



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [3 балла] Найдите все действительные значения x , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её седьмой член равен $\sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}$, тринадцатый член равен $5-x$, а пятнадцатый член равен $\sqrt{(13x-35)(x+1)}$.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+3} - \sqrt{4-x-z} + 5 = 2\sqrt{y+x-x^2+z}, \\ |y+1| + 3|y-12| = \sqrt{169-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p , при которых уравнение

$$\cos 3x + 3 \cos 2x + 6 \cos x = p$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p .

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD , чем точка A . Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E . Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $3 : 10$, считая от вершины C .

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 200×250 . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:

- $a > b$,
- число $a - b$ не кратно 3,
- число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство $a + b^2 = 560$.

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник со стороной 1. Площади её боковых граней равны 4, 4 и 3. Найдите высоту призмы.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$35 - 13x = (5 - x)^2$$

$$35 - 13x = 25 - 10x + x^2$$

$$x^2 + 3x - 10 = 0. \text{ ~~реш~~$$

$$(x+5)(x-2) = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} x = 2 & \text{не подходит} \\ x = -5 & \checkmark \end{cases}$$

$\Rightarrow x = -5$, тогда $q = \sqrt[4]{4}$, проверкой убеждаемся, что подходит.

3) Если $q = -\sqrt[4]{x+1}$, то мы получим

тоже самое, что и в случае 1, т.к.

$$\left(-\sqrt[4]{x+1}\right)^6 = \left(\sqrt[4]{x+1}\right)^6. \text{ В этом случае } x = -5 \text{ и } q = -\sqrt[4]{4}.$$

4) С $q = -\sqrt[4]{x+1}$ аналогично. Станем,

заменим это число как. представим возведем по модулю, т.к. $b_{15} > b_7$, но q можем быть отрицательными.

В таком случае члены будут чередоваться знаками.

\Rightarrow Ответ: $x = -5$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1. Если q - знаменатель дроби, то:

$$b_7 = b, q^6, \quad b_{13} = b, q^6, \text{ откуда:}$$

$$\frac{b_{13}}{b_7} = q^6 = (x+1)^2 \Rightarrow q = \pm \sqrt[6]{(x+1)^2}$$

Заметим, что для всех x :

$$(13x - 35)(x+1) \geq 0$$

1) Если $q = \sqrt[6]{(x+1)^2}$, то: м.е. $x \geq -1$.

$$b_{13} = b_7 \cdot q^6 = \sqrt{13x - 35}, \text{ м.е.}$$

$$5 - x = \sqrt{13x - 35}, \text{ откуда при } x \leq 5$$

$$\text{имеем: } 25 - 10x + x^2 \geq 13x - 35.$$

$$x^2 - 23x + 60 \geq 0.$$

$$\text{т.е. } D = 23^2 - 240 = 529 - 240 = 289$$

$$x_1 = \frac{23 + \sqrt{289}}{2} > \frac{23 + 17}{2} = 20 > 5$$

$$x_2 = \frac{23 - \sqrt{289}}{2} > \frac{23 - 17}{2} = 3 > 0, \text{ но } < \frac{25}{13}$$

$$\Rightarrow \text{отсутствуют действительные } x = \frac{23 + \sqrt{289}}{2} \text{ и } \frac{23 - \sqrt{289}}{2}.$$

2) Если $q = \pm \sqrt[6]{(x+1)^2}$, м.е. $x < -1$, то

$$b_{13} = \sqrt{35 - 13x}, \quad \sqrt{35 - 13x} = 5 - x.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$f(x) = 4 \cos^3 x + 6 \cos^2 x + 3 \cos x - 3$$

$$f'(x) = -9 \sin x (2 \cos^2 x + 2 \cos x + 3) =$$

$$= -9 \sin x (2 \cos x + 1)^2. \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \\ x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Заметим, что $f(x + 2\pi) = f(x)$,

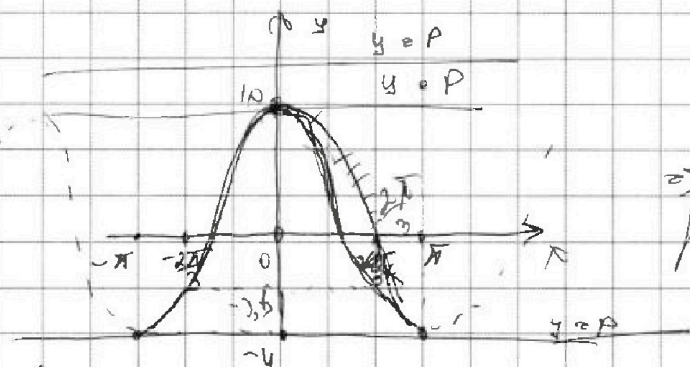
\Rightarrow f \in $[-\pi; \pi]$ $f'(x)$:



Т.е. $x = -\pi + 2\pi k$ — можем использовать, $x = 2\pi k$ — можем использовать.

Значит $f(x)$ \in $[-\pi; \pi]$.

$$\begin{aligned} f(-\pi) &= -4 & f\left(\frac{2\pi}{3}\right) &= -3,5 \\ f(0) &= 10 & f\left(-\frac{2\pi}{3}\right) &= 3,5 \\ f(\pi) &= -4 \end{aligned}$$



Т.е. $B(f(x)) = [-4; 10]$.
 \Rightarrow при $p \in (-\infty; -4) \cup (10; +\infty)$ решений нет.

при $p \in [-4; 10]$ — бесконечное множество решений с периодом 2π .

