



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [3 балла] Найдите все действительные значения  $x$ , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её седьмой член равен  $\sqrt{(25x-9)(x-6)}$ , девятый член равен  $x+3$ , а пятнадцатый член равен  $\sqrt{\frac{25x-9}{(x-6)^8}}$ .

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+5} - \sqrt{1-x-4z} + 4 = 2\sqrt{y-4x-x^2+z}, \\ |y+4| + 4|y-5| = \sqrt{81-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $p$ , при которых уравнение

$$p \cos 3x + 3(p+4) \cos x = 6 \cos 2x + 10$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких  $p$ .

4. [5 баллов] Две окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$  пересекаются в точках  $A$  и  $B$ , а их общая касательная имеет с  $\omega_1$  и  $\omega_2$  общие точки  $C$  и  $D$  соответственно, причём точка  $B$  расположена ближе к прямой  $CD$ , чем точка  $A$ . Луч  $CB$  пересекает  $\omega_2$  в точках  $B$  и  $E$ . Найдите отношение  $ED : CD$ , если диагональ  $AD$  четырёхугольника  $ACDE$  делит отрезок  $CE$  в отношении  $2 : 5$ , считая от вершины  $C$ .

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник  $100 \times 400$ . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел  $(a; b; c)$  такие, что:

- $a < b$ ,
- число  $b - a$  не кратно 3,
- число  $(a - c)(b - c)$  является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство  $a^2 + b = 710$ .

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник площади 1. Площади её боковых граней равны 3, 3 и 2. Найдите объём призмы.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть наша геом прогрессия:  $b, bq, \dots$

$$\text{Тогда } \begin{cases} b \cdot q^6 = \sqrt{(25x-9) \cdot (x-6)} \\ b \cdot q^8 = x+3 \\ b \cdot q^{14} = \sqrt{\frac{25x-9}{(x-6)^3}} \end{cases}$$

ОДЗ:  $x \notin \left(\frac{9}{25}; 6\right]$

Если  $x = \frac{9}{25}$ , то  $bq^6 = 0 \Rightarrow \Rightarrow bq^8 = 0 \Rightarrow x = -3 \Rightarrow$  против.

$$\begin{cases} b = \frac{\sqrt{(25x-9) \cdot (x-6)}}{q^6} \\ b \cdot q^8 = x+3 \\ b \cdot q^{14} = \sqrt{\frac{25x-9}{(x-6)^3}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = \frac{\sqrt{(25x-9) \cdot (x-6)}}{q^6} \\ \sqrt{(25x-9) \cdot (x-6)} \cdot q^2 = x+3 \\ \sqrt{(25x-9) \cdot (x-6)} \cdot q^8 = \sqrt{\frac{25x-9}{(x-6)^3}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = \frac{\sqrt{(25x-9) \cdot (x-6)}}{q^6} \\ q^2 = \frac{x+3}{\sqrt{(25x-9) \cdot (x-6)}} \\ (x+3)^4 = \left(\frac{\sqrt{(25x-9) \cdot (x-6)}}{q^6}\right)^4 \cdot \sqrt{(25x-9) \cdot (x-6)} = \sqrt{\frac{25x-9}{(x-6)^3}} \quad (*) \end{cases}$$

~~$x = \frac{9}{25}$~~   $(*) : (x+3)^4 = \frac{(\sqrt{(25x-9) \cdot (x-6)})^4}{\sqrt{(x-6)^4}}$

$$(x+3)^4 = \frac{((25x-9) \cdot (x-6))^2}{(x-6)^2}$$

$$x^4 + 12x^3 + 54x^2 + 108x + 81 = 125x^2 - 490x + 81$$

$$x^4 + 12x^3 - 71x^2 + 558x = 0 \quad \boxed{x_1 = 0}$$

$$x^3 + 12x^2 - 71x + 558 = 0$$

По формуле для корней кубич уравнения можно найти корни (неплохо можно не уrove. ОДЗ).

Ответ: 0 и  ~~$x = \dots$~~  <sup>возможно еще несколько корней.</sup>





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

[5] Посчитаем кол-во вариантов, удовл. хотя бы 1 симметрии. Каждый такой вариант однозначно задается и клетками, стоящими в 1 из половин прямоугольника. Пиковых вариантов  $3 \cdot C_{10000}^4$ . Но некоторые варианты удовлетворяют хотя бы 2 симметриям и их мы посчитали несколько раз.

