



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



✕ [3 балла] Найдите все действительные значения x , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её седьмой член равен $\sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}$, тринадцатый член равен $5-x$, а пятнадцатый член равен $\sqrt{(13x-35)(x+1)}$.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+3} - \sqrt{4-x-z} + 5 = 2\sqrt{y+x-x^2+z}, \\ |y+1| + 3|y-12| = \sqrt{169-z^2}. \end{cases}$$

✕ [5 баллов] Найдите все значения параметра p , при которых уравнение

$$\cos 3x + 3 \cos 2x + 6 \cos x = p$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p .

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD , чем точка A . Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E . Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $3 : 10$, считая от вершины C .

✕ [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 200×250 . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

✕ [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:

- $a > b$,
- число $a - b$ не кратно 3,
- число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство $a + b^2 = 560$.

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник со стороной 1. Площади её боковых граней равны 4, 4 и 3. Найдите высоту призмы.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a_n = b \cdot q^{n-1}$$

$$a_7 = \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}$$

$$a_{13} = 5-x$$

$$a_{15} = \sqrt{(13x-35)(x+1)}$$

$$\frac{a_{15} a_7}{a_7} = \frac{\sqrt{(13x-35)(x+1)}}{\sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}} = \frac{a_{15}}{a_7} = \sqrt{(x+1)^4} = |(x+1)^2| = (x+1)^2$$

$$\frac{a_{15}}{a_7} = \frac{b \cdot q^{14}}{b \cdot q^6} = q^8 \Rightarrow q^8 = (x+1)^2 \Rightarrow q^4 = \pm(x+1)$$

$$q^4 \geq 0 \Rightarrow q^4 = |x+1| \Rightarrow q^2 = \sqrt{|x+1|}$$

$$q^2 = \frac{b \cdot q^{14}}{b \cdot q^{12}} = \frac{a_{15}}{a_{13}} = \frac{\sqrt{(13x-35)(x+1)}}{5-x}$$

$$\sqrt{|x+1|} = \frac{\sqrt{(13x-35)(x+1)}}{5-x}$$

$$(5-x)\sqrt{|x+1|} = \sqrt{(13x-35)(x+1)}$$

$$(13x-35)(x+1) \geq 0$$

$$(5-x)^2 |x+1| = (13x-35)(x+1)$$

I $x+1 \geq 0$

$$(5-x)^2 (x+1) = (13x-35)(x+1)$$

I $x+1 = 0$

$$x = -1$$

II $x \neq 0$

$$(5-x)^2 = 13x-35$$

$$25 - 10x + x^2 = 13x - 35$$

$$x^2 - 23x + 60 = 0$$

$$D = 23^2 - 4 \cdot 60 = 529 - 240 = 289 = 17^2$$

$$x_{1,2} = \frac{23 \pm 17}{2} = \frac{23+17}{2} / \frac{23-17}{2} = \frac{40}{2} / \frac{6}{2} = 20 / 3$$

$$x_1 = 20 \quad x_2 = 3$$

$$x_1 + 1 \geq 0 \quad x_2 + 1 \geq 0$$

Граница 1 из 2



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{II} \quad x+1 < 0$$

$$x < -1$$

$$-(5-x)^2(x+1) = (13x-35)(x+1) \quad x \neq -1$$

$$-25 + 10x - x^2 = 13x - 35$$

$$x^2 + 3x - 10 = 0$$

$$D = 9 + 4 \cdot 10 = 49 = 7^2$$

$$x_{3,4} = \frac{-3 \pm 7}{2} = \frac{-3+7}{2} \quad / \quad \frac{-3-7}{2} = \frac{4}{2} \quad / \quad \frac{-10}{2} = 2 \quad / \quad -5$$

$$x_3 = 2 \quad x_4 = -5$$

$$x_3 \geq -1 \quad x_4 < -1$$

$x_0 = -1, x_1 = 20, x_2 = 3, x_4 = -5$ могут подойти
но надо проверить
023

$$f(x) = (13x-35)(x+1) \geq 0$$

При x_0 ~~то~~ $f(x_0) = 0$

$$x_1 \neq -1 \quad f(x_1) = (13 \cdot 20 - 35)(20+1) > 0$$

$$f(x_2) = (13 \cdot 3 - 35)(3+1) > 0$$

$$f(x_4) = (13 \cdot (-5) - 35)(-5+1) \geq 0$$

$$\frac{13x-35}{(x+1)^2} \geq 0 \quad x \neq -1$$

$$\frac{13x-35}{x+1} \geq 0 \quad \text{т.к. } (x+1)^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow (13x-35)(x+1) \geq 0 \Rightarrow x_0 \text{ не подходит}$$

