) + 2\pi k$$

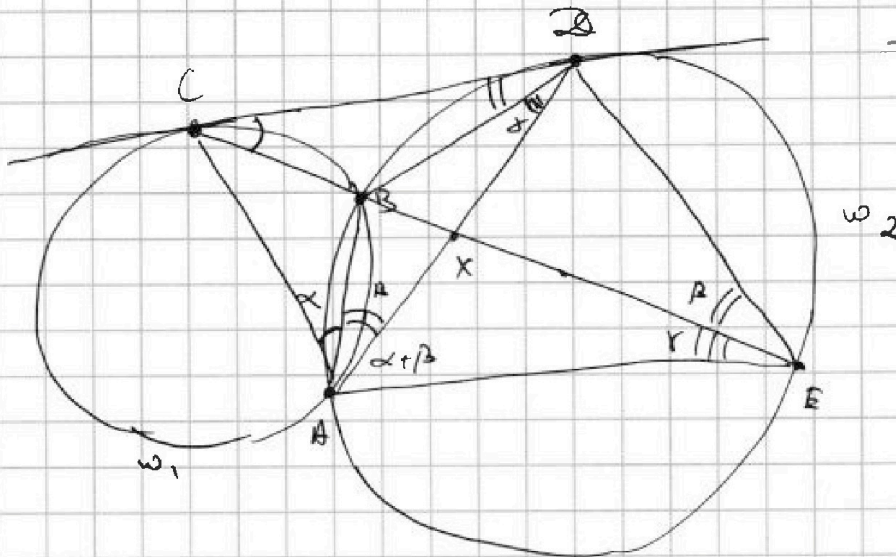


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{CX}{XE} = \frac{3}{10}$$

- 1)  $\angle CAB = \alpha$  1)  $\angle DCB = \angle CAB = \alpha$  ( $\angle$  касая и хордой)  
 $\angle BAX = \beta$  2)  $\angle DCB = \angle DAB = \beta$  ( $\angle$  касая и хордой и впис.  $\angle$ )  
 $\angle BDA = \gamma$  3)  $\angle BDA = \angle BEA = \gamma$  ( $\angle$  впис. в  $\omega_2$ )  
 $\angle BAE = \beta$  ( $\angle$  впис. в  $\omega_2$ )

4)  $\angle CXD =$

4)  $\angle XAE = 180^\circ - \angle AXE - \angle AEX = 180^\circ - \angle CXD - \gamma =$   
 ( $\Sigma \angle$  в  $\Delta$ -м) ( $\text{верт. } \angle$ )

$$= 180^\circ - (180^\circ - (\angle XCD + \angle BDC + \angle BDx)) - \gamma = \alpha + \beta + \gamma - \gamma = \alpha + \beta.$$

$\angle$  в  $\Delta$   $\omega_1$

5)  $\angle CAE = \angle XAE = \alpha + \beta \Rightarrow AX$  - бис-са  $\Delta CAE \Rightarrow \frac{CX}{XE} = \frac{AC}{AE}$   
 ( $\angle CAE$ )

т.е.  $\frac{AC}{AE} = \frac{3}{10}$

6)  $\left. \begin{array}{l} \angle CAD = \angle DAE = \alpha + \beta \\ \angle CDA = \angle DEA = \beta + \gamma \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta ACD \sim \Delta ADE \Rightarrow \frac{AC}{AD} = \frac{CD}{DE} = \frac{AD}{AE}$

$$\left(\frac{CD}{DE}\right)^2 = \frac{AC}{AD} \cdot \frac{AD}{AE} = \frac{AC}{AE} = \frac{3}{10} \Rightarrow \frac{CD}{DE} = \sqrt{\frac{3}{10}}; \frac{ED}{\omega} = \sqrt{\frac{10}{3}}$$

Ответ:  $\frac{\omega}{DE} = \sqrt{\frac{10}{3}}$   $\frac{ED}{\omega} = \sqrt{\frac{10}{3}}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

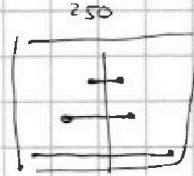
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1) Т.к.  $200 \mid 2$  и  $250 \mid 2$  то все клетки между клетками которые ~~гориз~~ <sup>гориз</sup> ~~верт~~ <sup>верт</sup> которые проходят средней линией таковы, чтобы множество обладало  $\geq 1$  симметрии.

