



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 5



1. [3 балла] Третий член арифметической прогрессии равен  $3x + 3$ , пятый член равен  $(x^2 + 2x)^2$ , а девятый равен  $3x^2$ . Найдите  $x$ .
2. [4 балла] Найдите наибольшее значение выражения  $4y + 8x$  при условии

$$\begin{cases} |x - 3y| \leq 3, \\ |3x - y| \leq 1. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары  $(m, n)$  натуральных чисел, для которых одно из чисел  $A = m^2 + 2mn + n^2 - 9m - 9n$  и  $B = m^2n + mn^2 - 3mn$  равно  $13p^2$ , а другое равно  $75q^2$ , где  $p$  и  $q$  - простые числа.
4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе  $AH$  треугольника  $ABC$ , проходящая через середину  $M$  его стороны  $BC$ , пересекает сторону  $AB$  и продолжение стороны  $AC$  в точках  $Z$  и  $Y$  соответственно. Найдите  $BC$ , если  $AC = 18$ ,  $AZ = 6$ ,  $YZ = 8$ .
5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} - \sqrt{6-y} + 5 = 2\sqrt{6+5x-y^2}, \\ x^4 + 5x^2 - \sqrt{y} = y^4 - \sqrt{x} + 5y^2. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат  $8 \times 8$  клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.
7. [6 баллов] В треугольнике  $ABC$  на медиане  $AM$  и биссектрисе  $CL$  как на диаметрах построены окружности  $\Omega$  и  $\omega$  соответственно, пересекающиеся в точках  $P$  и  $Q$ . Отрезок  $PQ$  параллелен высоте треугольника  $ABC$ , проведённой из вершины  $B$ . Окружность  $\Omega$  пересекает сторону  $AC$  повторно в точке  $N$ . Найдите длины сторон  $AC$  и  $BC$ , если  $AB = 10$ ,  $AN = 8$ .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА

из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$a_1$  - 1-й член арифм. прогрессии

$$a_3 = 3x + 3$$

$$a_5 = (x^2 + 2x)^2$$

$$a_9 = 3x^2$$

$$\Rightarrow a_5 - a_3 = (a_1 + 4d) - (a_1 + 2d) = 2d, \text{ где } d - \text{разность арифм. прогр.}$$

$$a_9 - a_5 = (a_1 + 8d) - (a_1 + 4d) = 4d.$$

и

$$2(a_9 - a_5) = a_9 - a_3$$

$$2((x^2 + 2x)^2 - 3x - 3) = 3x^2 - (x^2 + 2x)^2$$

$$2x^4 + 8x^3 + 8x^2 - 6x - 6 = 3x^2 - x^4 - 4x^3 - 4x^2$$

$$3x^4 + 12x^3 + 9x^2 - 6x - 6 = 0$$

$$(x+1)(3x^3 + 9x^2 - 6) = 0$$

$$(x+1)(x+1)(3x^2 + 6x - 6) = 0$$

$$(x+1)^2(3x^2 + 6x - 6) \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9+18}}{3} = \frac{-3 \pm \sqrt{27}}{3} = \frac{-3 \pm 3\sqrt{3}}{3} = -1 \pm \sqrt{3}$$

и

либо  $x = 1$

либо  $x = \frac{-3 \pm \sqrt{3}}{3}$

$$x = \begin{cases} x = 2 - 1 \\ x = \sqrt{3} - 1 \\ x = -1 - \sqrt{3} \end{cases}$$

Ответ: либо  $x = -1$

либо  $x = \sqrt{3} - 1$

либо  $x = -1 - \sqrt{3}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

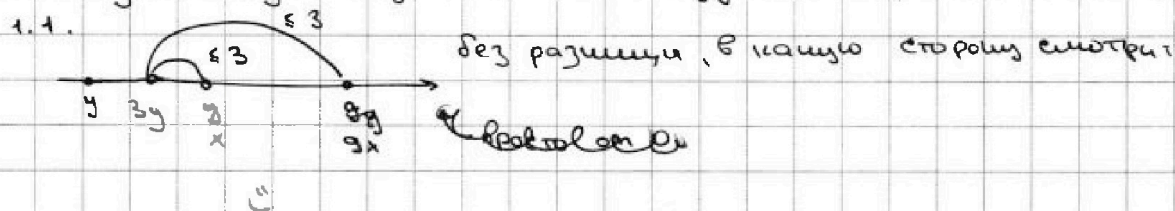
1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} |x-3y| \leq 3 \\ |3x-y| \leq 1 \end{cases} \Rightarrow 3|3x-y| \leq 3 \Rightarrow |9x-3y| \leq 3.$$

1 случай.  $3y$  находится не между  $x$  и  $9x$  на числ. прямой



$|9x-x| \leq 3$ , т.к. смотрим на расстояние

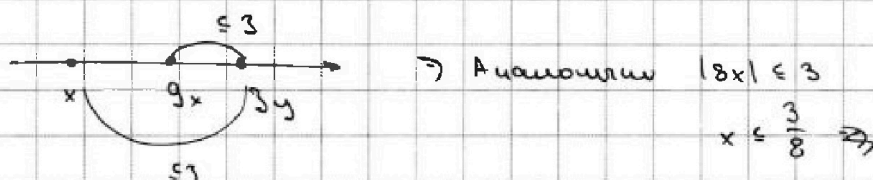
$$|8x| \leq 3$$

$$x \leq \frac{3}{8}$$

$$\begin{cases} x-3y \leq 3 \\ 3y-x \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3y \leq 3+x \\ 3y \leq 1+x \end{cases} \Rightarrow y \leq \frac{1}{8}$$

$$4y+8x \leq \frac{4 \cdot 9}{8} + \frac{3 \cdot 8}{8} = \frac{9}{2} + 3 = \frac{15}{2}$$

1.2



В обоих случаях  $x \leq \frac{3}{8} \Rightarrow 3x \leq \frac{9}{8} \Rightarrow |3x-y| \leq 1$

Однако  $|x-3y| \leq 3 \Rightarrow 3y \leq 3 \Rightarrow y \leq 1$

$x-3y \leq 3 \Rightarrow x$  больше  $3y$  ① т.к. при  $x < 0$ ,  $9x < 3y$

$3y-x \leq 1 \Rightarrow y \leq \frac{3+x}{3} = \frac{3}{3} + \frac{x}{3}$  ②

①  $x$  больше  $3y \Rightarrow 3x$  больше  $y$ .

$$x \leq \frac{3}{8}$$

$$y \leq \frac{1}{8} \Rightarrow 4y+8x \leq \frac{4}{8} + \frac{3}{8} \cdot 8 = \frac{7}{2}$$