А x_1, x_2, x_4 подходят

Ответ: $x \in \{20, 3, -5\}$

Страница 2 из 2



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x \quad \cos x = t$$

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$$

$$\begin{aligned} & \cos 3x + 3\cos 2x + 6\cos x = \\ & = 4\cos^3 x - 3\cos x + 6\cos^2 x - 3 + 6\cos x = \\ & = 4\cos^3 x + 6\cos^2 x + 3\cos x - 3 = \\ & = 4t^3 + 6t^2 + 3t - 3 \\ & t \in [-1, 1] \Rightarrow x = \arccos(t) \end{aligned}$$

$f(t) = 4t^3 + 6t^2 + 3t - 3 = p$ нужно найти min и max значение, которое принимает $f(t)$ при $t \in [-1, 1]$

$$\begin{aligned} f'(t) &= 4 \cdot 3 \cdot t^2 + 6 \cdot 2t + 3 = 12t^2 + 12t + 3 = 3(4t^2 + 4t + 1) = \\ &= 3(2t + 1)^2 \end{aligned}$$

Экстремум при $2t + 1 = 0 \quad t = -\frac{1}{2} \in [-1, 1]$

$$\begin{aligned} f\left(-\frac{1}{2}\right) &= 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^3 + 6 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - 3 = \\ &= 4 \cdot \frac{-1}{8} + 6 \cdot \frac{1}{4} + \frac{-3}{2} - 3 = \\ &= -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} - \frac{3}{2} - 3 = -\left(3 + \frac{1}{2}\right) = -\frac{7}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(-1) &= 4(-1)^3 + 6(-1)^2 + 3(-1) - 3 = \\ &= -4 + 6 - 3 - 3 = -4 \end{aligned}$$

$$f(1) = 4 + 6 + 3 - 3 = 10$$

$$\Rightarrow p \in [-4, 10]$$

Страница 1 из 1



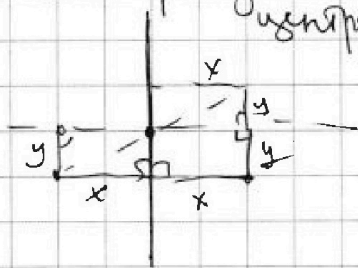
1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что если закрашенное мн-во симметрично относительно двух каких-то осей, то оно симметрично и относительно всей Т.К.

Для Δ ~~прямую~~ симметрию относительно прямой и центральную симметрию (центр симметрии лежит на прямой симметрии)



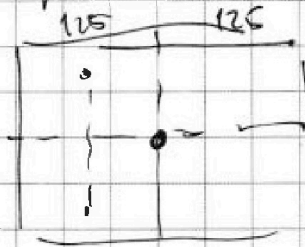
Пусть точка располож. на радиус. x и y , для которых мы все доказываем

Тогда ~~от симметричной~~ относ. прямой Δ потом относ. центра. Видно, что расстояние до прямой сохраняется \Rightarrow доказано

Теперь посчитаем сколько способов выбрать мн-во, чтобы было симметрично относительно центра

Для это надо посчитать кол-во вариантов разместить 4 клетки в верхней части арка, т.к. остальные 4 будут определены по расположению клеток

в верхней в верхней части (половине) 100
 $C_4^{100} = 100 \cdot 99 \cdot 98 \cdot 97 = 25000$
 клеток = 100



Аналогично, для прямой x

C_4^{25000}

Итого $3 \cdot C_4^{25000}$, но нужно вычесть случаи когда мн-во симметрично относительно всех объектов сразу (относительно только двух быть не может по условию сверху)

Тогда кол-во способов разместить так мн-во, это кол-во способов разместить 2 клетки в верхней левой четверти ар-ка, так как во ~~остальных~~



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

В каждую из двух четвертей однозначно
определим расположение двух кассет
из-за симметрии.