Ответ: при $p \in [-4; 10]$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

3. Преобразуем левую часть:

$$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \cos 3x + 3\cos 2x + 6\cos x &= 4\cos^3 x - 3\cos x + 3(2\cos^2 x - 1) + 6\cos x = \\ &= 4\cos^3 x + 6\cos^2 x + 3\cos x - 3 \end{aligned}$$

$$\text{Пусть } \cos x = t, |t| \leq 1$$

$$f(t) = 4t^3 + 6t^2 + 3t - 3$$

$$f'(t) = 12t^2 + 12t + 3 = 3(2t+1)^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow t \geq -\frac{1}{2} \text{ — м. перегиба.}$$

т.е. $f(t)$ — мон. на всем. на обе. отрез.

доказ

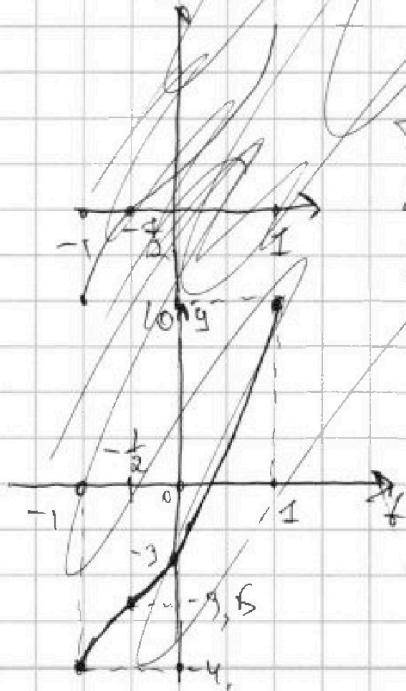
$$f(1) = -4$$

$$f(-\frac{1}{2}) = -3,5$$

$$f(0) = -3$$

$$\text{т.е. } B(f(t)) = [-4; 0] \Rightarrow$$

или $\rho \in (-\infty; -4) \cup (0; \infty)$
уменьшить ρ !



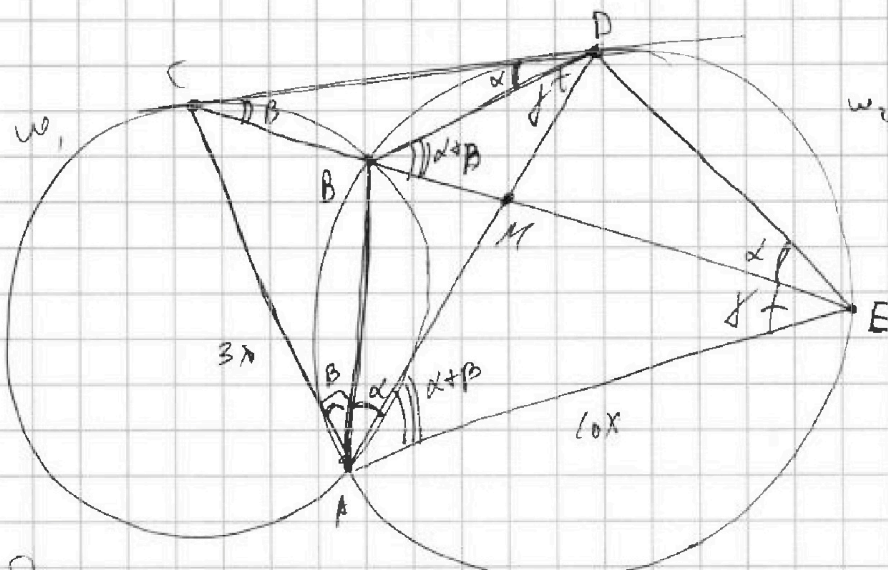
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

4.



Решение: $\exists AD \cap CE = M$, $\angle BDC = \alpha$, $\angle BCD = \beta$, тогда
 м.к. CD - касательная к w_1 и к w_2 , то
 $\angle BED = \alpha$, $\angle CAB = \beta$ (из св-ва угла между кас. и хордой), $\angle DAB = \alpha$ (из вписанности $\triangle BDE$)
 $\Rightarrow \angle CAD = \alpha + \beta$. $\angle DBM$: $\angle DBM = \alpha + \beta$ (внешний)
 $\Rightarrow \angle DAE = \alpha + \beta$ (из вписанности $\triangle BDE$)

$\Rightarrow KM$ - биссектриса в $\triangle ACE \Rightarrow$

$$\frac{CM}{MB} = \frac{AC}{AB} = \frac{3}{10}, \quad \exists AC = 3x \Rightarrow AE = 10x,$$

$\exists \angle BDM = \gamma \Rightarrow \angle BEA = \gamma$. $\triangle ADE$ и $\triangle ACD$:

$\triangle ADB \sim \triangle ACD$ по 2 углам \Rightarrow

$$\frac{AE}{AD} = \frac{AD}{AC} \Rightarrow AD^2 = 30x^2 \Rightarrow AD = x\sqrt{30}$$

$$\Rightarrow \frac{DE}{CD} = \frac{AD}{AC} = \frac{x\sqrt{30}}{3x} = \frac{\sqrt{30}}{3}$$

Ответ: $\frac{\sqrt{30}}{3}$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА

1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

5. Обозначим множество A , B и C как мн-во словоб разкроем 4 клетки горизонт, 4 мм, верт. 4 мм. и центр. 4 мм. Того же по человеку предвзят критик:

$M = A \cup B \cup C$. По формуле Вентерни-исключений: $A \cup B \cup C = A + B + C - AB - BC - CA + ABC$.