Легко проверить, что еще вариантами удовл. 2<sup>ой</sup> <sup>горизонтальной</sup> симметрией, то он удовл. всем трем (посчитали количество по вертикали и горизонтали о центре закради. клетки до центра прямоугольника).

Вариант, удовл. 2-м осевым сечениям <sup>горизонтальной</sup> однозначно задается 2<sup>мя</sup> <sup>клетками</sup> <sup>стоящими</sup> <sup>один</sup> <sup>на</sup> <sup>одном</sup> <sup>из</sup> <sup>двух</sup> <sup>половин</sup> <sup>прямоугольника</sup>.

В дупле из 4 ячеек, на которые разбивают исходный 2 средние линии, возможны варианты  $C_{10000}^2$  и каждой из них 3 раза видно 1.

Итого ответ:  $3 \cdot C_{20000}^4 - 2 \cdot C_{10000}^2$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(k6) (a-c) \cdot (b-c) = p^2 \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a-c = p \\ b-c = p \end{array} \Rightarrow a=b \quad \times$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a-c = p^2 \\ b-c = 1 \end{array} \Rightarrow b-a = 1-p^2 < 0 \quad \times$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a-c = 1 \\ b-c = p^2 \end{array} \Rightarrow b-a = p^2-1 \quad \checkmark$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a-c = -1 \\ b-c = -p^2 \end{array} \Rightarrow b-a = 1-p^2 < 0 \quad \times$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a-c = -p^2 \\ b-c = -1 \end{array} \Rightarrow b-a = p^2-1 \quad \checkmark$$

$$\left. \begin{array}{l} a \in b = 710 \\ a < b \end{array} \right\} \Rightarrow a \in [26, 34] \Rightarrow p \leq 27, \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} b-a = 3 \Rightarrow \times \\ b-a = 8 \checkmark \\ b-a = 24 \Rightarrow \times \\ b-a = 48 \Rightarrow \times \\ b-a = 120 \Rightarrow \times \\ b-a = 240 \Rightarrow \times \\ b-a = 480 \Rightarrow \times \\ b-a = 528 \Rightarrow \times \end{array} \right.$$

$$b-a = 8 \Rightarrow p = 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b-c = \pm 9$$

Система  $\left\{ \begin{array}{l} a \in b = 710 \\ b-c = \pm 9 \end{array} \right.$

$\left\{ \begin{array}{l} a = 26 \\ b = 34 \\ c = 25 \end{array} \right.$   $\left\{ \begin{array}{l} a = -27 \\ b = -19 \\ c = -18 \end{array} \right.$

$$\Rightarrow b = a + 8 \Rightarrow$$

$$b-a = 8$$

$$\Rightarrow a^2 + a + 8 = 710$$

$$a^2 + a = 702$$

~~$$a^2 + a - 702 = 0$$~~

$$a_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+702 \cdot 4}}{2} \Rightarrow$$

$$a_1 = 26 \Rightarrow b_1 = 34$$

$$a_2 = -27 \Rightarrow b_2 = -19$$

$$c_1 = 25$$

$$c_2 = -18$$

Ответ:  $(26, 34, 25)$  и  $(-27, -19, -18)$

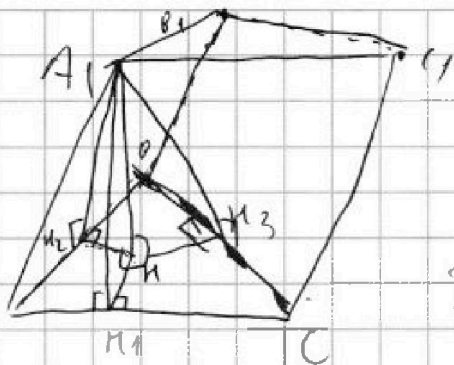


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Пусть наш пирамид  
 $ABCA_1B_1C_1$  и плоскости  
 уровней  $AA_1B_1B$  и  $AA_1C_1C$   
 равны.  
 Пусть  $AB = BC = CA = a \Rightarrow$