$$C_{125 \cdot 100}^2 = C_{12500}^2$$

Ответ $3 \cdot C_{25000}^4 - 2 \cdot C_{12500}^2$

т.к. здесь мы ставим коэф-т 2, т.к.
мешки симметричны учтены
2 раза

Ответ: $3 \cdot C_{25000}^4 - 2 \cdot C_{12500}^2$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$4) a + b^2 = 560$$

$$a = 560 - b^2$$

$$1) a > b \Leftrightarrow 560 - b^2 > b$$

$$0 > b^2 + b - 560$$

$$2) a - b \stackrel{DVA}{\times} 3$$

$$560 - b^2 - b \times 3 \quad 560 \stackrel{DVA}{\div} 3 \stackrel{DVA}{=} 11 \frac{2}{3}$$

$$2 - b^2 - b \times 3$$

$$b^2 + b - 2 \times 3$$

$$(b-1)(b+2) \times 3 \Leftrightarrow b \neq 1$$

$$3) (a-c)(b-c) = p^2$$

$$(560 - b^2 - c)(b-c) = p^2$$

т.к. p - простое возможны 2 случая

$$I \quad 560 - b^2 - c = b - c \Rightarrow p$$

$$560 - b^2 = b$$

$$b^2 + b - 560 = 0, \text{ но } b^2 + b - 560 > 0 \Rightarrow \text{не подходит}$$

$$II \quad 1. 560 - b^2 - c = 1$$

$$b - c = p^2$$

$$* 560 - b^2 - c > b - c$$

$$2. 560 - b^2 - c = p^2$$

$$b - c = 1$$

т.к.

$$3. 560 - b^2 - c = -p^2$$

$$b - c = -1$$

$$a - c > b - c$$

$$4. 560 - b^2 - c = -1$$

$$b - c = -p^2$$

$$a > b$$

$$III \quad 560 - b^2 - c = 1, \quad b - c = p^2$$

$$c = 559 - b^2$$

$$b - c = b + b^2 - 559 = p^2$$

$$D \Delta \quad b^2 + b - (559 + p^2) = 0$$

$$D = 1 + 4 \cdot 559 + 4p^2 =$$

$$= 2237 + 4p^2 = 2237 + 4 \cdot \frac{p^2}{2} = x^2 \quad | x \in \mathbb{Z}$$

$$x^2 - (2p)^2 = 2237$$

$$(x - 2p)(x + 2p) = 2237$$

$\Rightarrow p \geq 2$
 \Rightarrow случаи 1, 4, 3 отпадают

Страница 1 из 4



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

x	x ²	x	4x
0	0	0	0
1	1	1	4
2	4	2	8
3	0	3	3
4	7	4	7
5	7	5	2
6	0	6	6
7	4	7	1
8	1	8	5

$$\Rightarrow 1 - 4p^2 = x^2 \quad x \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow 1 - 4p^2 \equiv \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ 7 \\ 9 \end{matrix}$$

$$1 - (2p)^2 \equiv \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ 7 \\ 9 \end{matrix}$$

$$-(2p)^2 \equiv \begin{matrix} -1 \\ 0 \\ 3 \\ 6 \end{matrix}$$

$$(2p)^2 \equiv \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ -6 \end{matrix}$$

$$= \begin{matrix} 1 \\ 6 \\ 3 \end{matrix} \quad \begin{matrix} \text{т.к. } (2p)^2 \\ \text{не может} \\ \text{быть } -1 \\ \text{или } -6 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow (2p)^2 \equiv 0 \quad \text{или} \quad (2p)^2 \equiv 1$$

$$\Downarrow \\ p=3 \text{ т.к. } p\text{-простое}$$

$$4p^2 \equiv 1 \Rightarrow p^2 \equiv 7 \pmod{9} \Rightarrow p \equiv \begin{matrix} 4 \\ 5 \end{matrix}$$

$$\cancel{3} \quad \cancel{5} \quad \cancel{13} \quad \cancel{17} \quad \cancel{23} \quad \cancel{29}$$