Найдем все эти мн-ва:

A : это кол-во способов закрасить 4 клетки крестом средней частью 4 мм в прямоугольнике,

т.е. C_{25000}^4 , т.к. фигура и определяется однозначно, а клетки в верхней части - половина от всей.

B : Аналогично, C_{25000}^4 .

C : Это мн-во кол-во способов закрасить 4 клетки, при этом закрасившие ^{первую} клетку, мы выкальваем из 4 мм. ей, т.е. способ мн. 4 .

т.е. способов будем: $5 \cdot 10^4 \cdot (5 \cdot 10^4 - 2) \cdot (5 \cdot 10^4 - 2) \cdot (5 \cdot 10^4 - 6)$

~~мн-во~~

AB : это кол-во способов выбрать

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

2 клетки в левом нижнем квадрате
(прямоугольник полученный разделив
средним шрифтом), т.е. остальные
определяются однозначно, $\Rightarrow C_{12500}^2$

ВАС: Запомним, что если выделится верх,
шрифтом и центрировано, то из нее следует
и шрифтом. Шрифтом, т.е. ВАС = АПС, АПВАС.
Таких способов, относительно САПВ, будет
 C_{12500}^2 , т.е. и АПС - C_{12500}^2 , т.е. формально
выделится клетки в левом нижнем квадрате,
остальные будут определяться однозначно.
Запомним, что $\cancel{АПС + ВАС} = \frac{2 \cdot C_{12500}^2}{2}$, т.е. в
уже пометили относительно АПС ~~уже есть решение~~
Все способы ~~для ВАС~~.

~~ААВАС~~: АПВАС: C_{12500}^2

$\Rightarrow M = 2 \cdot C_{25000}^4 + (5 \cdot 10^4) \cdot (5 \cdot 10^4 - 2) \cdot (5 \cdot 10^4 - 6) \cdot (5 \cdot 10^4 - 4) - 2 \cdot C_{12500}^2$

Ответ: $2 \cdot (C_{25000}^4 - C_{12500}^2) + 5 \cdot 10^4 \cdot (5 \cdot 10^4 - 2) \cdot (5 \cdot 10^4 - 4) \cdot (5 \cdot 10^4 - 6)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

5) $\begin{cases} a-c = -1 \\ b-c = -p^2 \end{cases}$ Аналогично получим $a-b = p^2$, $a-b = a$
т.е. $\begin{cases} b_1 = 23, a_1 = 31, c_1 = 32 \\ b_2 = -24, a_2 = -16, c_2 = -15 \end{cases}$

\rightarrow тройки $(31, 23, 32)$ и $(-16, -24, -15)$ - подходят

6) $\begin{cases} a-c = -p^2 \\ b-c = -1 \end{cases} \rightarrow$ Аналогично со случаем 3)
получим произведения $a-b < 0$.

Других случаев нет \rightarrow

Ответ: $(31, 23, 32), (-16, -24, -15), (31, 23, 32), (-16, -24, -15)$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

6. $\exists (a-c)(b-c) = p^2$, p -простое, тогда возможны 4 случая:

1) $a-c = p, b-c = p$, в том числе случае $a=b$, но $a > b \Rightarrow \emptyset$.

2) $a-c = -p, b-c = -p$ аналогично с 1).

3) $a-c = 1, b-c = p^2$, аналогично

~~$a-b = 1-p^2$~~ , но $p^2 \geq 2 \Rightarrow 1-p^2 < 0$, а

по условию $a-b > 0 \Rightarrow \emptyset$.

~~$a-c = 1, b-c$~~

4) $a-c = p^2, b-c = 1$, тогда:

$a-b = p^2 - 1 = (p-1)(p+1)$. По условию

$a-b \geq 3 \Rightarrow p-1 \geq 3$ и $p+1 \geq 3$, но в

том же случае $p = 3$ (и.и. ^{отсюда} $p=3$ по условию 3 по условию

и условию $a-b \geq 3 \Rightarrow p=3, \Rightarrow$

$a-b = 8, a = 8+b$, аналогично

$8+b+b^2 = 560 \Rightarrow b^2+b-552=0$

$(b+24)(b-23) = 0 \Rightarrow b \begin{cases} b_1 = 23 \\ b_2 = -24 \end{cases}$

Тогда $a_1 = 31 \Rightarrow c_1 = 22$

$a_2 = -16 \Rightarrow c_2 = -25$

Т.е. тройки $(31, 23, 22)$ и $(-16, -24, -25)$ подходят.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1. $b_1 = \dots$ $b_{1,5} = \dots$ $b_{1,3} = 5 - x$ $b_{1,5} = \sqrt{(x+1)(3x-35)}$ $b_{1,3} = b_{1,5} \cdot q^6 = \sqrt{(x+1)(3x-35)} \cdot q^6$

$b_{1,5} = \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}$ $b_{1,3} = 5 - x$ $b_{1,5} = \sqrt{(x+1)(3x-35)}$

$b_{1,5} = b_{1,3} \cdot (x+1)^{\frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}} \cdot (x+1)^{\frac{2}{3}}$

$\cos(2x+x) = b_{1,4}^2 = (5-x)^2 \sqrt{(x+1)(3x-35)}$

$\Rightarrow \cos 2x \cos x = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$