②  $4y+8x \leq$

$$\leq 4 \cdot \frac{9}{8} + \frac{3}{8} \cdot 8 =$$

$$= \frac{15}{2} + 3 = \frac{21}{2}$$



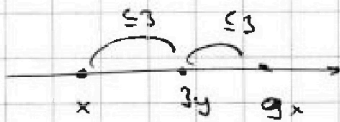
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Однако если  $3y$  между  $x$  и  $9x$



$$\Rightarrow |9x - x| \leq 6$$

$$\stackrel{||}{=} x \leq \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

$$\stackrel{||}{=} 3y - x \leq 3 \Rightarrow y \leq \frac{3+x}{3} = \frac{3+\frac{3}{4}}{3} = \frac{15}{4}$$

$$\stackrel{||}{=} x \leq \frac{15}{4} \Rightarrow 4y + 8x \leq 4 \cdot \frac{15}{4} + 8 \cdot \frac{3}{4} = 15 + 6 = 21$$

$y \leq \frac{15}{4}$   $\Rightarrow$  самая маленькая оценка из всех прошлых

Пример:  $x = \frac{3}{4}$   
 $y = \frac{5}{4}$

$$|x - 3y| = \left| \frac{3}{4} - \frac{15}{4} \right| = 3 \leq 3 \quad (+) \text{ подходит.}$$

$$|3x - y| = \left| \frac{9}{4} - \frac{5}{4} \right| = 1 \leq 1 \quad (+) \text{ подходит}$$

$\Rightarrow$  max значение  $8x + 4y = 11$ , достигаемое при  $x = \frac{3}{4}$  и  $y = \frac{5}{4}$

Ответ: "



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = m^2 + 2mn + n^2 - 9m - 9n = (m+n)(m+n-9)$$

$$B = m^2n + mn^2 - 3mn = mn(m+n-3)$$

Одно из чисел =  $13p^2$ , а другое  $75q^2$   
 $p, q$  - простые

1 случай.

$$A = 13p^2$$

$$B = 75q^2$$

1 вариант.  $\begin{cases} m+n = 13 \\ m+n-9 = p^2 \end{cases} \Rightarrow 9 = 13 - p^2$

$$p^2 = 4 \Rightarrow p = 2 \Rightarrow m+n = 3 = 10$$

$$m = \frac{75q^2}{10}, \text{ м.к. } m, n \in \mathbb{N} \Rightarrow$$

$$\frac{75q^2}{10} \in \mathbb{N} \Rightarrow q^2 : 2, \text{ но м.к.}$$

$$q\text{-простое} \Rightarrow q = 2$$

$$mn = \frac{75 \cdot 4}{10} = 30, \text{ н.ч. } m > n.$$

$$m+n = 13 \Rightarrow m-n = \sqrt{13^2 - 4 \cdot 30}$$

$$\sqrt{(m+n)^2 - 4mn}$$

$$m-n = 7 \Rightarrow \begin{cases} 2m = 20 \\ 2n = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 10 \\ n = 3 \end{cases}$$

входят и сложены

простые (+)

подходит (+) (10, 3) и (3, 10)

3 вариант.  $\begin{cases} m+n = 13p^2 \\ m+n-9 = 1 \end{cases}$

$$m+n = 10 \Rightarrow 10 = 13p^2$$

$$p^2 = \frac{10}{13} \ominus, \text{ м.к. } p \geq 1$$

4 вариант:  $\begin{cases} m+n = p^2 \\ m+n-9 = 13 \end{cases}$

$$9 = p^2 - 13 \Rightarrow p^2 = 22 \Rightarrow p = \sqrt{22} \ominus, \text{ м.к. } p \in \mathbb{N}$$

5 вариант:  $\begin{cases} m+n = p \\ m+n-9 = 13p \end{cases} \Rightarrow 9 = p - 13p$

$$p = -\frac{3}{4} \ominus, \text{ м.к. } p \geq 1$$

6 вариант:

$$\begin{cases} m+n = 1 \\ m+n-9 = 13p^2 \end{cases}$$

$$9 = 1 - 13p^2$$

$$p^2 = -\frac{8}{13} \ominus, \text{ м.к. } p^2 \geq 0$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Больше вариантов в этом случае нет, т.к. мы можем распределить просте между двумя свободными машинами образам

2 случай

$$A = 75q^2$$

$$B = 13p^2$$

$$\Rightarrow mn(m+n-3) = 13p^2$$

1 вариант

$$m = n = p$$

$$m+n-3 = 13$$

$$\Rightarrow 2p-3 = 13$$

$$p = 8 \ominus, \text{ т.к. } p - \text{ простое}$$

2 вариант.

КНО (м.ч. м.ч. n

$$m = m+n-3 = p.$$

$$n = 13 \Rightarrow$$

$$p = 13 - 3 = p.$$

$$10 = 0 \ominus$$

не подходит

3 вариант:

Один множитель — это 1

Одно из КНО  $m=1$

$$n(n-2) = 13p^2 \Rightarrow$$

3.1.  $n=13$

$$n-2 = 13p^2 \Rightarrow$$

$$2 = 13 - p^2$$

$$p^2 = 9$$

$$p = 3.$$

3.2.  $n=p$

$$n-2 = 13p$$

$\Rightarrow$

$$2 = p - 13p \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p = -\frac{1}{6} \ominus$$

$p \in \mathbb{N}$

3.3.  $n=13p$

$$n-2 = p$$

$$2 = 12p \Rightarrow p = \frac{1}{6}$$

$\ominus$  т.к.  $p \in \mathbb{N}$

$$m=1$$

$$p=3$$

$$n=13$$

$$\Rightarrow A = 14 \cdot 5 = 75q^2$$

$$14 = 15q^2 \ominus,$$

т.к.  $14 \neq 15$

3.4.  $n=13p^2$

$$n-2 = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 = 13p^2 - 1 \Rightarrow 13p^2 = 3 \Rightarrow p = \sqrt{\frac{3}{13}}$$

$\ominus$  т.к.  $p \in \mathbb{N}$

3.5.  $n=p^2$

$$n-2 = 13 \Rightarrow$$

$$2 = p^2 - 13$$

$$p^2 = 15 \ominus, \text{ т.к. } p = \sqrt{15}$$

$p \in \mathbb{N} \text{ (?)}$

3.6

$$n=1$$

$$n-2 = 13p^2 \Rightarrow$$

$$2 = 1 - 13p^2 \Rightarrow 13p^2 = -1$$

$\ominus$ , т.к.  $13p^2 \geq 0$

Аналогично если  $n=1$  подходящих случаев нет

4 вариант:  $m+n-2 = 1 \Rightarrow m+n=3$

$$m+n-3 = -6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = -18 = 75q^2 \text{ (?)}$$