Остались 4 вар-та
 $p=3, p=5, p=13, p=23$

$$I \quad p=3$$

$$D = 2245 - 4 \cdot 3^2 =$$

$$= 2245 - 36 =$$

$$= 2209 = 47^2$$

$$b_{1,2} = \frac{-1 \pm 47}{2} = \frac{-1+47}{2} \quad \bigg| \quad \frac{-1-47}{2} =$$

$$= 23 \quad \bigg| \quad -24$$

$$I \quad p=2 \not\equiv \begin{matrix} 4 \\ 5 \end{matrix}$$

$$II \quad p=7 \not\equiv \begin{matrix} 4 \\ 5 \end{matrix}$$

$$III \quad p=11 \not\equiv \begin{matrix} 4 \\ 5 \end{matrix}$$

$$IV \quad p=17 \not\equiv 8 \not\equiv \begin{matrix} 4 \\ 5 \end{matrix}$$

$$V \quad p=19 \not\equiv \begin{matrix} 4 \\ 5 \end{matrix}$$

$$VI \quad p=29 \equiv 2 \not\equiv \begin{matrix} 4 \\ 5 \end{matrix}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
3 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

2. $b - c = 1$

$c = b - 1$

$560 - b^2 - b + 1 = p^2$

$561 - b^2 - b = p^2$

$b^2 + b + p^2 - 561 = 0$

$D = 1 - 4(p^2 - 561) =$

$= 1 - 4p^2 + 2244 = 2245 - 4p^2 = x^2 \quad (x \in \mathbb{Z})$

~~В случае 2 целых решений b нет.~~

4. $560 - b^2 - c = -1 \quad b - c = -p^2$

$c = 560 - b^2 + 1 = 561 - b^2$

$b - c = -p^2$

$b - (561 - b^2) = -p^2$

$561 - b^2 = p^2$

$b^2 + b + p^2 - 561 = 0$

$b^2 + b + p^2 - 561 = 0$

$D = 1 - 4(p^2 - 561) = 1 - 4p^2 + 2244 =$

$= 2245 - 4p^2 = x^2, x \in \mathbb{Z}$

$2245 = (2p)^2 + x^2$

Пусть $p \geq 30 \Rightarrow 4p^2 \geq 4 \cdot 30 \cdot 30 = 4 \cdot 30 \cdot 30 =$

$= 3600$

$= 3600$

$\Rightarrow 2245 - 4p^2 < 0$

$\Rightarrow p < 30$

~~2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29~~ - все простые < 30

~~Рассмотрим~~

Рассмотрим остатки кв-тов по модулю 3.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
4 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

II $p = 5$

$$D = 2245 - 4 \cdot 5^2 = 2245 - 4 \cdot 25 = 2145$$

$$\begin{array}{r} 2145 : 5 \\ 2145 \overline{) 25} \\ \underline{200} \\ 145 \\ \underline{125} \\ 20 \end{array}$$

$\Rightarrow 2145 \times 25$
 $\Rightarrow 2145$ - не квадрат
улаво числа
 $\Rightarrow p=5$ не возм.

III $p = 13$

$$D = 2245 - 4 \cdot 13^2 = 2245 - 676 = 1569$$

$$\begin{array}{r} 39^2 = 1521 \\ 40^2 = 1600 \\ 38^2 = 1444 \end{array}$$

$\Rightarrow 39^2 < 1569 < 40^2$
 $\Rightarrow 1569$ - не квт
 $\Rightarrow p=13$ нет решений

IV $p = 23$

$$D = 2245 - 4 \cdot 23^2 =$$

$$2245 - 2116 = 129$$

$$11^2 < 129 < 12^2$$

$$\begin{array}{r} 121 \\ 144 \end{array}$$

$\Rightarrow p=23$ единств. вариант.

$$b_1 = 23 \quad b_2 = -24$$

Случай 2. $b_1 = 23$
Всегда $c = b_1 - 1 \Rightarrow c = 22$

$$a = 560 - b_1^2 = 31 \quad (31, 23, 22)$$

1. $a > b$

$$b_2 = -24$$

$$c = b_2 - 1 = -24 - 1 = -25 \quad (-16, -24, -25)$$

$$a = 560 - b_2^2 = -16$$

Случай 4. $c = 561 - b_1^2 = 32 \quad (31, 23, 32)$

$$b_1 = 23$$

$$a = 560 - b_1^2 = 31$$

$$b_2 = -24$$

$$c = 561 - b_2^2 = -15$$

$$a = 560 - b_2^2 = -16 \quad (-16, -24, -15)$$

Проверим ответы

Ответ: $(31, 23, 22), (31, 23, 32)$
 $(-16, -24, -25), (-16, -24, -15)$

1. $a > b$ где всех случаев

2. $a = b \times 3$ где всех случаев

3. $(a-c)(b+c)$ $(31-22)(23+22) = 9$ $(-16+25)(-24+15) = 9$

$(-16+25)(-24+15) = 9$ 4. $a+b^2 = 560$

$(31-32)(23+32) = 9$ $31+23^2 = 560$ $-16+(-24)^2 = 560$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