$b_{1,5} = b_{1,3} \cdot q^6 = b_{1,3} \cdot \sqrt[6]{x+1}$

$\cos 3x \cos 2x \cos x = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$

$b_{1,3} = b_{1,5} \cdot q^6 = \sqrt{13x-35} = 5-x$

$b_{1,5} = b_{1,3} \cdot q^6$

$b_{1,3} = b_{1,5} \cdot q^6$

$\Rightarrow \frac{b_{1,5}}{b_{1,3}} = q^6 = \sqrt{(x+1)^4}$

$q^6 = (x+1)^2$

$q^4 = |x+1|$

$q = \sqrt[4]{|x+1|}$

$13x-35 = 25 - 10x + x^2$

$x^2 - 23x + 60 = 0$

$D = 23^2 - 240 = 36$

$x = 23 \pm 6$

$x = 29$ or $x = 17$

$x = 29$ $\Rightarrow q = \sqrt[4]{30}$

$x = 17$ $\Rightarrow q = \sqrt[4]{18}$

$(\sqrt[4]{-x-1})^6 = \dots$

$(\sqrt[4]{-x-1})^6 = \dots$

$= \sqrt[6]{(-x-1)^6}$

$= \sqrt[6]{(x+1)^6}$

$= |x+1|$

$= \sqrt[4]{|x+1|} \cdot \sqrt[4]{|x+1|} = \sqrt[4]{|x+1|} \cdot \sqrt[4]{|x+1|} = \sqrt[4]{|x+1|^2} = \sqrt[4]{|x+1|}$

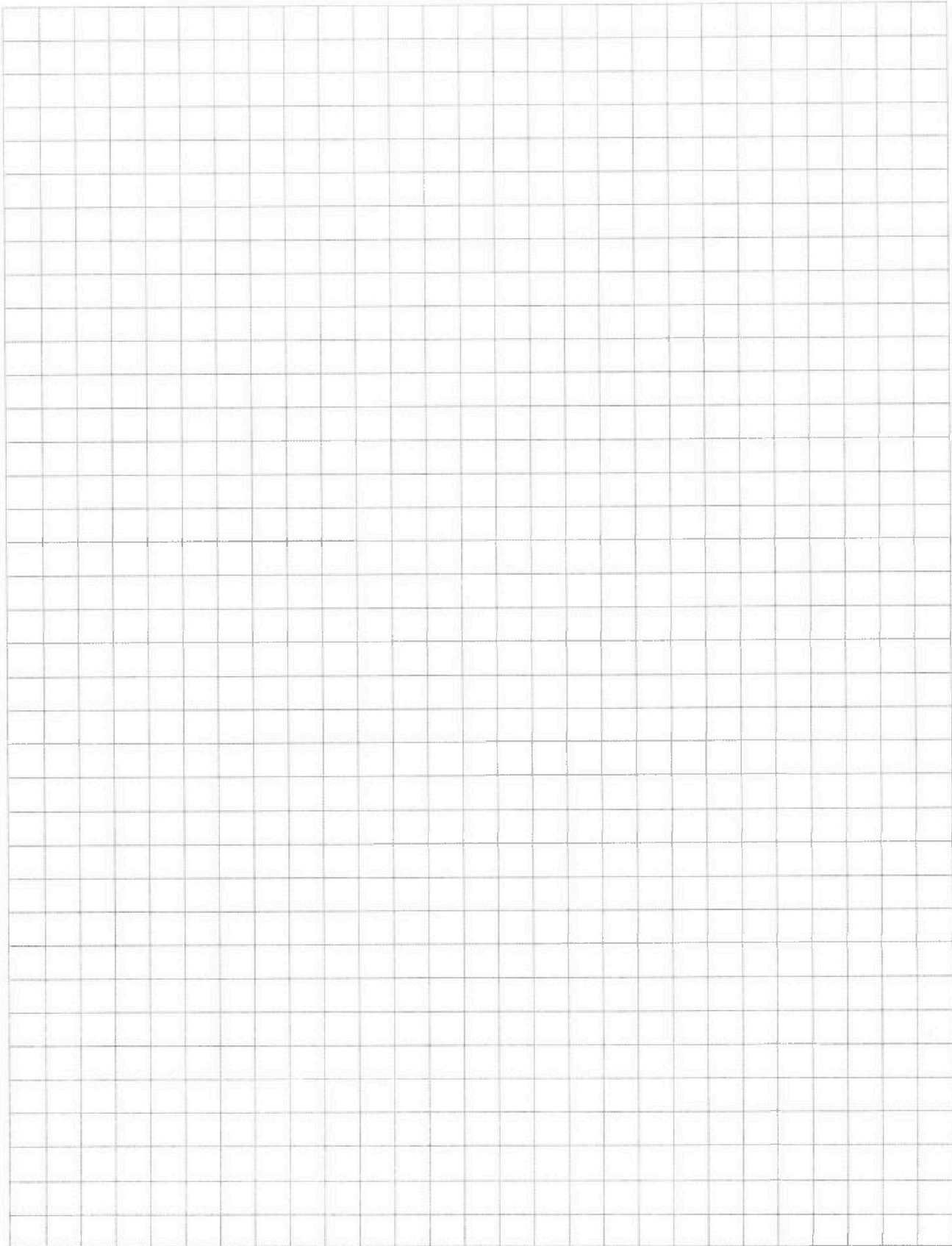


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

6. 1) $a > b$

$a - b \neq 3$

$(a-c)(b-c) = p^2$, p - простое.

1) $a-c = p$, $b-c = p$, $\rightarrow a = b$ \emptyset

2) $a-c = 1$, $b-c = p^2$, $a-b = 1 - p^2 = (1-p)(1+p) < 3$
 $p \geq 2 \Rightarrow a-b < 0$ \emptyset .