I) верт. симметрия (отн. верт. сред. лин.)

Каждой клетке левой половины будет аналогично соответствовать клетка правой. Тогда

коп-во способов ~~быть~~ <sup>выбрать</sup> окрасить 8 клеток = коп-ву способов покрасить 4 клетки левой половины.



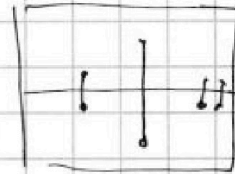
В левой половине  $\frac{250 \cdot 200}{2} = 25000$  клеток.

выбрать  $4^e$   $A = C_{25000}^4$

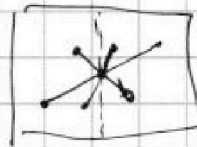
II) гор. симметрия (отн. гор. ср. лин.)

Аналогично: верхняя половина  $\leftrightarrow$  нижней

способов покрасить  $B = C_{25000}^4$



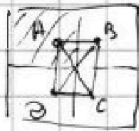
III) центр. симметрия:



Аналогично: левая половина  $\leftrightarrow$

$\leftrightarrow$  прав. половина  $\rightarrow C = C_{25000}^4$   
способов покрасить

2) Заметим, что если рисунок имеет  $\geq 2$  сим., то он имеет все 3 сим. при  $4 \times 24$  сим.



и правда: без 2 востанавливать из точки A точки B, C и D.

Тогда четверть доски аналогично задаёт раскраску всей доски. Выбрав тогда коп-во способов раскрасить  $\frac{1}{4}$  = коп-ву способов раскрасить 2 клетки в четверти доски (там  $\frac{250 \cdot 200}{4} = 12500$  клеток)



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1    2    3    4    5    6    7  
                 

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

В A, B, C учитывается D по одному разу.

Тогда кол-во способов раскрасить доску:  $A+B+C-2D =$

$$= 3 C_{25000}^4 - 2 \cdot C_{12500}^2$$

Отв.:  $3 C_{25000}^4 - 2 C_{12500}^2$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(a-c)(b-c)$$

$$a > b \Rightarrow a-c > b-c$$

$$(a-c)(b-c) = p^2, \text{ где } p \neq p\text{-простое}$$

$$1) \begin{cases} a-c = p^2 \\ b-c = 1 \end{cases} \text{ т.к. } p \neq 2$$

$$a-b = p^2 - 1 \quad /3$$

$$1) p \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow p^2 - 1 \equiv 0 \pmod{3} \text{ - не год.}$$

$$2) p \equiv 2 \pmod{3} \Rightarrow p^2 - 1 \equiv 4 - 1 \equiv 0 \pmod{3} \text{ - не год.}$$

$$3) p \equiv 0 \pmod{3} \Rightarrow p^2 - 1 \equiv 0 - 1 \equiv -1 \pmod{3} \neq 0 \text{ - не год.}$$

$$\Rightarrow p \equiv 3 \pmod{3} \Rightarrow p = 3.$$

$$\begin{cases} a-c = 9 \\ b-c = 1 \\ a-b = 808 \\ a+b^2 = 560 \end{cases}$$

$$b(b+1) = b^2 + b = 560 - 8 = 552 = 2^3 \cdot 3 \cdot 23$$

$$b^2 + b = 460$$

$$b(b+1) = 460$$

$$\text{реш. вып.: } \begin{cases} b+1 = 24 \\ b = 23 \\ b+1 = -23 \\ b = -24 \end{cases}$$

$$b^2 + b = 560 - 8 = 552 = 4 \cdot 13 \cdot 11$$

$$b(b+1) = 4 \cdot 13 \cdot 11 = 44 \cdot 13 = 1 \cdot 552 = 52 \cdot 11$$

$$b \in \mathbb{Z} \text{ - реш. нет. не представимо в виде } 2 \cdot 2 \cdot \text{ген. } \text{отличительных real}$$

$$2) \begin{cases} a-c = -1 \\ b-c = -p^2 \end{cases}$$

$$a-b = p^2 - 1 \Rightarrow p = 3$$

анал. н. 1

$$b = 23 \Rightarrow a = 31 \Rightarrow c = 22 \quad (31, 23, 22)$$

$$\begin{cases} a+b^2 = 560 \\ a+b = 8 \end{cases}$$

$$b(b+1) = 552 \text{ - реш. 6 целых real (аналог. н. 1)}$$

$$3) \begin{cases} a-c = p \\ b-c = p \\ a-b = 0 \end{cases} \quad /3$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$b = 23 \Rightarrow a = 31 \Rightarrow c = 22$$