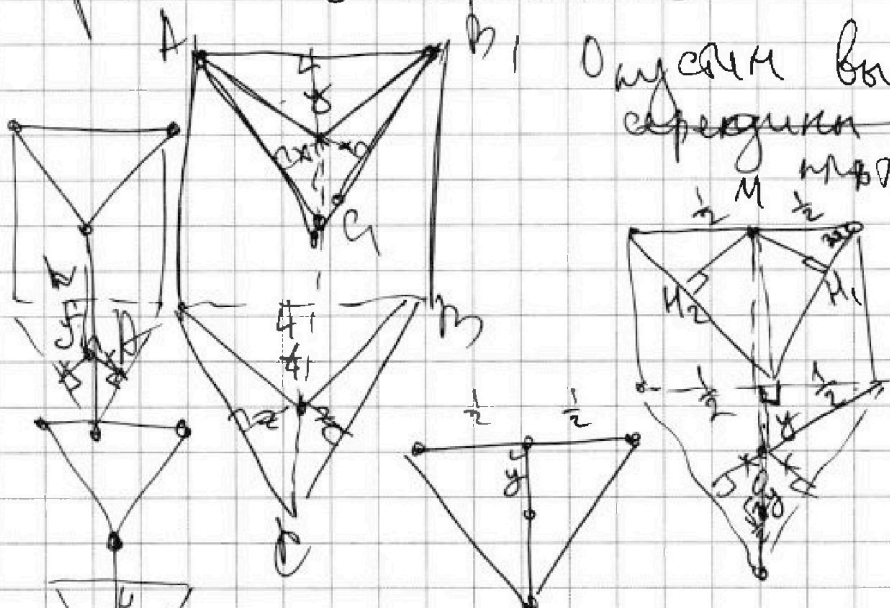


- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что раз площади у двух граней равны \Rightarrow перенос sr на sr \Rightarrow ~~на~~ ~~параллельной~~ ~~основание~~ \Rightarrow верхняя грань \parallel параллельной вектору h \Rightarrow параллельной вектору h



Опустим высоту из C_1 середины AB на MP $MP \perp AB$ $MP \perp BC$

Тогда $\Delta K_1 S$ боковая грань $AC_1 SA$ $\Delta BB_1 C_1$ равны \Rightarrow расстояние от O до BC и AC равно

Обозначим расстояние от O до AB за y

Тогда $y^2 + h^2 = 16$

$\Rightarrow y^2 + h^2 = 16$

$(y - \frac{\sqrt{3}}{2})^2 + h^2 = 16$

$HK_1 = MK_2 = \frac{1}{2} \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4}$

\Rightarrow

$(x - \frac{1}{4})^2 + h^2 = 9$

$(x - \frac{1}{4})^2 + h^2 = 9$

$y^2 + h^2 = 16$

$\sqrt{3} = h$

$x = (h - y) \cdot \sin 60^\circ = (\frac{\sqrt{3}}{2} - y) \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{2}y$

$(x - \frac{1}{4})^2 + h^2 = 9 - 16 = -7$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + h^2 = 9 \\ \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 2x\right)^2 + h^2 = 16 \end{cases}$$

$$\ominus \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 2x\right)^2 - \left(x - \frac{1}{4}\right)^2 = 7$$

$$\frac{3}{4} + 4x^2 - 2\sqrt{3}x - x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{16} = 7$$

$$3x^2 + \frac{1}{2}x + \left(\frac{1}{2} - 2\sqrt{3}\right)x + \frac{3}{4} - \frac{1}{16} = 7$$

$$3x^2 + \left(\frac{1}{2} - 2\sqrt{3}\right)x + \frac{11}{16} - 7 = 0$$

$$3x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{16} + h^2 = 9$$

$$4x^2 - 2\sqrt{3}x + \frac{3}{4} + h^2 = 16$$

$$3x^2 + \left(\frac{1}{2} - 2\sqrt{3}\right)x + \frac{3}{4} - \frac{1}{16} = 7$$

$$3x^2 + \left(\frac{1}{2} - 2\sqrt{3}\right)x + \frac{11}{16} = 7$$

$$3x^2 + \left(\frac{1}{2} - 2\sqrt{3}\right)x + \frac{11}{16} - \frac{101}{16} = 0$$