3) $a-c = p^2$, $b-c = 1 \Rightarrow a-b = (p-1)(p+1) \geq p-3$
 $\Rightarrow p = 3 \Rightarrow p = 3$

$a - b = 8$

$a = 8 + b$

$b^2 + b - 552 = 0$

$p =$

$b =$

$(b+24)(b-23) = 0$.
 $b = 23$, $a = 31 = 6 \cdot 5 + 1 = 8 \cdot 3 + 23 = 24 + 23$
 $b = -24$, $a = -16 = 2 \cdot 8 + 23$

$552 = 552 \sqrt{}$
 $\begin{array}{r} 552 \\ 138 \cdot 2 \\ \hline 138 \cdot 2 \\ \hline 0 \end{array}$

$(31-30)(-9)$

$a-c = -1$

$b-c = -p^2$

$a-b = p^2 - 1$

$a-b = 8$, $b_1 = 23$, $a_1 = 31$

$c = 32$

$(b-c)(a-c) = 9$

$a-c = a-1$, $c = 30$, $a = -17$

$c = b-1 = 22$

-25

$a-c = -p^2$

$b-c = -1$

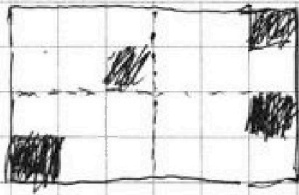


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

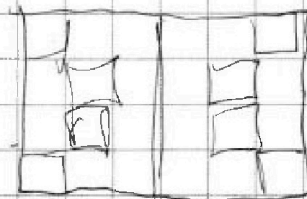
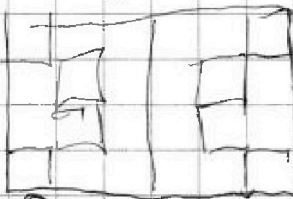
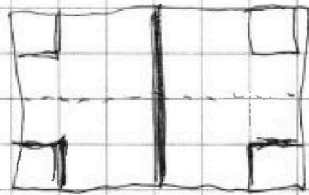
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$2 \cdot 10^4 \cdot (2 \cdot 10^4 - 2) \cdot (2 \cdot 10^4 - 4) \cdot (2 \cdot 10^4 - 6)$$

$$\frac{2 \cdot 10^4 + (2 \cdot 10^4 - 1) \cdot (2 \cdot 10^4 - 2) \cdot (2 \cdot 10^4 - 3) \cdot 8}{(2 \cdot 10^4)!}$$

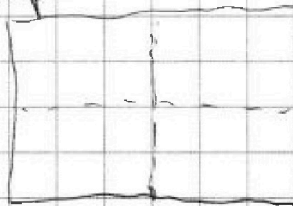
$$\frac{(2 \cdot 10^4 - 4)!}{(2 \cdot 10^4)!} \cdot 8$$



$$4t^3 + 6t^2 + 3t - 3 = 0$$

$$t = \sqrt{1 - t^2}$$

$$\sqrt{(1 - t^2)(2t + 1)^2}$$

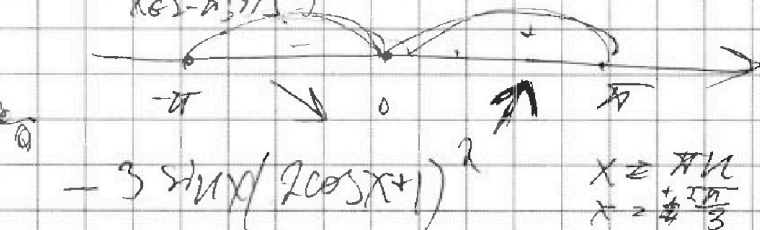
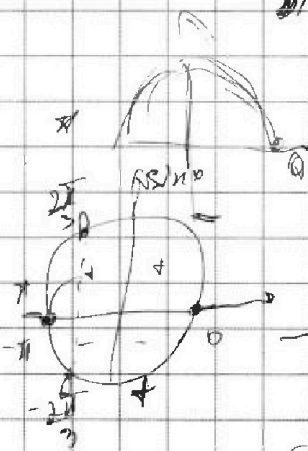


$$4\cos^3 x + 3\cos x + 3(2\cos^2 x - 1) + 6\cos x = 0$$

$$10\cos^3 x + 6\cos^2 x + 3\cos x - 3 = 0$$

$$4 \cdot 2\cos^2 x \cdot (-3/\pi) + 6 \cdot 2\cos x \cdot (-3/\pi) + 3(-3/\pi) = 0$$

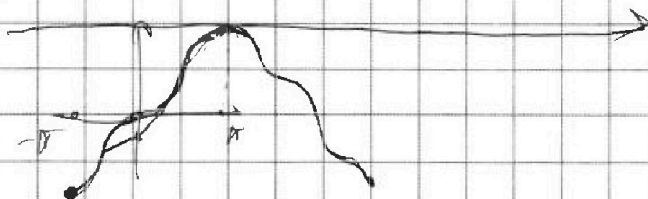
$$-3/\pi \cdot (2\cos x + 1)^2$$



$$-3 \sin x / (2\cos x + 1)^2$$

$$x \geq \pi/2$$

$$x \geq \frac{5\pi}{3}$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$5) \begin{cases} a-c = -1 \\ b-c = -p^2 \end{cases}$$

Аналитично получены $a-b = p^2 - 1$,
 $a-b < 8$

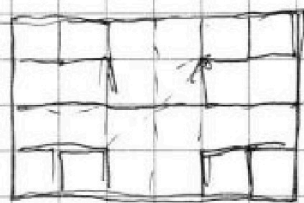
и.е. $\begin{cases} b_1 = 23, & a_1 = 31, & c_1 = 32 \\ b_2 = -24, & a_2 = -16, & c_2 = -15 \end{cases}$

\Rightarrow ответы $(31, 23, 32)$ и $(-16, -24, -15)$ координаты.