если  $75q^2 \geq 0$

Ответ:  $(10, 3)$ ;  $(3, 10)$

$\ominus$  не подходит

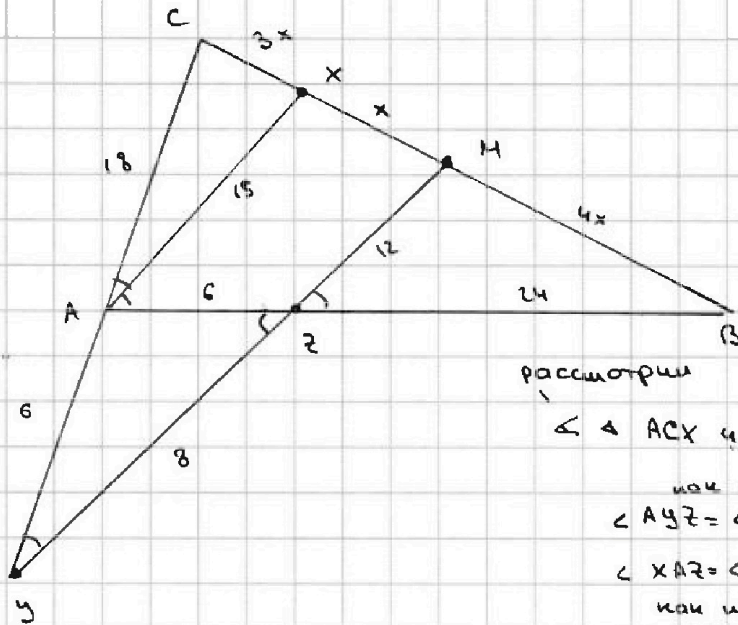


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



BC = ?  
AC = 18  
AZ = 6  
YZ = 8.

рассмотрим

$\triangle ACX$  и  $\triangle AZY$ :

или соотв.

$\angle AYZ = \angle CAX$ , м.и.  $AX \parallel YM$ .

$\angle XAZ = \angle AZY$ , м.и.  $AX \parallel ZM$

или накр.  
лежащие

"

$\angle AYZ = \angle AZY \Rightarrow \triangle AZY$  - р/б.

"

$AZ = AY = 6$ .

$\triangle$  т. Меленая для  $\triangle ACB$  и прямой  $MY$ .

$$\frac{CA}{AY} \cdot \frac{YZ}{ZM} \cdot \frac{CM}{CB} = 1 \Rightarrow \frac{18}{6} \cdot \frac{8}{y} \cdot \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow y = 12$$

м.и.  $M$  - середина стороны

"

$$ZM = 12$$

По т. Фалеса для прямых  $AX \parallel YM$ :  
 $\triangle ACX$  и  $\triangle CYM$

$$\frac{CX}{CM} = \frac{18}{18+6} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{AX}{YM} = \frac{AC}{CY}$$

$$\frac{AX}{12+8} = \frac{18}{18+6}$$

$$\Rightarrow AX = \frac{18}{24} \cdot 20$$

$$AX = 15$$

По т. Фалеса для прямых  $AX \parallel ZM$ :  
 $\triangle BAX$  и  $\triangle BZM$

$$\frac{BZ}{AB} = \frac{ZM}{AX}$$

$$\frac{x}{x+6} = \frac{12}{15}$$

$$15x = 12x + 72$$

$$3x = 72$$

$$x = 24$$

$$ZB = 24$$

$\Leftarrow$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{н. и. } \frac{CX}{XH} = \frac{3}{4} = \frac{CX}{CX+XH} \Rightarrow \frac{CX}{2 \cdot CX} = \frac{3}{2 \cdot 7} = \frac{3}{14}$$

$$\Downarrow$$

$$XH = \frac{1}{2} CX$$

$$\frac{CX}{CX} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{CX}{CB} = \frac{CX}{2 \cdot CX} = \frac{3}{8}$$

$$\triangle ABC: \text{ по т. Косинусов: } 36 = 36 + 64 - 2 \cdot 6 \cdot 8 \cos \alpha$$

$$\Downarrow$$

$$\cos \alpha = \frac{64}{2 \cdot 6 \cdot 8} = \frac{2}{3}$$

Применим т. Косинусов для  $\triangle ACX$ :

$$9x^2 = 18^2 + 15^2 - 2 \cdot 18 \cdot 15 \cos \alpha$$

$$\Downarrow$$

$$36 + 25 - 40$$

$$x^2 = 18 \cdot 2 + 15^2 - 2 \cdot 2 \cdot 15 \cdot \frac{2}{3}$$

$$x^2 = 24 \Rightarrow x = \sqrt{24}$$

$$\Downarrow$$

$$CB = 8x = 8\sqrt{24}$$

Ответ:  $BC = 8\sqrt{24}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-y} + 5 = 2\sqrt{6+5x-y^2} \quad (1)$$

$$x^4 + 5x^2 - \sqrt{y} = y^4 + 5y^2 - \sqrt{x} \quad (2)$$

"

$$(2) \quad x^4 + 5x^2 + \sqrt{x} = y^4 + 5y^2 + \sqrt{y}$$

Заметим, что  $f(x) = x^4 + 5x^2 + \sqrt{x}$  строго возрастает.

$$\text{н.ч.} \quad f(x+\varepsilon) = (x+\varepsilon)^4 + 5(x+\varepsilon)^2 + \sqrt{x+\varepsilon}$$

$$\varepsilon > 0$$

$$(x+\varepsilon)^4 > x^4, \text{ н.ч. } x \geq 0 \text{ (}\sqrt{x} \text{ определен)}$$

$$\varepsilon > 0$$

$$(x+\varepsilon)^2 > x^2, \text{ н.ч. } x \geq 0 \text{ и } \varepsilon > 0$$

$$\sqrt{x+\varepsilon} > \sqrt{x}$$

"

$f(x+\varepsilon) > f(x)$ . Получается, что  $f(x) = f(y)$  только если  $x=y$ .