$$D = \left(\frac{1}{2} - 2\sqrt{3}\right)^2 + 4 \cdot 3 \cdot \frac{101}{16} =$$

$$= \frac{1}{4} + 4 \cdot 3 - 2\sqrt{3} + 3 \cdot \frac{101}{4} =$$

$$= 12 + \frac{102}{4} - 2\sqrt{3} = 12 + \frac{51}{2} - 2\sqrt{3} =$$

$$= \frac{75}{2} - 2\sqrt{3} = \frac{1}{4} + 12 - 2\sqrt{3} + \frac{303}{4} = \frac{304}{4} + 12 - 2\sqrt{3} =$$

$$= 76 + 12 - 2\sqrt{3} = 88 - 2\sqrt{3}$$

Распишем высоты $ABBA$, по т. Пифагора $\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - y\right)^2 + h^2}$
 Знаем $h_1 = 3 \Rightarrow$

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - y\right)^2 + h^2 = 16$$

$$x^2 + h^2 = 9$$

$$y = \frac{\sqrt{3}}{2} - x$$

$$4x^2 + h^2 = 16$$

$$x^2 + h^2 = 9$$

$$4x^2 + h^2 = 16$$

$$4x^2 + 4h^2 = 16$$

$$3h^2 = 20$$

$$h^2 = \frac{20}{3}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
3 ИЗ 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\Rightarrow x = \frac{2\sqrt{3} - \frac{1}{2} + \sqrt{90 - 2\sqrt{3}}}{2}$$

так как с \ominus
отриц. значение

$$h^2 = \left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + 9 =$$

$$= 9 - \frac{1}{4} \left(\left(2\sqrt{3} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{75}{2} - 2\sqrt{3} + 2 \left(2\sqrt{3} - \frac{1}{2}\right) \sqrt{90 - 2\sqrt{3}} \right) =$$

$$= 9 - \frac{1}{4} \left(12 + \frac{1}{4} - 2\sqrt{3} + \frac{75}{2} - 2\sqrt{3} + (4\sqrt{3} - 1) \sqrt{90 - 2\sqrt{3}} \right) =$$

$$= 9 - \frac{1}{4} \left(\frac{49}{4} - 4\sqrt{3} + \frac{75}{2} + \sqrt{90 - 2\sqrt{3}} (4\sqrt{3} - 1) \right) =$$

$$= 9 - \frac{1}{4} \left(\frac{199}{4} - 4\sqrt{3} + (4\sqrt{3} - 1) \sqrt{90 - 2\sqrt{3}} \right) =$$

$$= 9 - \frac{1}{16} (4x - 1)^2 =$$

$$\Rightarrow h = \sqrt{\frac{20}{3}}$$

$$= 9 - \frac{1}{16} \left(4\sqrt{3} - \frac{1}{2} + 4\sqrt{90 - 2\sqrt{3}} - 1 \right)^2 =$$

Ответ: $\sqrt{\frac{20}{3}}$

$$= 9 - \frac{1}{16} \left(4\sqrt{3} - 2 + 4\sqrt{90 - 2\sqrt{3}} \right)^2 =$$

$$= 9 - \frac{1}{4} \left(2\sqrt{3} - 1 + 2\sqrt{90 - 2\sqrt{3}} \right)^2 =$$

$$= 9 - \frac{1}{4} \left((2\sqrt{3} - 1)^2 + 4(2\sqrt{3} - 1)\sqrt{90 - 2\sqrt{3}} + 4(90 - 2\sqrt{3}) \right) =$$

$$= 9 - \frac{1}{4} \left(12 + 1 - 4\sqrt{3} + (8\sqrt{3} - 4)\sqrt{90 - 2\sqrt{3}} + 360 - 8\sqrt{3} \right) =$$

$$= 9 - \frac{1}{4} (373 - 12\sqrt{3} + 8\sqrt{3} - 4)$$

На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА
— ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Handwritten mathematical work on grid paper, including geometric diagrams, trigonometric formulas, and numerical calculations.