по формуле  

$$S_{ABC} = \sqrt{\frac{a+a+a}{2} \cdot \frac{a+a-a}{2} \cdot \frac{a+a-a}{2} \cdot \frac{a+a-a}{2}} = 1$$

$$\frac{a^2}{4} \cdot \sqrt{3} = 1 \Rightarrow \boxed{a = \frac{2}{\sqrt{3}}}$$

Пусть  $A_1H$  - высота ~~пирамиды~~ пирамиды из  
 т.  $A_1$ . Опустим  $HH_1 \perp AC$ ,  $HH_2 \perp AB$ ,  $HH_3 \perp BC$

т.к.  $AB = AC$  и  $S_{AA_1C_1C} = S_{AA_1B_1B} \Rightarrow A_1H_1 = A_1H_2$

(т.к. по теор. о 3  $\perp$   $A_1H_1$  и  $A_1H_2$  - высоты  
 в равных паралл. - лок  $AA_1B_1B$  и  $AA_1C_1C$ )

$$HH_1 = \sqrt{A_1H^2 + A_1H_1^2} = \sqrt{A_1H^2 + A_1H_2^2} = HH_2$$

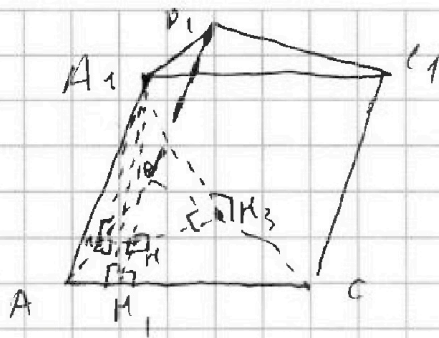


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Пусть падающая плоскость ~~ABCA1B1C1~~  
 $ABCA_1B_1C_1$  и плоскости  
 точек  $AA_1, B, B$  и  $AA_1, C_1$   
 равны.  
 $A_1H$  - высота призмы.

Длины  $AM_1 \perp AC$ ;  $AM_3 \perp BC$ ;  $AM_2 \perp AB$ .

И.т.  $AC = AB$  и  $S_{AA_1CB} = S_{AA_1B_1C}$   $\Rightarrow A_1M_1 =$

$= A_1M_2$  (и.т. по теор. о 3-х  $A_1M_1$  - высота перпендикулярна  $AA_1, C_1C$  и  $A_1M_2$  - высота перпендикулярна  $AA_1, B, B$ )

~~Пусть~~ Пусть  $A_1H = L$ ;  $A_1M_1 = A_1M_2 = h$ ;

$A_1M_3 = h_2$ .  ~~$A_1H = \sqrt{L^2 + h^2} = \sqrt{h^2 + h^2} = \sqrt{2}h$~~

~~$\sqrt{h^2 + L^2} = h = \sqrt{h^2 + L^2} \Rightarrow h = L = x$~~

~~Пусть  $AB = AC = BC = a$~~  Пусть  $AB = AC = BC = a$

по теореме  $\Rightarrow h = \sqrt{\frac{a^2 + a^2}{2} \cdot \frac{a^2 + a^2}{2} \cdot \frac{a^2 + a^2}{2} \cdot \frac{a^2 + a^2}{2}} = \frac{a^2}{4} \cdot \sqrt{3} \Rightarrow$

$h \Rightarrow a = \frac{2}{\sqrt{3}}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



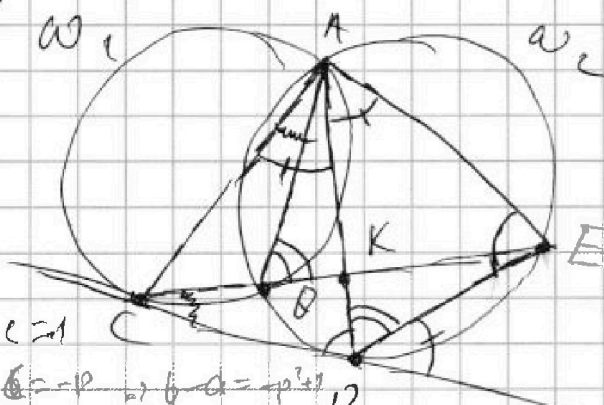
1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$710 - 676 \Rightarrow 4$$

(14)