"

$x=y$ . Подставим в (1)

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 = 2\sqrt{6+5x-x^2}$$

$$\exists x+1 = t \Rightarrow 6-x = 7-t \Rightarrow 6+5x-x^2 = t(7-t)$$

"

$$\sqrt{t} - \sqrt{7-t} + 5 = 2\sqrt{t(7-t)}$$

$$(\sqrt{t} - \sqrt{7-t})^2 = (2\sqrt{t(7-t)} - 5)^2$$

$$t + (7-t) - 2\sqrt{t(7-t)} = 4t(7-t) - 10\sqrt{t(7-t)} + 25$$

$$\exists \sqrt{t(7-t)} = a \Rightarrow 9 - 2a = 4a^2 - 20a + 25$$

$$4a^2 - 18a + 18 = 0 \Rightarrow 2a^2 - 9a + 9 = 0 \Rightarrow a_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{81-72}}{4}$$

$$a_{1,2} = \begin{cases} a = 3 \\ a = \frac{3}{2} \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1 случай  $a=3 \Rightarrow \sqrt{t(7-t)} = 3$

$$t(7-t) = 9 \Rightarrow t^2 - 7t + 9 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49-36}}{2} = \frac{7 \pm \sqrt{13}}{2}$$

если  $t = \frac{7+\sqrt{13}}{2} \Rightarrow x = t-1 = \frac{5+\sqrt{13}}{2} \quad (+) \quad x \geq 0$  подходит.

$t = \frac{7-\sqrt{13}}{2} \Rightarrow x = t-1 = \frac{5-\sqrt{13}}{2}$  ~~не подходит~~  $(-)$  ~~не подходит~~  $x < 0$  не подходит.  $t(7-t) < 9$  по условию  $t > 0$   $7-t < 0$   $t < 0$   $7-t > 0$

2 случай.  $a = \frac{3}{2} \Rightarrow \sqrt{7(7-t)} = \frac{3}{2}$

$$4t^2 - 28t + 9 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{14 \pm \sqrt{196-36}}{4} = \frac{14 \pm 4\sqrt{10}}{4} = \frac{7 \pm 2\sqrt{10}}{2}$$

если  $t = \frac{7+2\sqrt{10}}{2} \Rightarrow x = t-1 = \frac{5+2\sqrt{10}}{2}$ ,  $x \geq 0$  подходит  $7-t = \frac{7-2\sqrt{10}}{2} \geq 0$

если  $t = \frac{7-2\sqrt{10}}{2} \Rightarrow x = t-1 = \frac{5-2\sqrt{10}}{2}$ ,  $x < 0$  не подходит ( $25 < 40$ )

Ответ:  ~~$\frac{7-\sqrt{13}}{2}$~~   $\left\{ \frac{5+\sqrt{13}}{2}, \frac{5-\sqrt{13}}{2}, \frac{5+2\sqrt{10}}{2} \right\}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

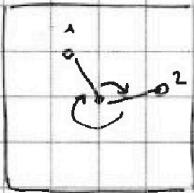
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач думеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Единственная точка, которая не переходит при повороте (т.е. переходит в саму себя) - это центр поворота. (но обе точки ни быть не могут,  $\Rightarrow$   $\exists$  1 из них является  $\text{с.}$ )

Остальные же точки перейдут в себя после суммарного поворота на  $360^\circ$  (т.е. 4 раза)

Хотим доказать, что для каждого положения точек  $\exists$  <sup>не</sup>  $\exists$  <sup>3</sup>  $\exists$ , с которыми он совпадает при повороте

Если это не так  $\Rightarrow$  какие-то две точки перешли друг в друга за менее, чем 4 поворота  $\Rightarrow$  точка 1  $\rightarrow$  2  
точка 2  $\rightarrow$  1



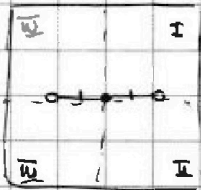
Однако угол поворота  $12$  должен совпадать с углом поворота  $2 \rightarrow 1$

В сумме они дают  $360^\circ \Rightarrow \angle 12 = \angle 21 = 180^\circ$

$\Downarrow$

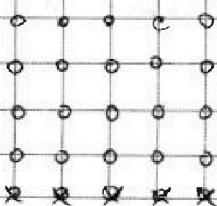
Это было через 2 поворота  $\Rightarrow$  1, центр, 2

притом на одинаковом расстоянии от центральной  $\text{т.}$



Во всех случаях кроме <sup>такого</sup>  $\text{т.}$   $\text{у}$  положения есть ровно еще 3 ему подобных

кол-во случаев, когда точки нежат в I и III части компенсируют поворотом II и IV  $\Rightarrow$  считаем только I и III



$\nearrow$  выберем одну точку  $\Rightarrow$  вторая автоматически задается

$\Rightarrow$  точек случаев 20



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Всего способов выбрать 2 монеты  $\frac{81-80}{2} = 81-40$ .

н.ч. по одной стороне  
квадрата лежит 2 монеты

из тех способов

~~20~~ ~~4~~ = ~~80~~ исключений.  
80 по 2

"  
 $81-40 - \frac{80}{40} = \frac{80-40}{40}$  В каждом отсюда  
случае каждый  
учитывается в еще  
3 случаях

"  
расстановки  $\frac{80-40}{4} + \frac{80}{40} \cdot 20 =$

$$= 800 + 20 = 820$$

Ответ: 820.

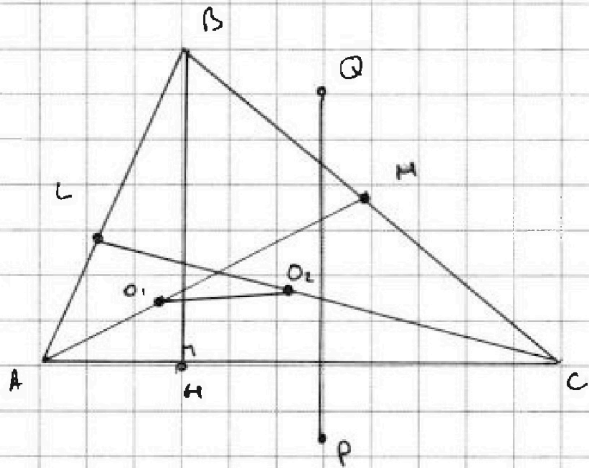
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



BH - высота из B.