Trigonometric Formulas:

- $CD = \frac{DE}{\sin B}$
- $\frac{CD}{\sin B} = \frac{DE}{\sin C}$
- $\frac{DE}{\sin C} = \frac{20}{\sin 30}$
- $DE = \frac{20 \cdot \sin 30}{\sin 35}$
- $DE = \frac{20 \cdot 0.5}{0.5736}$
- $DE = \frac{10}{0.5736}$
- $DE = 17.43$

Geometric Diagrams:

- Diagram 1: A triangle with a circumscribed circle and various angles labeled (e.g., 30, 35, 75, 15).
- Diagram 2: A triangle with a circumscribed circle and side lengths 10, 20, and 25.
- Diagram 3: A triangle with a circumscribed circle and angles 30 and 35.
- Diagram 4: A triangle with a circumscribed circle and angles 30 and 35.
- Diagram 5: A triangle with a circumscribed circle and angles 30 and 35.

Numerical Calculations:

- $2245 - 1076 = 1169$
- $1169 / 4 = 292.25$
- $2245 - 1076 = 1169$
- $1169 / 4 = 292.25$
- $2245 - 1076 = 1169$
- $1169 / 4 = 292.25$
- $2245 - 1076 = 1169$
- $1169 / 4 = 292.25$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Handwritten mathematical work on grid paper, including:

- Arithmetic problems:
 - $$\begin{array}{r} \times 41 \\ 41 \\ \hline 164 \end{array}$$
 - $$\begin{array}{r} \times 39 \\ 39 \\ \hline 117 \\ 1521 \end{array}$$
 - $$\begin{array}{r} \times 23 \\ 23 \\ \hline 69 \\ 46 \\ \hline 529 \end{array}$$
 - $$\begin{array}{r} \times 23 \\ 23 \\ \hline 69 \\ 46 \\ \hline 529 \end{array}$$
 - $$\begin{array}{r} \times 529 \\ 529 \\ \hline 2116 \end{array}$$
 - $$\begin{array}{r} 2245 \\ - 2116 \\ \hline 1329 \\ \times 529 \\ 529 \\ \hline 2116 \end{array}$$
 - $$\begin{array}{r} 2116 \\ + 129 \\ \hline 2245 \end{array}$$
 - $$\begin{array}{r} 576 \\ - 561 \\ \hline 15 \end{array}$$
 - $$\begin{array}{r} + 529 \\ 211 \\ \hline 560 \end{array}$$
 - $$\begin{array}{r} 576 \\ - 16 \\ \hline \end{array}$$
- Geometric diagrams:
 - 3D perspective drawings of rectangular prisms and pyramids with various lines and labels.
 - 2D coordinate systems with points labeled $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, and $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$.
 - Diagrams showing circles and their intersections.
 - Diagrams of triangles and quadrilaterals with internal lines and labels.
- Algebraic and numerical notes:
 - $8+3=$
 - 3×4
 - 10
 - 29
 - 16×24
 - $(31 - 22)$
 - 312
 - 529
 - 560
 - 129
 - 125
 - 160
 - 125
 - 16
 - 100

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a_7 = \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^5}} = 6 \cdot 9^6 \quad a_1 = 6$$

$$a_{15} = \sqrt{(13x-35)(x+1)} = 6 \cdot 9^{14} \cdot 200$$

$$a_{13} = 5^{-x}$$

$$\frac{a_{15}}{a_7} = 9^{14-6} = 9^8 = \frac{\sqrt{(13x-35)(x+1)}}{\sqrt{13x-35}}$$

$$\sqrt{(x+1)^2} = (x+1)^2 \quad 5-x \quad 13-7=6 \quad 15-13=2$$

$$\cos 3x + 3\cos 2x + 6\cos x = p$$

$$\cos 3x = \cos(x+2x) =$$

$$= \cos x \cdot \cos 2x - \sin x \cdot \sin 2x =$$

$$= \cos x (2\cos^2 x - 1) - \sin x \cdot 2\sin x \cdot \cos x =$$

$$= 2\cos^3 x - \cos x - 2\sin^2 x \cdot \cos x =$$

$$= 2\cos^3 x - \cos x - 2(1-\cos^2 x) \cdot \cos x =$$

$$= 2\cos^3 x - \cos x + 2\cos^2 x - 2\cos x + 2\cos^3 x = 4\cos^3 x - 3\cos x$$

$$4\cos^3 x - 3\cos x + 6\cos^2 x - 3 + 6\cos x$$

$$4\cos^3 x + 3\cos x + 6\cos^2 x - 3$$

$$t^2 + 3 = 3(t^2 + 4t + 1)$$

$$t^2 + 3 = 3t^2 + 12t + 3 \Rightarrow -2t^2 - 12t = 0 \Rightarrow 2t^2 + 12t = 0$$