$$(31; 23; 22)$$

$$b = -24 \Rightarrow a = -16 \Rightarrow c = 25$$

$$(-16; -24; 25)$$

$$2) \begin{cases} a - c = -1 \\ b - c = -p^2 \end{cases} \text{ где } p^2 \in \mathbb{Z}$$

$$a - b = p^2 - 1 \Rightarrow p = 3$$

аналогично

$$\begin{cases} a + b^2 = 560 \\ a - b = 8 \end{cases} \Rightarrow b(b+1) = 2^3 \cdot 3 \cdot 23$$

$$\begin{cases} b = 23 \\ b = -24 \end{cases}$$

$$b = 23 \Rightarrow a = 31 \Rightarrow c = 32$$

$$(31; 23; 32)$$

$$b = -24 \Rightarrow a = -16 \Rightarrow c = -15$$

$$(-16; -24; -15)$$

$$3) \begin{cases} a - c = p \\ b - c = p \end{cases} \Rightarrow a - b = 0 ; 3 - \text{не воз.}$$

$$4) \begin{cases} a - c = -p \\ b - c = -p \end{cases} \Rightarrow a - b = 0 ; 3 - \text{не воз.}$$

Ответ:  $(31; 23; 22); (-16; -24; 25); (31; 23; 32); (-16; -24; -15)$

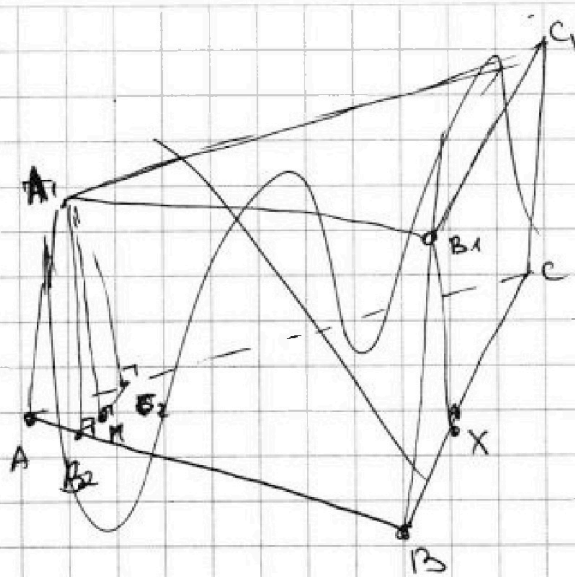


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1  2  3  4  5  6  7

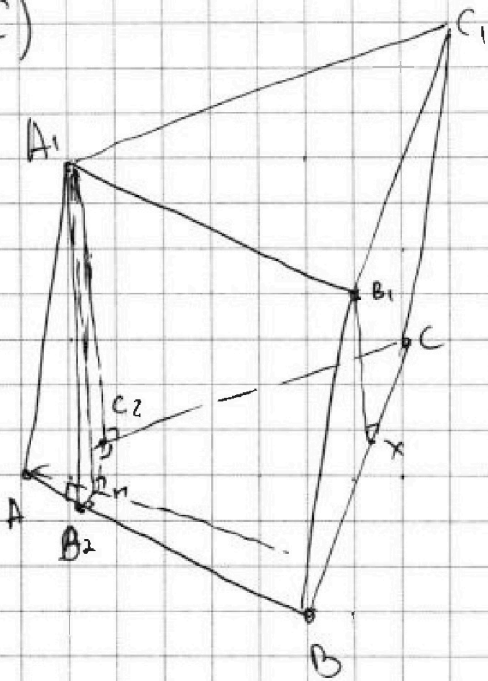
СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{aligned} & \left. \begin{aligned} & S_{AA_1B_1B} = S_{AA_1C_1C} = 4 \\ & S_{BB_1C_1C} = 3 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} & ABC, A_1B_1C_1 - \text{основания} \\ & A_1B_2 \perp AB \\ & S_{AA_1B_1B} = A_1B_2 \cdot AB = A_1B_2 = 4 \\ & A_1C_2 \perp AC \\ & S_{AA_1C_1C} = A_1C_2 \cdot AC = A_1C_2 = 4 \\ & B_1X \perp BC \\ & S_{BB_1C_1C} = B_1X \cdot BC = B_1X = 3 \end{aligned} \\ & A_1C_2 = A_1B_2 = 4 \end{aligned}$$