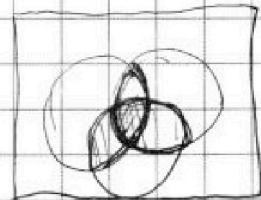
$$6) \begin{cases} a-c = -p^2 \\ b-c = -1 \end{cases} \Rightarrow \text{Аналитично со значением } 3) \\ \text{получены противоречие } a-b < 0.$$

\Rightarrow Ответ: других значений нет, \Rightarrow

Ответ: $(31, 23, 32), (-16, -24, -15), (31, 23, 32), (-16, -24, -15)$



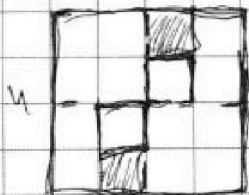
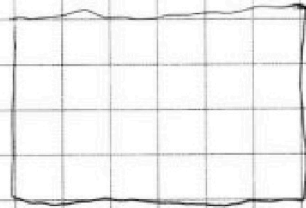
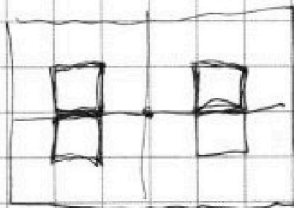
1. Ум. А
2. Ум. В
3. Ум. С
4. Ум. В и ум. ВД.



1) Ум. А и В

У

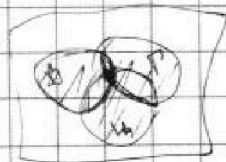
$$4 \times 4 = 16$$



$$250 \cdot 200 - 25 \cdot 10 - 2 \cdot 100 < \\ > 5 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 100 = 5 \cdot 10^4$$

$$(5 \cdot 10^4 - 2)$$

$$A \cap B \cap C - A \cap B - A \cap C - B \cap C + A \cap B \cap C$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

2023 $x \geq -3$

$x \cdot z \leq 4$
 $z \leq 2$

$|z| \leq 3 \rightarrow z \in [-3; 3]$

$y + x - x^2 + z \geq 0$

$x + y + z \geq x^2 \geq 9$

$x + y + z \geq 9$

$\Rightarrow x + y \geq 2$

~~$y \geq 2 - x$~~

~~$y \geq 2 - x \geq 5$~~ — *условие*

Итого: $\left. \begin{aligned} x + y &\geq 2 \\ x &\geq -3 \\ -1 &\leq z \leq 3 \end{aligned} \right\}$

$\sqrt{x+3} + 5 \geq \sqrt{4-x-z}$

$y \geq 2$

$4y - 35 = \sqrt{169 - 2^2}$

$6y^2 - 280y + 35^2 - 13^2 \cdot 2^2 = 0$

$12 \cdot 48 \cdot t^2 - 0 = 0$

$|y+1| + 3|y-12| = \sqrt{169 - 2^2}$

$280^2 - 6(242 \cdot 2^2) = -280^2 - (24 \cdot 8)^2 + (8 \cdot 2)^2 = 280^2 - (192)^2$

$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x-z} \geq \sqrt{\quad} - 5$

$x+3 + \sqrt{4-x-z} - 2\sqrt{x+3} \cdot \sqrt{4-x-z} = \sqrt{(y+x-x^2+z) + 25} - 2\sqrt{\quad}$

$z - z - 2\sqrt{(x-x^2-x^2+2x-3z)}$

$x - x^2 - z(x+3) + 12$

$\sqrt{4y+4z - (4x^2 - 4x + 1) + 1} - \sqrt{4y+4z+1 - (2x-1)^2}$

~~$f(x) = 3 \cos(\sin x) + 5 \cdot \sin(2x) + 6(\sin x)$~~

$-\sqrt{1-\frac{1}{4}}$
 $t = \frac{1}{2}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

2

$$|z| \leq 13$$

$$x \geq -3$$

$$x + z \leq 4$$

$$z \leq 7$$

$$z \in [-13; 7]$$

$$z = 4$$

~~$$x = 3$$~~

оч. $x \geq -3$

$$-13 \leq z \leq 7$$

$$x + y \geq 2$$

$$1) \ x \geq 3$$

$$y + x - x^2 \sqrt{z} \geq 0$$

$$x + y + z \geq x^2 \geq 9$$

$$x + y + z \geq 9$$

~~$$y + z \geq 12$$~~

$$x + y \geq 2$$

~~$$y \geq 5$$~~

$$x + 3 + 5 + 10\sqrt{x + 3} = 4(y + x - x^2 \sqrt{z}) + 4 - x - 3 + 4$$

$$y \leq -1$$

$$-y - 1 + 36 - 3y = \sqrt{169 - z^2}$$

$$35 - 4y \geq 0$$

$$35 - 4y = \sqrt{169 - z^2}$$

$$y^2 \leq \frac{35}{4}$$

$$35^2 - 20 \cdot 4y + 16y^2 = 169 - z^2$$

$$y^2 - 20y + \frac{35^2 - 13^2}{4} \geq 2 = 0$$

$$\frac{22 \cdot 48}{24 \cdot 2 \cdot 2}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\cos(2x+x) = \cos 2x \cdot \cos x - \sin 2x \cdot \sin x =$$