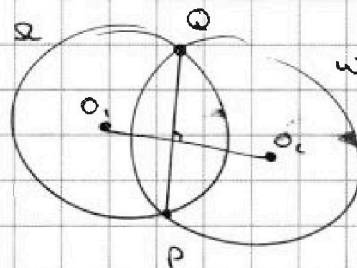
$QP \parallel BH$

$BH \perp AC$ , т.к. высота

$\Downarrow$

$QP \perp AC$

Примем  $\Omega$  и  $\omega$



$\Rightarrow QP$  - рад ось

$\Downarrow$

$QP \perp O_1O_2$

т.к. AM - диаметр  $\Omega$

Примем

$O_1$  - центр AM

$O_2$  - центр CL

т.к. CL - диаметр  $\omega$

$QP \perp O_1O_2$

$QP \perp AC$

$\Rightarrow O_1O_2 \parallel AC$

$\Downarrow$

$O_1O_2$  - часть средней линии  $\Delta ALC$  и  $\Delta AMC$ , которые совпадают

т.к. сер. линия  $\Delta ALC \parallel AC$  и проходит через  $O_2$

Аналогично  $\Delta AMC$  сер. линией  $\parallel AC$  и проходит через  $O_1$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} x &= 6 \\ y &= 3 \end{aligned}$$

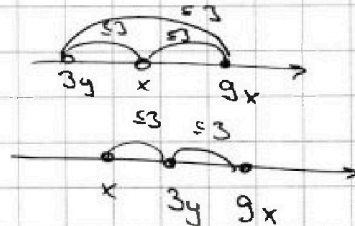
$$6 - 9 \leq 3 \quad \ominus$$

$$\begin{aligned} 4y + 8x &> 0 \\ 4(y + 2x) &> 0 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} |x - 3y| \leq 3 \\ |3x - y| \leq 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (x - 3y)^2 &\leq 9 \\ (3x - y)^2 &\leq 1 \end{aligned}$$

$$3 \leq x \leq 9x$$



$$\begin{aligned} 8x &\leq 6 \\ x &\leq \frac{3}{4} \end{aligned}$$

$$3y - x \leq 3$$

$$y \leq \frac{3+x}{3} \leq \frac{3+\frac{3}{4}}{3} = \frac{3+\frac{3}{4}}{3} = \frac{12+\frac{3}{4}}{12} = \frac{48+3}{48} = \frac{51}{48} = \frac{17}{16}$$

$$x = \frac{3}{8}$$

$$|x - 3y| \leq 3$$

$$\left| \frac{3}{8} - \frac{15}{4} \right| \leq 3 \quad \oplus$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{3}{8} \\ y &= \frac{5}{4} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 8x + 4y = 6 + 5 = 11$$

$$y = \frac{17}{8} \Rightarrow$$

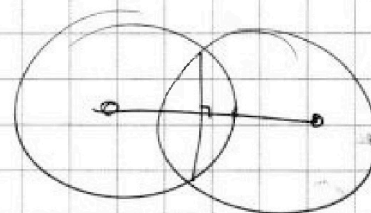
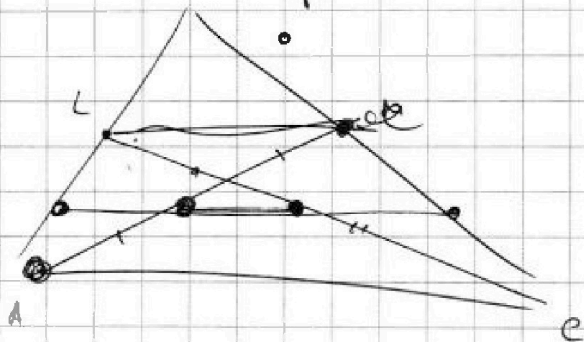
$$\Rightarrow 3y =$$

$$|3x - y| \leq 1 \quad \left| \frac{9}{8} - \frac{5}{4} \right| \leq 1 \quad \oplus$$

$$\frac{17}{8} = 4 + 3$$

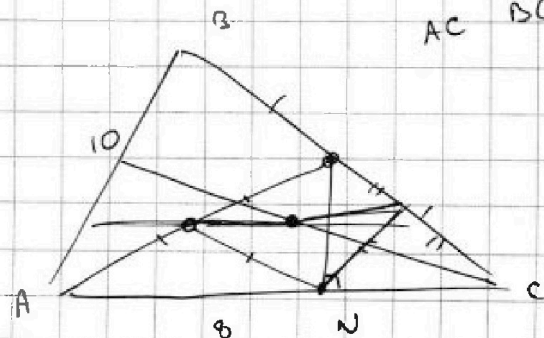
$$\frac{17}{2} + 3 = \frac{23}{2}$$

LMHAC  $\Rightarrow$  L - середина  $\Rightarrow$



$$\begin{aligned} &11.5 \\ &3\frac{3}{8} + 3 \\ &24 + 3 \\ &27\frac{3}{8} \end{aligned}$$