I)



$$\left. \begin{aligned} & A_1H \perp (ABC), H \in (ABC) \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned} \text{По Th Пифагора: } & AB_2 = \sqrt{AA_1^2 - A_1B_2^2} = \\ & = \sqrt{AA_1^2 - A_1C_2^2} = AC_2 \\ B_2H & = \sqrt{A_1B_2^2 - A_1H^2} = \sqrt{A_1C_2^2 - A_1H^2} = C_2H \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} & A_1H \perp (ABC) \\ & A_1C_2 \perp AC \\ & HC_2 = \text{пр}(A_1C_2)_{ABC} \end{aligned} \right\} \Rightarrow HC_2 \perp AC \text{ по Th 3}^{\text{er}} \perp \text{-x}$$

$$\left. \begin{aligned} & A_1H \perp (ABC) \\ & A_1B_2 \perp AB \\ & HB_2 = \text{пр}(A_1B_2)_{ABC} \end{aligned} \right\} \Rightarrow HB_2 \perp AB \text{ по Th 3}^{\text{er}} \perp \text{-x}$$

$$\left. \begin{aligned} & \angle AC_2H = \angle AB_2H \\ & AC_2 = AB_2 \\ & HC_2 = B_2H \end{aligned} \right\} \Rightarrow \Delta AC_2H = \Delta AB_2H \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle C_2AH = \angle B_2AH \Rightarrow AH$$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} & \text{I) } AH - \text{вис-са } \Delta ABC \\ & \text{II) } AH - \text{вис-са } \Delta A_1B_1C_1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow BC \perp (AHA_1) \Rightarrow \Delta ABC$$

$$\left. \begin{aligned} & \text{I) } AH - \text{вис-са } \Delta ABC \\ & \Delta ABC - \text{пл} \end{aligned} \right\} \Rightarrow AH \perp BC \text{ (т.к. } AH \perp (ABC)) \Rightarrow BC \perp (AHA_1) \Rightarrow BC \perp AB_1 \text{ (т.к. } AB_1 \perp AA_1)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

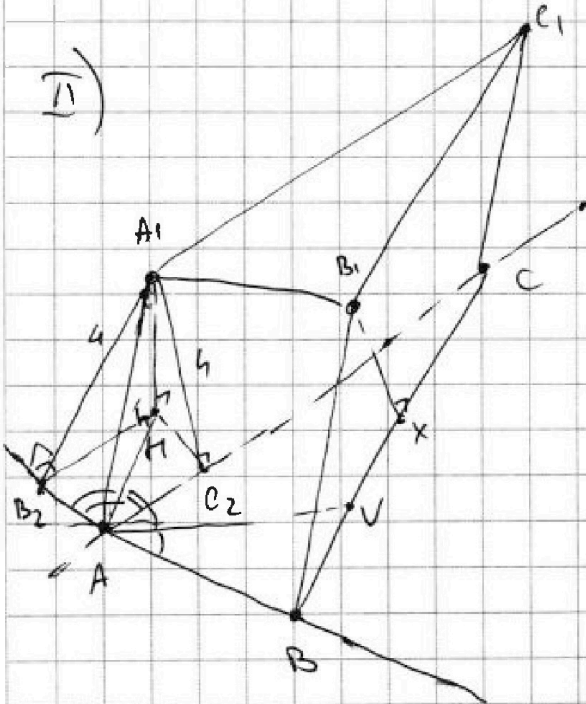
СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\left. \begin{array}{l} BB_1 \perp BC \\ B_1K \perp BC \end{array} \right\} \Rightarrow BB_1 \times \in B_1 \Rightarrow BB_1 = 3 = AA_1 \quad (\text{т.к. } AA_1 \perp BB_1) \\ \text{т.к. призма}$$

Тогда в  $\triangle AB_2A_1$  катет  $A_1B_2 = 4 \Rightarrow$  гипотенузы  $AA_1 = 3$ .