$$= (2\cos^2 x - 1) \cdot \cos x - 2 \sin x \cos x =$$

$$= 2\cos^3 x - \cos x - 2\cos x(1 - \cos^2 x) = 4\cos^3 x - 3\cos x.$$

$$4\cos^3 x - 3\cos x + 3(2\cos^2 x - 1) + 6\cos x = p$$

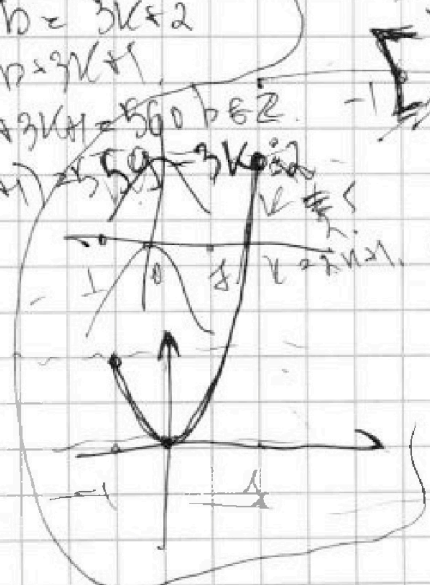
$$4\cos^3 x + 6\cos^2 x - 6\cos x + 6\cos x = p$$

$$4d^3 + 6d^2 - p = 0$$

$$f(d) = 4d^3 + 6d^2$$

$$f'(d) = 12d^2 + 12d = 12d(d+1)$$

- 1) $a > b$
- 2) $a - b = 3k + 1$
- 3) $a - b = 3k + 2$
- 4) $a = b = 3k + 1$
- 5) $b^2 + b + 3k + 1 = 560$
- 6) $b(b+1) = 559 = 3k + 1$



$f(0) = 0$
 $f(1) = 12$
 $f(-1) = -2$
 $f(-1.5) = 0$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$4b^3 + 6b^2 + 3b - 3 = P.$$

~~$$4b^3 + 6b^2 + 3b - 3 = P.$$~~

$$f'(b) = 12b^2 + 12b + 3 = 0.$$

$$4b^2 + 4b + 1 = 0.$$

$$(2b + 1)^2 = 0.$$

$$b = -\frac{1}{2}.$$

$\Rightarrow f(b)$ на $\text{кор } b \in S = \{-\frac{1}{2}, 1\}$.

$$f(-\frac{1}{2}) = -\frac{4}{8} + \frac{6}{4} - \frac{3}{2} - 3 =$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} - \frac{3}{2} - 3 = -3.5$$

$$f(-1) = -4 + 6 - 3 - 3 = -4$$

$$f(1) = 4 + 6 + 3 - 3 = 10.$$

\Rightarrow 1 корень единств. $\cos(2-\beta) + \cos(2+\beta) = 2\cos$

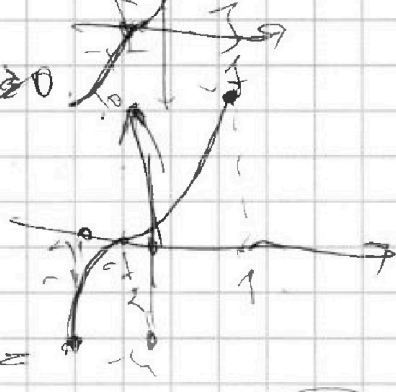
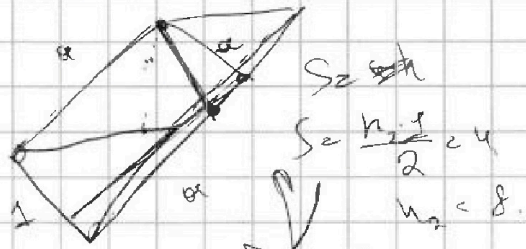
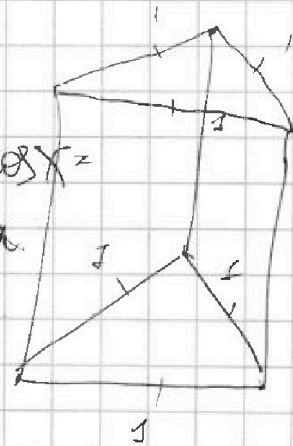
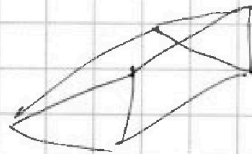
$$f_{\min}(b) = -4, f_{\max}(b) = 10.$$

$$4b^3 + 6b^2 + 3b - (3+P) = 0.$$

$$\cos 3x + \cos 2x + \cos x = 0$$

$$2\cos \frac{3x}{2} \cos \frac{x}{2} + 2(\cos 2x + \cos x) + \cos x =$$

$$2\cos \frac{3x}{2} \cos \frac{x}{2} + 4\cos x = 0$$





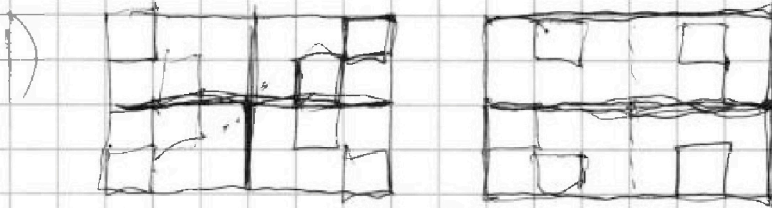
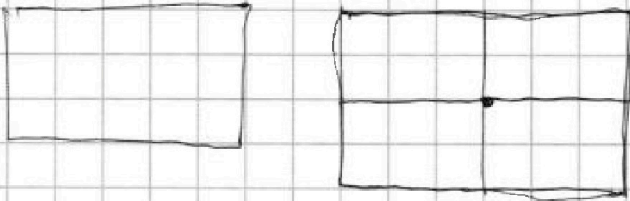
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