AC BC  $\Rightarrow$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

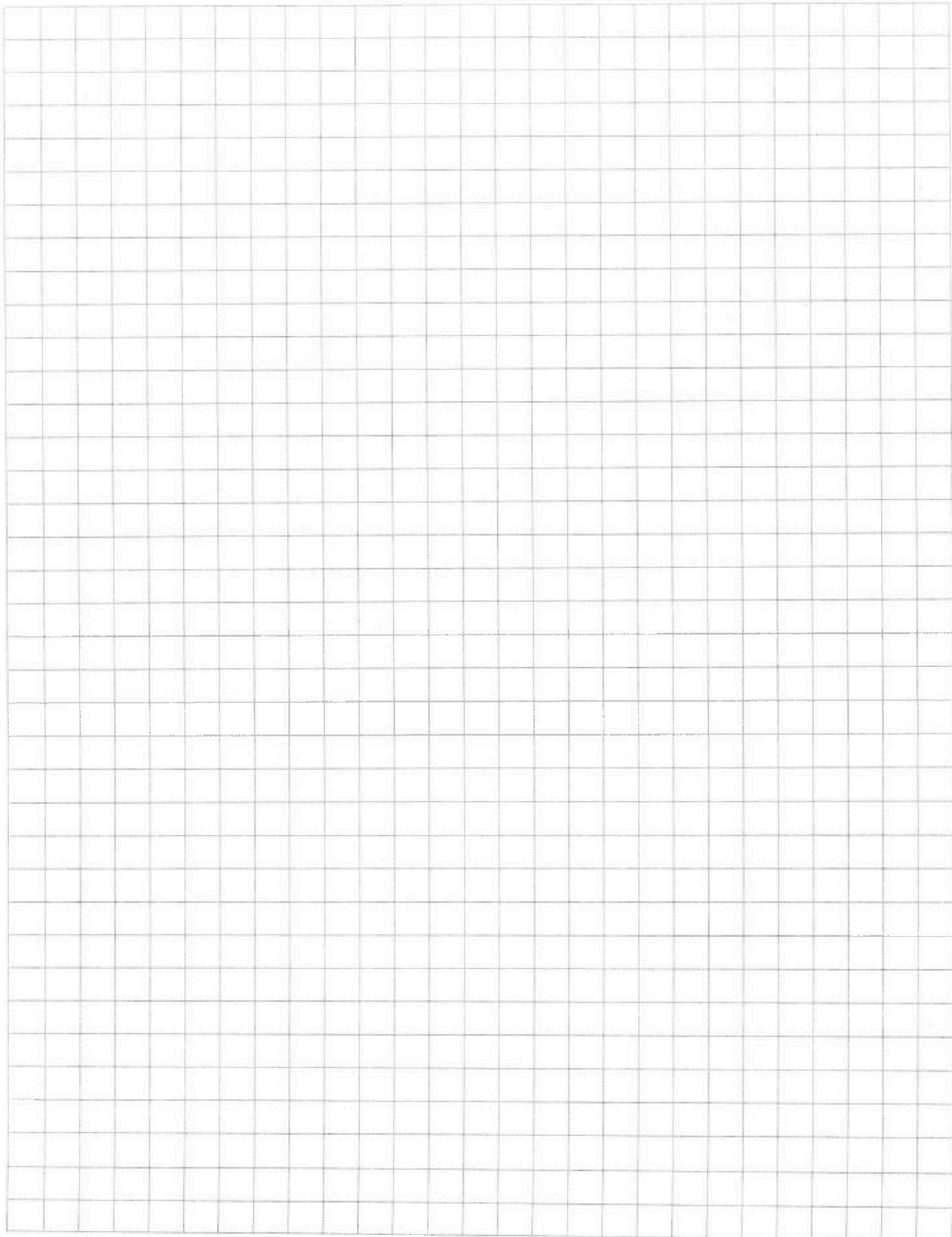
5

6

7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
\_\_\_ ИЗ \_\_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

2)  $m+n=p \Rightarrow m+n+g = p+g = 13p$

$g = -12p$

а)  $m+n+g=13 \Rightarrow m+n=22 = p^2$

4)  $m+n+g=p \Rightarrow m+n=13p \Rightarrow 13p-g=p$

$12p=g$   
 $p = \frac{g}{12}$

$2 \cdot 18 + 25 - 2 \cdot 2 \cdot 15 \cdot \frac{2}{3}$   
 $36 + 25 - 40$   
61

21

2 вып.

$mn(m+n-3) = 13p^2$

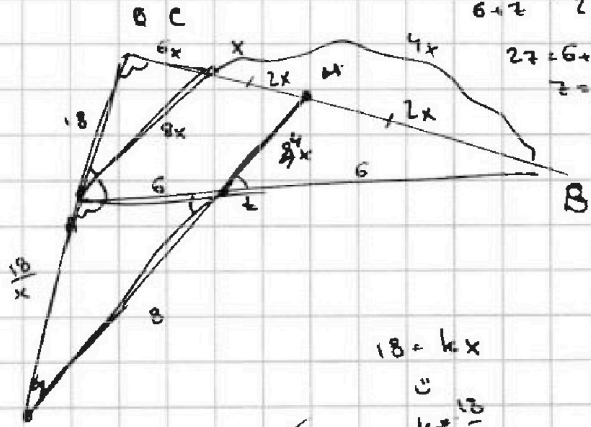
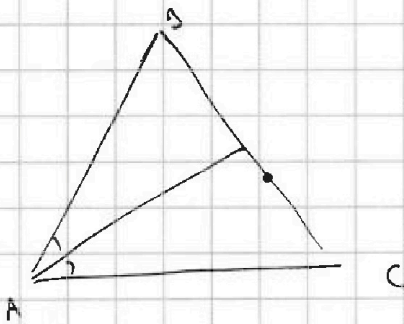
"

1)  $m=n=p$   
 $m+n-3=13$

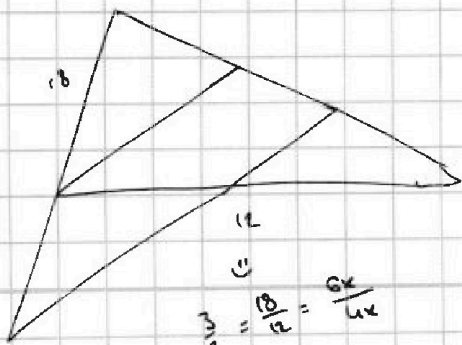
$2p-3 \Rightarrow p=8$

2)  $m=13$   
 $n=p \Rightarrow 10+p=p$   
 $10=p$

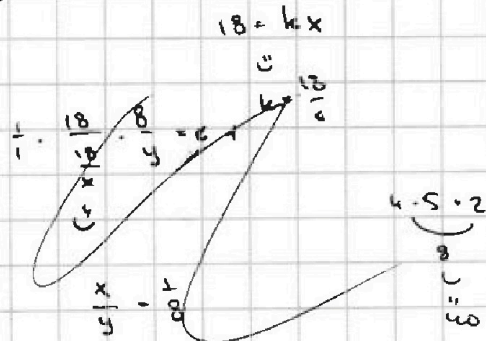
у  
таких нет



$\frac{z}{6+z} = \frac{1}{2}$   
 $2z = 6+z$   
 $z=6$



$18 = kx$   
 $18 = 2 \cdot 5 \cdot 2$   
 $18 = 20$



$72 + 25 - 40 = 57$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} - \sqrt{6-y} + 5 = 2\sqrt{6+5x-y^2} \\ x^4 + 5x^2 - \sqrt{y} = y^4 - \sqrt{x+5y^2} \end{cases}$$

$$(x+1)(6-y) = 5(x+1) \quad , \quad x$$

$$\begin{aligned} \sqrt{x} - \sqrt{y} &= x^2 - y^2 + 5x^2 - 5y^2 = (x^2 - y^2)(x^2 + y^2 + 5) \\ (\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x+y)(x^2 + y^2 + 5) &\Leftrightarrow (\sqrt{x} + \sqrt{y})(x+y)(x^2 + y^2 + 5) = 1 \end{aligned}$$

1 шаг.  $x = y$ .