Такого быть не может. Значит  $A$  лежит на внешней бис-се



т.ч.  $C_2 \in [AC]$   
 $B_2$  лежит на  $AB$  за границей  $AB$

$\exists$   $AV$ -бис-са  $\triangle ABC$   
Тогда  $AH \perp AV$ , т.ч.  
 $\angle CAH + \angle CAV = \frac{1}{2}(\angle CAB_2 + \angle CAB) =$   
 $= \frac{1}{2} \cdot 180^\circ = 90^\circ$

$\left. \begin{array}{l} AV \perp AH \\ AV \perp AH \\ AV \perp BC \quad (\text{т.ч. бис-са } AV) \\ AV, BC, AH \in (ABC) \end{array} \right\} \Rightarrow AH \parallel BC$

$$\left. \begin{array}{l} AH \parallel BC \\ AA_1 \perp BB_1 \end{array} \right\} \Rightarrow (AA_1H) \parallel (BB_1C)$$

$AH \parallel BC$   
 $AA_1 \perp AH$   
 $BB_1 \perp BC$

$\left. \begin{array}{l} A_1H \perp AH \\ B_1X \perp BC \\ AH \parallel BC \\ A_1H, AH \subset (AA_1H) \\ B_1X, BC \subset (BB_1C) \\ (AA_1H) \parallel (BB_1C) \end{array} \right\} \Rightarrow A_1H \parallel B_1X$

$\left. \begin{array}{l} A_1H \parallel B_1X \\ A_1, B_1 \in (A_1B_1C_1) \\ H, X \in (ABC) \\ (ABC) \parallel (A_1B_1C_1) \end{array} \right\} \Rightarrow A_1H = B_1X = h \Rightarrow$   
высота призмы  
 $h = A_1H = 3$ .

Отв.:  $h = 3$ .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

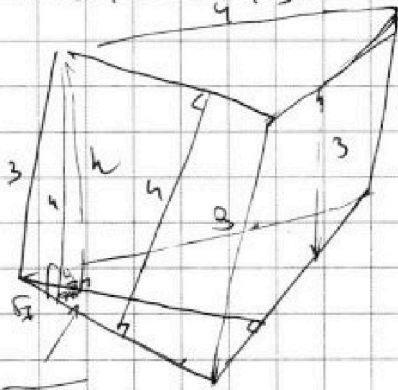
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 + 16 = \frac{1}{4} + 9$$

$$x^2 = \frac{1}{4} < 0$$

$$x^2 + 64 = \frac{1}{4} + 36$$

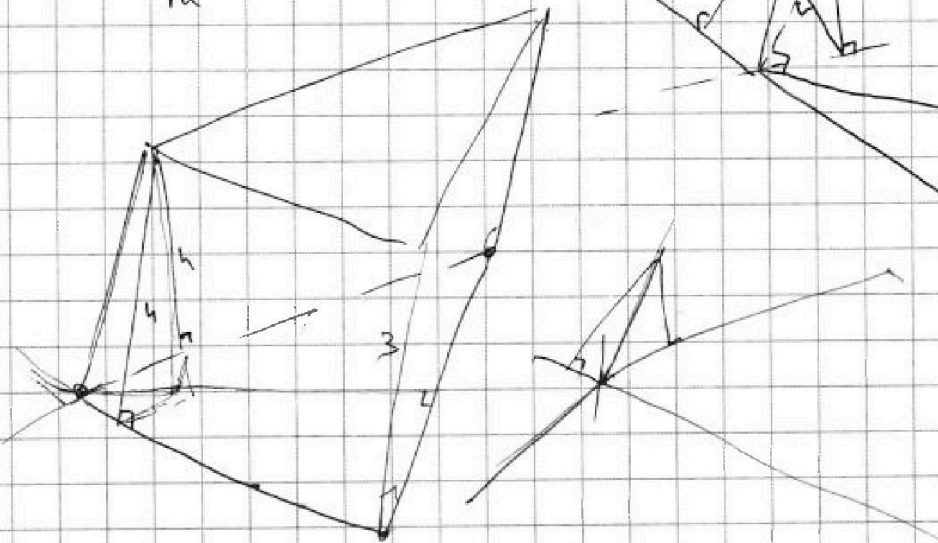
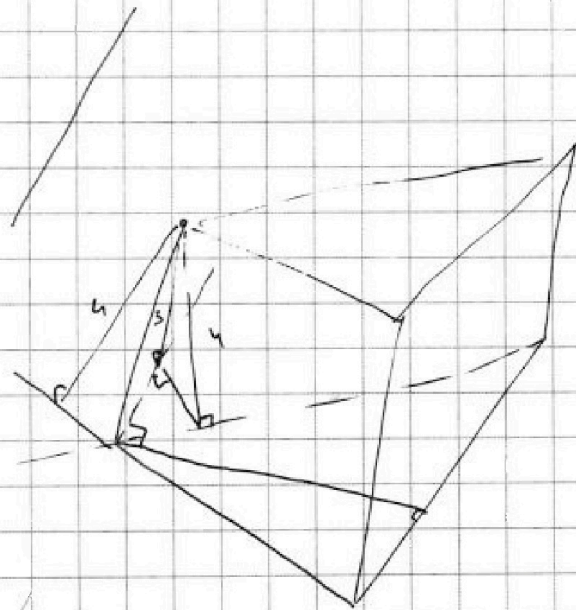
$$16 - 9 = 7$$