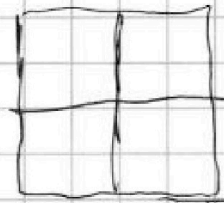
K - м. пересеч. CE и AD.

$$\frac{CK}{KE} = \frac{2}{5} \Rightarrow \frac{AC}{AE} = \frac{2}{5}$$

$$\frac{CD}{DE} = \frac{AC}{AO} = \frac{AD}{AE}$$

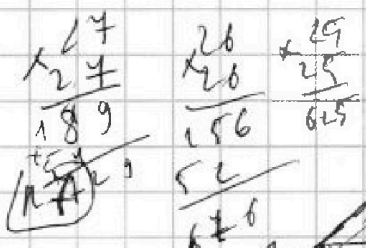
$$a - c = 1$$

$$b - a = p^2 - 1$$

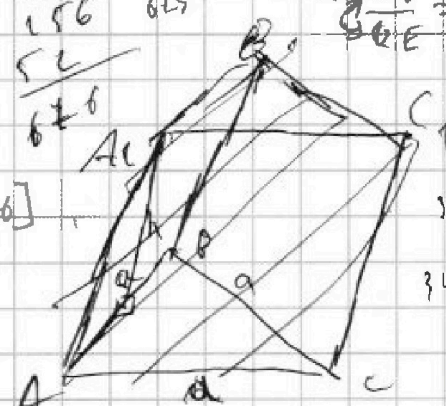


$$\frac{2x}{y} = \frac{y}{5x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = x \cdot \sqrt{10} \Rightarrow$$

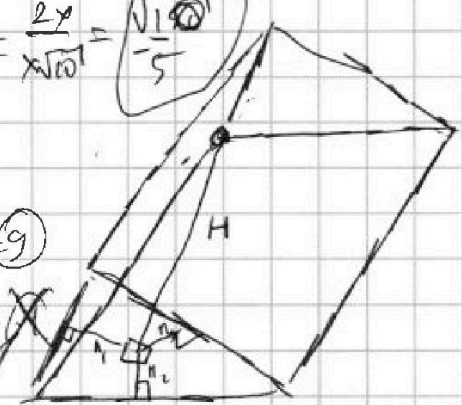


$$\frac{CD}{DE} = \frac{AC}{AO} = \frac{2x}{x\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{5}$$



$$34 - 25 = 9$$

$$34 + 24 =$$



$$(a-c) \cdot (b-c) = p^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a-c = 1$$

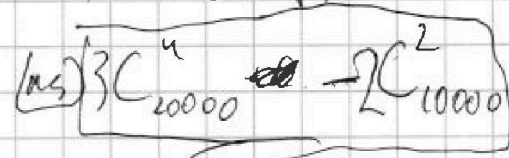
$$b-c = p^2$$

$$S = \sqrt{\frac{3a}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2}} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 = \frac{4}{\sqrt{3}} \Rightarrow a = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$b-a = p^2 - 1$$

$$b-a = (p-1) \cdot (p+1)$$



- как. углов или 1 или 3 стороны.

26 24 25 22 20 18 17

p 17

b-a=3

$$c^2 - (a+b) \cdot c + ab = p^2$$

$$c = \frac{a+b \pm \sqrt{(a+b)^2 - 4ab + 4p^2}}{2} = \frac{a+b \pm \sqrt{(a-b)^2 + 4p^2}}{2}$$

2 3 5 7 9 11 13 17 19 23

$$p=2 \Rightarrow b-c = 4 \quad a-c = 1$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} b \cdot q^6 = \sqrt{(25x-9) \cdot (x-6)} \quad (1) \\ b \cdot q^8 = x+3 \quad (2) \\ b \cdot q^{14} = \sqrt{\frac{25x-9}{(x-6)^3}} \quad (3) \end{cases} \text{ OДЗ: } x \notin \left[ \frac{9}{25}; 6 \right]$$

$$(1) \cdot (2) = (3) \cdot b \Rightarrow \sqrt{x-6} \cdot (x+3) = \sqrt{\frac{1}{(x-6)^3}} \cdot b$$

$$\Rightarrow b = \sqrt{(x-6)^4 \cdot (x+3)} = (x-6)^2 \cdot \sqrt{x+3}$$

$$q = \sqrt[8]{\frac{x+3}{b}} = \sqrt[8]{\frac{1}{(x-6)^2}} = \sqrt[4]{\frac{1}{x-6}}$$