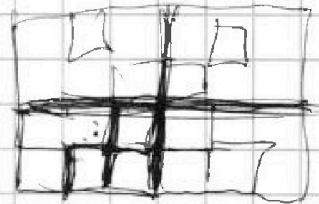
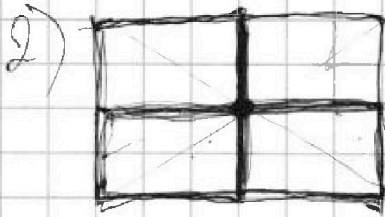
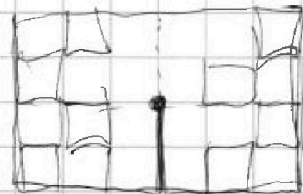
СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

5

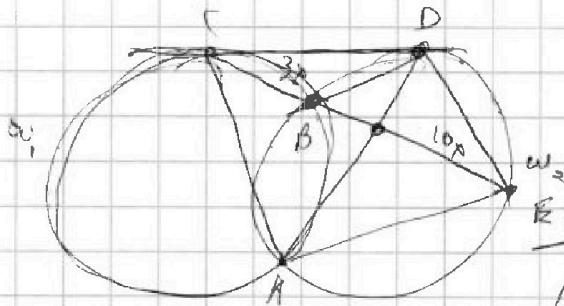


C_8
200250



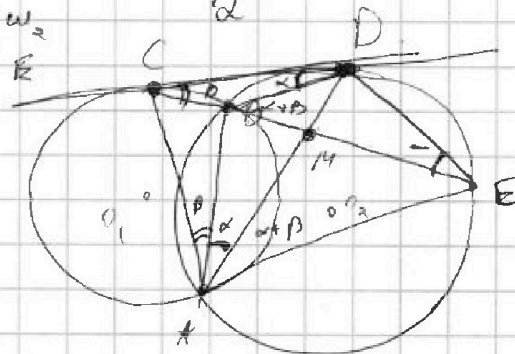
$\frac{ED}{CD}$

4



C_4
200250
2

$\frac{CM}{ME} = \frac{2}{10}$



$$\triangle CBD \sim \triangle CDE$$

$$\frac{ED}{CD} = \frac{BD}{CB}$$

$$\frac{AC}{AB} = \frac{3}{10} = \frac{CM}{ME}$$



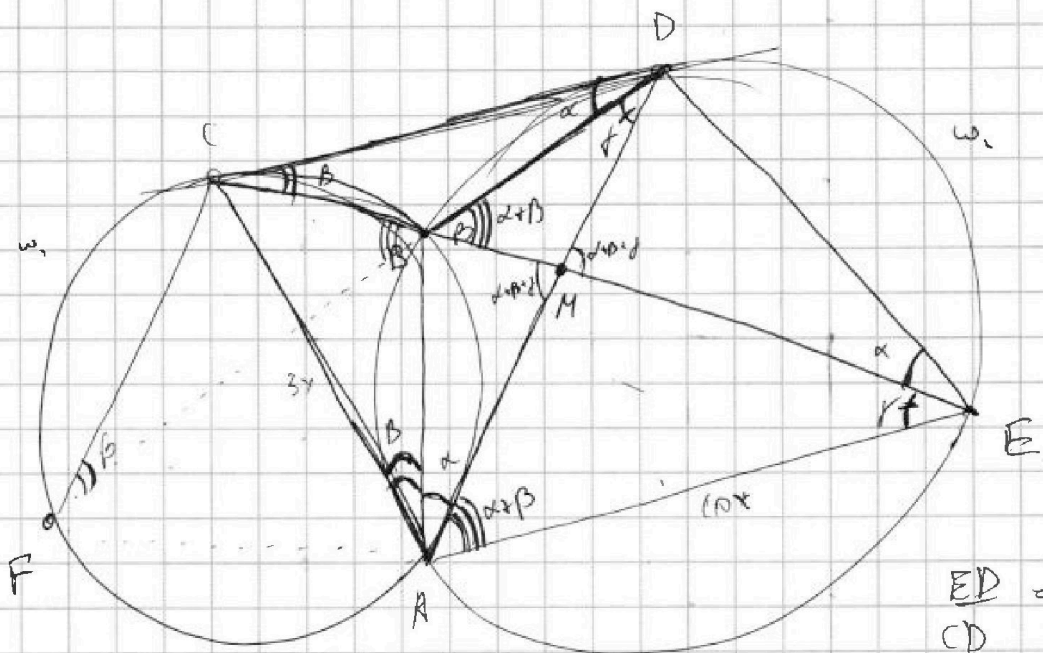
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
— ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

4.



ED = ?
CD

$$\frac{CM}{MB} = \frac{3}{10} = \frac{AC}{AE}$$

$$\frac{CD}{CE} = \frac{CB}{CD}$$

$$\triangle ADE \sim \triangle ADC$$

$$CD^2 = CB \cdot CE$$

$$\frac{AE}{DE} = \frac{AC}{AD}$$

$$\frac{BM}{ME} = \frac{AD}{AC} = \frac{AB}{AD}$$

$$AD^2 = AC \cdot AB = 30x^2$$

$$AD = x\sqrt{30}$$