$$\sqrt{16 - h^2}$$

h

$$9 - h^2 = 16 - h^2 + 7$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\cos 3x + 3\cos 2x + 6\cos x = P$$

$$6\cos^2 x - 3 + 6\cos x$$

$$2\cos^2 x + 2\cos x - 1$$

$$\textcircled{+} = 1 + 2$$

$$2\cos 2x \cdot \cos x + 3\cos 2x + 5\cos x = P$$

$$f(t) = 4t^3 + 6t^2 + 3t - 3 = P$$

$$2t + t - 1$$

~~$$4t^3 - 3t + 6t^2 - 3 + 6t = P$$~~

~~$$4t^3 + 3t$$~~

$$f'(t) = 12t^2 + 12t + 3$$

$$4t^2 + 4t + 1$$

$$4\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 = 4t^2 + 4t + 1$$

$$t = -\frac{1}{2}$$

$$f(-1) = -4 + 6 - 3 - 3 = -4$$

$$f(1) = 10$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 =$$

$$a^3 = 4 \Rightarrow a = \sqrt[3]{4}$$

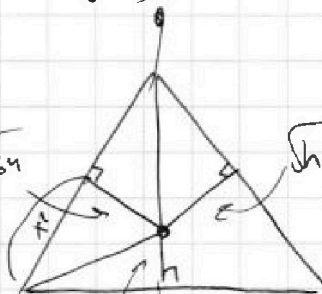
$$3a^2b = 6$$

$$b = \frac{2}{(\sqrt[3]{4})^2} = 3\sqrt{\frac{8}{16}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$

$$f(t) = \left(\sqrt[3]{4}x + \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^3$$

$$\frac{1}{2}h = 4$$

$$h = 8, 8; 6$$

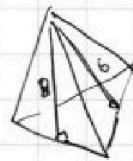


$$\frac{1}{4} + 9 = x^2 + 16$$

$$x^2 = 5 - \frac{1}{4}$$

$$x^2 = \frac{19}{4}$$

$$x = \frac{\sqrt{19}}{2}$$



$$\frac{1}{4} +$$

$$h^2 - 36 + \frac{1}{4} - h^2 + 64 = \frac{\sqrt{113}}{2}$$

$$\frac{24}{223}$$

$$\frac{72}{4852}$$

$$\frac{\sqrt{113}}{2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{113}}$$

$$\frac{12}{4} \frac{\sqrt{113}}{2}$$

$$4+6+3-3$$

$$\cos(2x+x) = \cos 2x \cdot \cos x - \sin 2x \cdot \sin x =$$

$$= 2\cos^3 x - \cos x - 2\sin x \cdot \cos x =$$

$$-2$$

$$-2+6-3-3$$

$$-\frac{1}{\sqrt{5}} \frac{30}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\frac{5}{\sqrt{5}} - \frac{30}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$-\frac{24}{\sqrt{5}}$$

$$5 \cdot 13$$

$$-65$$

$$-35$$

$$\frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$-100$$

$$\frac{5}{4}$$

$$\frac{100}{2}$$

$$4 \cdot 4 \cdot 25$$

$$4 \cdot 5$$

$$22 \cdot 25$$

$$64 - 36 = 28$$

$$28 - 4$$

$$80 + 32$$

$$112 + 1$$

$$\frac{113}{2}$$

$$\frac{113}{2}$$

$$\frac{12}{4} \frac{\sqrt{113}}{2}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА  
 ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2$$

$$15$$

→

$$\sqrt{\frac{39-35}{4^2}} = \sqrt{\frac{4}{4^2}} = \frac{1}{10} \quad \frac{-65-35}{-4^2} = \frac{100}{4^2} = \frac{25}{4^2}$$