$$2t(t + 6) = 0 \Rightarrow t = 0 \text{ or } t = -6$$

$$560 - b^2 = c \quad 560 - b$$

$$a - c > b - c \Rightarrow a > b$$

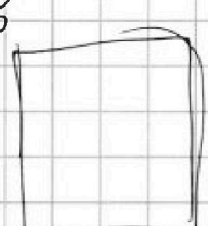
$$x = 0 \rightarrow 4 \rightarrow 0 \rightarrow 7 \rightarrow 0 \rightarrow 1$$

$$1 \rightarrow 0 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow 7 \rightarrow 8$$

$$1 \rightarrow 0 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow 7 \rightarrow 8$$

$$1 \rightarrow 0 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow 7 \rightarrow 8$$

$$1 \rightarrow 0 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow 7 \rightarrow 8$$

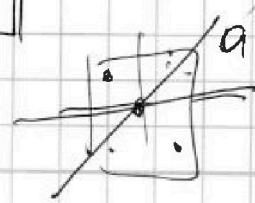
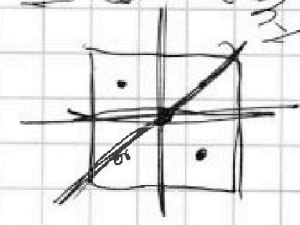


Handwritten arithmetic calculations:

$$\begin{array}{r} 23 \\ 17 \\ \hline 6 \\ 22 \quad 45 \\ 20 \\ \hline 24 \\ 20 \\ \hline 45 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 23 \\ 17 \\ \hline 6 \\ 22 \quad 45 \\ 20 \\ \hline 24 \\ 20 \\ \hline 45 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 23 \\ 17 \\ \hline 6 \\ 22 \quad 45 \\ 20 \\ \hline 24 \\ 20 \\ \hline 45 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 23 \\ 17 \\ \hline 6 \\ 22 \quad 45 \\ 20 \\ \hline 24 \\ 20 \\ \hline 45 \end{array}$$


Handwritten scribbles and numbers.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
— ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a > b$$

$$a - b \times 3 = 2 \sqrt{b^2 + b} + z$$

$$(a - c)(b + c) = p^2$$

$$a + b^2 = 560$$

$$b^2 = 560 - a$$

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x-z} + 5 = 2\sqrt{y+x-x^2+z}$$

$$|y + \dots + 3| \dots = \sqrt{168 - z^2}$$

$$(a - c)(b - c) = p^2$$

$$a + b^2 = 560$$

$$a = 560 - b^2$$

$$(a - c)(b - c) = p^2$$

$$a - c = 41$$

$$b - c = 4p^2$$

$$560 - b^2 - c = b - c$$

$$560 - b^2 - b = 0$$

$$b^2 + b - 560 = 0$$

$$b = 560 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 560}$$

$$560 - b^2 - c = 1$$

$$c = 560 - b^2 - 1 = 559 - b^2$$

$$b - c = b^2 + b - 559 = p^2$$

$$b^2 + b - (559 + p^2) = 0$$

$$D = 1 + 4(559 + p^2) = 2237 + 4p^2 = x$$

$$y = 20 \cdot 20$$

$$\begin{array}{r} 24 \\ \times 24 \\ \hline 96 \\ 48 \\ \hline 576 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \sqrt{x+3} - 8\sqrt{-x} \\ 576 \\ 560 \\ \hline 16 \end{array}$$

$$D = 2240 \pm 100$$

$$\begin{array}{r} 2237 \\ + 2 \\ \hline 2239 \\ \hline 91 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2237 \\ \times 31 \\ \hline 2237 \\ 2237 \\ \hline 697 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2237 \\ \times 11 \\ \hline 2237 \\ 2237 \\ \hline 24607 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2237 \\ \times 13 \\ \hline 2237 \\ 6711 \\ \hline 29081 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 21 \\ \times 27 \\ \hline 147 \\ 420 \\ \hline 567 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2244 \\ \times 4 \\ \hline 8976 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 224 \\ \times 1600 \\ \hline 358400 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 900 \\ \times 40 \\ \hline 36000 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1600 \\ \times 4 \\ \hline 6400 \end{array}$$