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 = 2\sqrt{6+5x-x^2}$$

$$(3-x)(2-x)$$

$$x^2 - 5x + 6$$

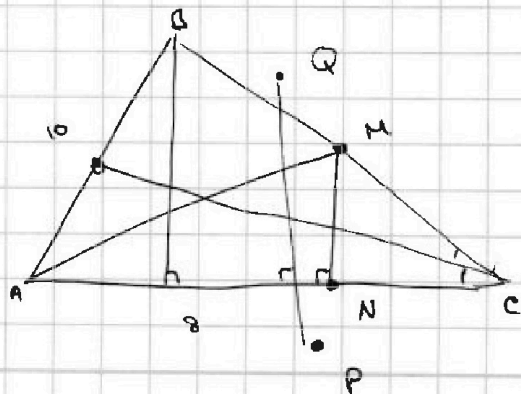
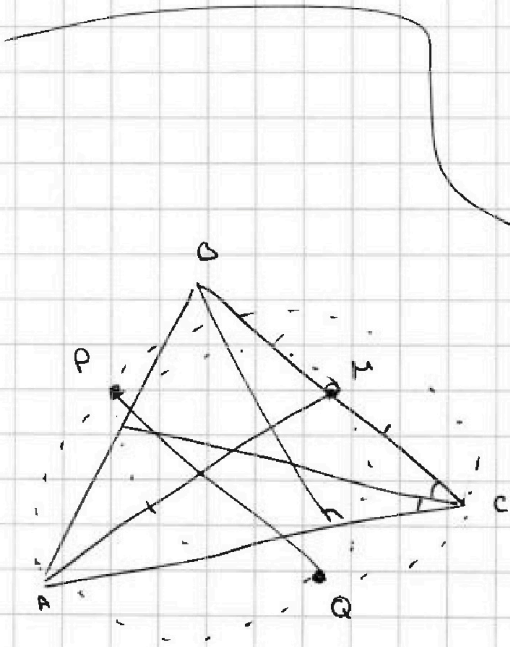
$$(x-6)(x+1)$$

$$\leftarrow (6-x)(x+1)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sqrt{x-1} - \sqrt{6-x} + 5 &= 2\sqrt{\dots} \\ 5 - 2\sqrt{\dots} &+ 10\sqrt{x-1} - 10\sqrt{6-x} \\ &+ 25 \end{aligned}$$

$$2(x+1)(6-x)$$

$$2\sqrt{\dots} =$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

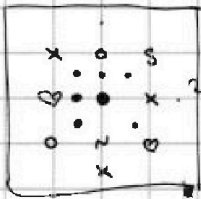
$$3x+3$$

as

$$3x+3+2d = (x^2+2x)^2$$

''

$$2((x^2+2x)^2 - 3x - 3) = 3x^2 - (x^2+2x)^2$$



$$2(x^4 + 4x^3 + 4x^2 - 3x - 3) = -x^4 - 4x^3 - 4x^2 + 3x^2$$

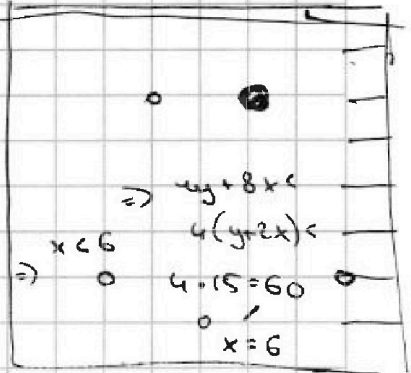
$$3x^4 + 12x^3 + 9x^2 - 6x - 6 = 0$$

$$2y+3 \geq 3y$$

$$(x+1)(3x^3+9x^2-6) = 0$$

$$(x+1)^2(3x^2+6x-6) = 0$$

$$x_1 = \frac{-3 \pm \sqrt{9+18}}{3} = \frac{-3 \pm \sqrt{27}}{3}$$



$$y \leq 3 \Rightarrow$$

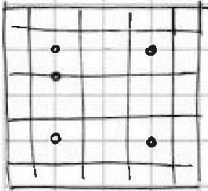
$$x < 2y$$

$$x \geq 3y - 3 \quad y = 3$$

$$\begin{cases} 3y - x \leq 3 \\ 3x - y \end{cases} \Rightarrow x + 3 \geq 3y$$

$$2y+3 - 1 + 2 = 3$$

$(0, 0), (1, 0), (0, 1), (0, 3)$



$$4y+8x = \max?$$

$$\begin{cases} |x-3y| \leq 3 \\ |3x-y| \leq 1 \end{cases}$$

1 случай  $x, y > 0$ .

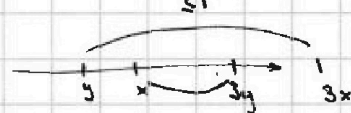
$$x-3y \leq 3$$

$$x \leq 3+3y$$

$$y+2x > 0$$

$$3x-y < y+2x$$

$$x < 2y$$



$$4y+8x =$$

$$x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4-4}}{1} = 2$$

$6, 0, 9, 0, 1$

$$A = m^2 + 2mn + n^2 - 9m - 9n =$$

$$= (m+n)(m+n-9)$$

$$B = mn(m+n-3)$$

$$1 \text{ случай. } (m+n)(m+n-9) = 13p^2 \Rightarrow$$

одно  $13p^2$  п.р. - простое

$$25q^2 =$$

$$m+n=13 \Rightarrow m+n-9 = 4 = 2^2$$

$$m+n-3=10 \Rightarrow q=2 \Rightarrow$$

$$169 - 120 = 49 = 7^2$$

одно из них простое  $\Rightarrow mn = 300$   
 $7 \cdot 4 = 300$  одно из них  $> 13$

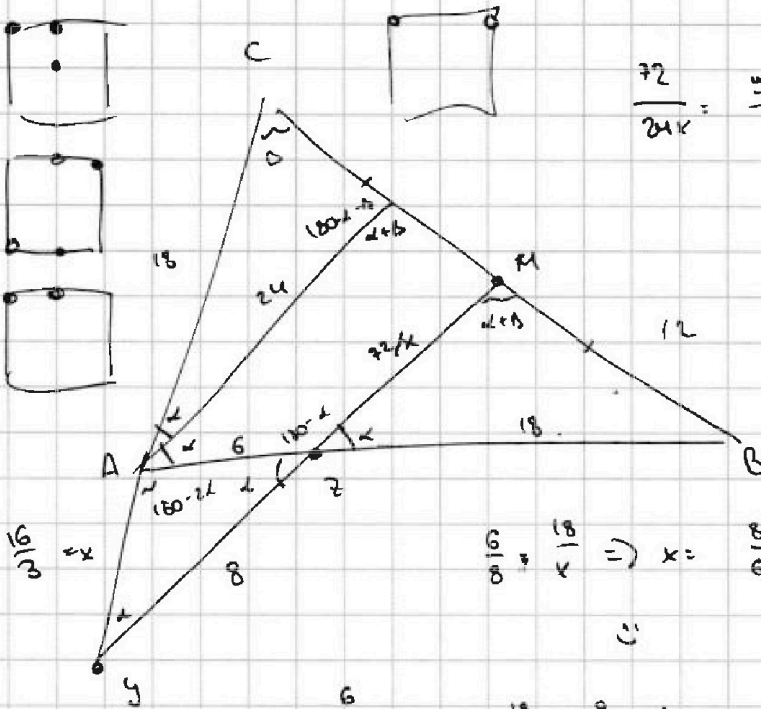


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{72}{24x} = \frac{y+6}{y+6}$$