$$\left(\frac{5}{4}\right)$$

$$4 \cdot 4$$

$$4^2 = 16 \quad \sqrt{16} = 4$$

$$100 \cdot 4 = 400$$

$$200$$

$$25 \cdot 4 \cdot 4 = 400$$

$$5 \cdot 4 = 20$$

$$x \geq -3$$

$$4 \rightarrow x+2 \geq 2-3$$

$$z \leq 7$$

$$\sqrt{20} \quad 20 \cdot \frac{5}{4} = 400 \cdot 20$$

$$\sqrt{2}$$

$$\cos(2x+x) = \cos 2x \cdot \cos x - \sin 2x \cdot \sin x = (2\cos^2 x - 1)\cos x - 2\cos x \sin x$$

$$= 2\cos^3 x - \cos x - 2\cos x \sin x$$

$$4\cos^3 x - 3\cos x$$

$$\cos 3x + 3\cos 2x + 6\cos x = p$$

$$4\cos^3 x - 3\cos x + 6\cos^2 x - 3 + 6\cos x = p$$

$$4\cos^3 x + 6\cos^2 x + 3\cos x - 3 = p$$

$$f(t) = 4t^3 + 6t^2 + 3t - 3 = p$$

$$f'(t) = 12t^2 + 12t + 3 = 0$$

$$4t^2 + 4t + 1 = 0$$

$$t = -\frac{1}{2}$$

$$t = -\frac{1}{2}$$

$$f'(t) > 0$$

$$-4 + 6 - 3 - 3 = 10$$

$$\text{при } p \in [f(-1/2); f(1)] = [-4; 10]$$

$$\cos(2x+x) = \cos 3x$$

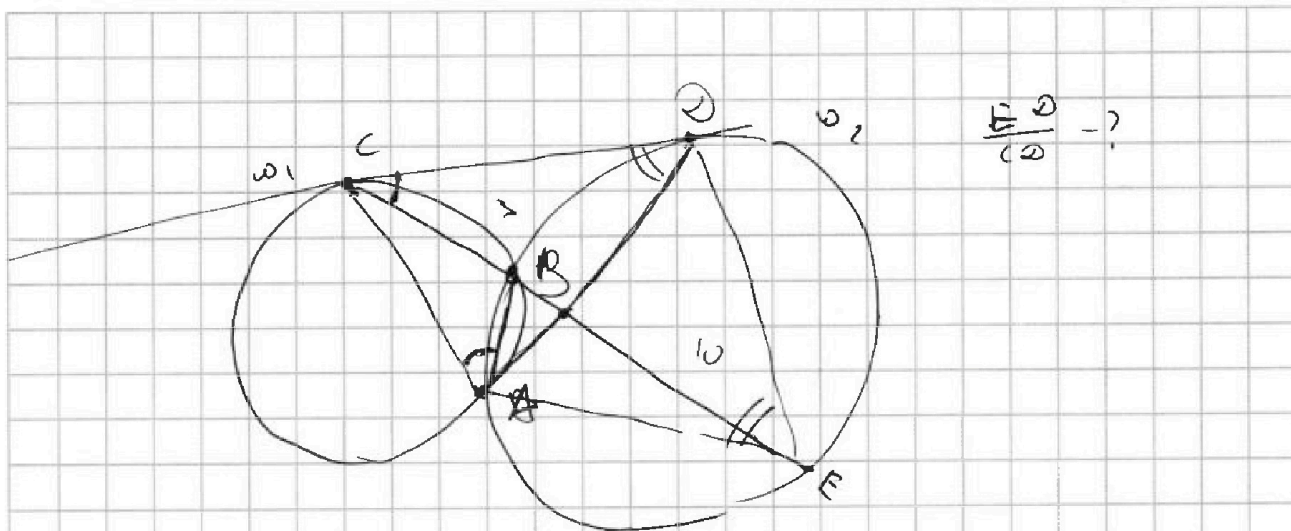
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