$$-7 \cdot 2^8 \cdot \frac{1}{2^6} = \sqrt{-259 \cdot (-16)}$$

$$x = -2$$

$$b = 2^6$$

$$q = \sqrt[8]{\frac{1}{2^6}}$$

$$b - a = 3 \quad \text{X}$$

$$b - a = 8$$

$$b - a = 24 \quad \text{X}$$

$$b - a = 48 \quad \text{X}$$

$$b - a = 120 \quad \text{X}$$

$$b - a = 168 \quad \text{X}$$

$$b - a = 288 \quad \text{X}$$

$$b - a = 528 \quad \text{X}$$

$$2^6 \cdot \sqrt[8]{\frac{1}{2^6}} = \sqrt{-59 \cdot (-8)} \in \frac{159}{2809}$$

$$2^5 \cdot \sqrt[8]{2^7} = 2 \sqrt{2^1 \cdot \sqrt{59}} < 2 \cdot \sqrt{2^1 \cdot 2^3} \\ 2 \cdot \sqrt{2^7} > \sqrt{2^7}$$

$$\begin{array}{r} \times 702 \\ \hline 2808 \end{array} + 1 = 2809 = 53^2$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

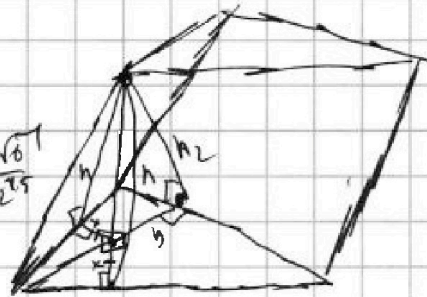
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$458 = 2 \cdot 279 = 2 \cdot 9 \cdot 31$$

$$x=0$$

$$q = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$b = \frac{4\sqrt{6}}{4 \cdot 2^5} = \frac{\sqrt{6}}{2^5}$$



$$h = \sqrt{H^2 + x^2}$$

$$a \cdot h = 3$$

$$a \cdot h_2 = 2$$

$$h_2 = \sqrt{H^2 - x^2}$$

$$\begin{array}{r} \times 31 \\ 31 \\ \hline 93 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 31 \\ 93 \\ \hline 561 \\ \times 31 \\ \hline 901 \\ 2883 \\ \hline 24791 \end{array}$$

$$\begin{cases} a \cdot \sqrt{H^2 + x^2} = 3 \\ a \cdot \sqrt{H^2 - x^2} = 2 \\ \frac{1}{2} \cdot a \cdot (2x + y) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} \times 27 \\ 4 \\ \hline 108 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 18 \\ 25 \\ \hline 9.50 = 450 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 31 \\ 31 \\ \hline 93 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 71 \\ 9 \\ \hline 639 \\ 358 \\ \hline 1101 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 71 \\ 31 \\ \hline 218 \\ 2201 \end{array}$$

$$\begin{cases} b \cdot q^6 = \sqrt{(25x-9) \cdot (x-6)} \\ b \cdot q^8 = x+3 \quad (2) \\ b \cdot q^{14} = \sqrt{\frac{25x-9}{(x-6)^5}} \quad (3) \end{cases}$$

$$OD3: x \notin \left[ \frac{9}{25}; 6 \right]$$

$$ODP: x > 3$$

$$(3) : (2) : (1) : q^8 = \sqrt{\frac{1}{(x-6)^4}} \Rightarrow q = \sqrt[10]{\frac{1}{(x-6)^4}}$$

$$(1) \cdot (2) : (3) : (x+3) \cdot \sqrt{(25x-9) \cdot (x-6)} = b^2 \cdot q^{16} = b \cdot (b \cdot q^{14})$$

$$= \sqrt{\frac{25x-9}{(x-6)^3}} \cdot b \Rightarrow b = (x+3) \cdot \sqrt{(x-6)^4} = (x+3)(x-6)^2$$

$$ODP: x > -3$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{array}{r} 18 \\ \times 18 \\ \hline 144 \\ 180 \\ \hline 324 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 324 \\ \wedge \\ 18 \end{array}$$

$$- 2 + 4 + 8 + 8$$