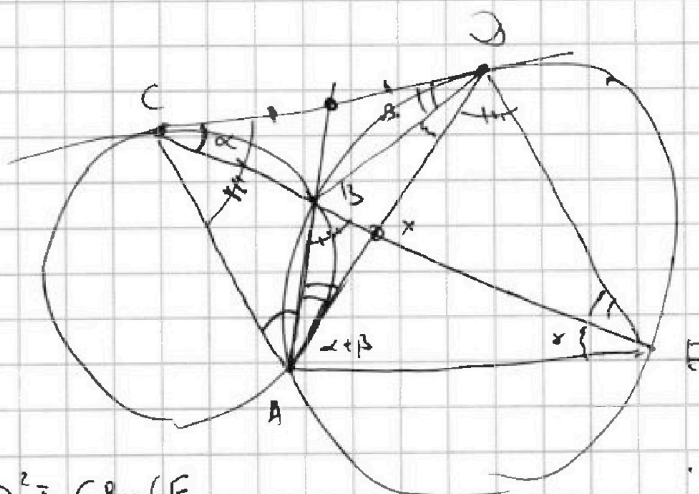
1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{CD}{CE} = ?$$



$$\frac{CY}{YE} = \frac{3}{10}$$

$$\frac{CA}{AB} = \frac{3}{10}$$

$$CD^2 = CB \cdot CE$$

$$\frac{CD}{CB} = \frac{CE}{CD}$$

$$\frac{ED}{AB} = \frac{EX}{XA}$$

$$\frac{CD}{DE} = \frac{AC}{AD} = \frac{AD}{AE}$$

$$\left(\frac{CD}{DE}\right)^2 = \frac{AC}{AD} \cdot \frac{AD}{AE}$$

$$180^\circ - (1 - \alpha + \beta - \gamma)$$

$$\begin{aligned} \cos(3x) &= \cos 2x \cdot \cos x - \sin 2x \cdot \sin x = \\ &= 2\cos^2 x - \cos x - 2\sin x \cdot \cos x = \\ &= 2\cos^3 x - \cos x - 2\cos x + 2\cos^3 x \end{aligned}$$



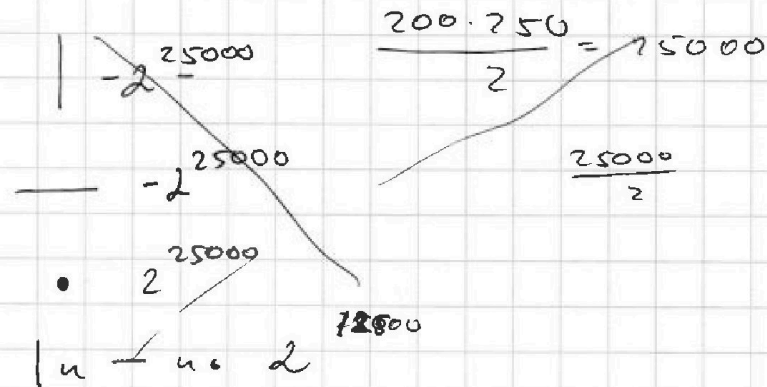
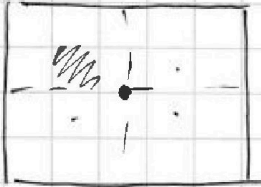


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{aligned}
 & | \quad C_{25000}^4 \\
 & - \quad C_{25000}^2 \\
 & \circ \quad C_{25000}^2 \\
 & | u - u \circ C_{12500}^2
 \end{aligned}$$

$$\text{всего: } 3 C_{25000}^4 - 2 \cdot C_{12500}^2 = 25000!$$

$$\begin{array}{r}
 552 | 4 \\
 138 \\
 \hline
 22 \\
 \hline
 138 \\
 \hline
 55
 \end{array}$$

$$a + b^2 = 560$$

$$138 | 2$$

$$2^3 \cdot 3 \cdot 7$$

<del>1</del>	0	0
1	1	1
2	1	
7	3	0

$$p = 3$$

$$\begin{aligned}
 & a - c = p^2 \\
 & b - c = 1 \\
 & a - b = p^2 - 1 \quad | :3 \\
 & \begin{array}{r} 561 | 3 \\ 487 | 3 \\ \hline 74 \end{array}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & a + b^2 = 560 \\
 & b^2 + b = 560 - p^2 + 1 \\
 & 561 - p^2 \\
 & b(b+1) =
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r}
 552 | 4 \\
 143
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 & 8.3 \quad ?) a - c = -1 \\
 & \quad \quad b - c = p^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r}
 12 \\
 22 \\
 \hline
 529 \\
 + 31 \\
 \hline
 560
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 23 \\
 + 23 \\
 \hline
 46 \\
 + 229 \\
 \hline
 275
 \end{array}$$