$$72(y+6) = 24 \cdot (y+6) = 72 \cdot 24$$

$$y+6 = 24$$

$$y = 18$$

$$\frac{6}{8} = \frac{x}{18} \Rightarrow x = \frac{6}{8} \cdot 18 = 24$$

$$\frac{72}{18x} = \frac{6}{8}$$

$$\frac{x}{18} \cdot \frac{18}{25} \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow xy = 18 \cdot 4$$

$$y = \frac{72}{x}$$

$$x = \frac{16}{3}$$

$$\frac{72 \cdot 3}{18 \cdot 2} = \frac{27}{2}$$

$$MB = \frac{6}{8} \cdot \frac{18}{3} = 12$$

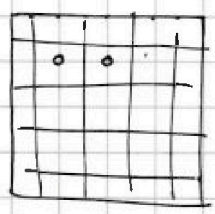
$$\frac{9 \cdot 8}{2} = 9 \cdot 4 - 2$$

$$\frac{9 \cdot 4 - 22}{4} + 2$$

$$8 + 2 = 10$$

24

$$\frac{3}{4} \cdot 20$$



$$9 \cdot 9 = 81$$

$$\frac{81 \cdot 80}{27} = 81 \cdot 40$$

$$\sqrt{81} = 9$$

12 1  
2 2  
1  
2 1



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

2 слуга.  $x \neq y$ .

"  
 $(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x+y)(x^2+y^2+5) = 1$   $a, b > 0$ .

2  $(a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4+5) = 1$

$\Rightarrow a+b < 1$  и  $a, b < 1 \Rightarrow a^2+b^2 < 1$   
 $a^2+b^2 < 1$

$x^4 + 5x^2 + \sqrt{x}$

$\sqrt{x}$

$a + 5a^4 + a$

$\sqrt[3]{\frac{1}{2}} \Rightarrow \sqrt[3]{\frac{1}{256} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{2}}$

$4 \cdot 2 + 2 \cdot 15$

$8a^7 + 10a^3 + 1$

$\sqrt[3]{a^3}$

$a^3 + 5a^4 + a$

корни от 0 до 1?

$8b + 5b^4 + b$

$8 \cdot \frac{1}{128} - 20 \cdot \frac{1}{8} + 1$

$-\frac{1}{16} - \frac{20}{4} + 1$

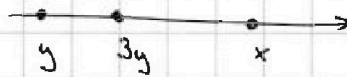
$x^4 + 5x^2 + \sqrt{x}$

$x \uparrow \Rightarrow x^4 \uparrow$

$5x^2 \uparrow$

$\sqrt{x} \uparrow$

(+)



1 слуга.  $x \geq 3y$   $3x \geq y$ .  
 $\begin{cases} |x-3y| \leq 3 \\ |3x-y| \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-3y \leq 3 \\ 3x-y \leq 1 \end{cases}$

$\Rightarrow 4x - 4y \leq 4$

$x - y \leq 1$

$x \leq 1 + y \Rightarrow 4y + 8x \leq 8 + 12y$

$x \leq 1 + y \leq 1 + 3x$

2 слуга.  $x \geq 3y$   $3x \leq y$  (-)

3 слуга.  $x \leq 3y$   $3x \leq y$

$\begin{cases} 3y - x \leq 3 \\ 3x \\ 3x + y \leq 1 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} 3y - 4x \leq 4 \\ y - x \leq 1 \end{cases}$

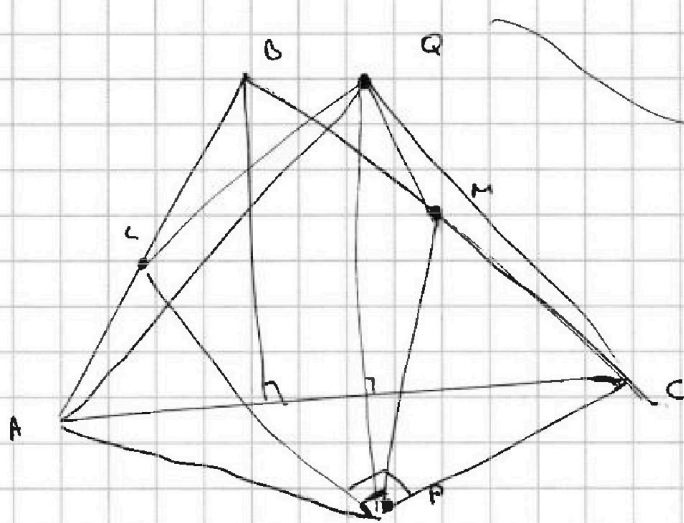


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{aligned} 9x - 3y &\leq 3 \\ x - 3y &\leq 3 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} 10x - 6y &\leq 6 \\ 5x - 3y &\leq 3. \end{aligned}$$

$PQ \perp AC$

$$\begin{aligned} |x - 3y| &\leq 3 \\ 3|x - y| &\leq 9 \\ 3|x - 3y| &\leq 9 \end{aligned}$$

$$3|3x - y| \leq 3$$

$$|9x - 3y| \leq 3$$

$$|x - 3y| \leq 1$$

$$\begin{aligned} \sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} &\leq 3 \\ x+1 + 6-x &= 7 \\ x+1 - 7-t & \end{aligned}$$

$$y \quad 3y \quad x \quad 9x$$

$$\sqrt{t} - \sqrt{7-t} = 5 = 2\sqrt{t(7-t)}$$

$$y \quad 3y \quad x \quad 3x \quad 9x$$

$$7 - 2\sqrt{t(7-t)} = 4t(7-t) = 4t(7-t)$$

$$\sqrt{t(7-t)} = a \Rightarrow 7 - 2a = 4a^2 - 20a + 25$$

$$4a^2 - 18a + 18 = 0$$

$$2a^2 - 9a + 9 = 0$$

$$a_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 180}}{4}$$

$$\frac{9+3}{4} \Rightarrow \begin{cases} a=3 \\ a=\frac{3}{2} \end{cases}$$

1 шаг.  $\sqrt{t(7-t)} = 3$

$$t^2 - 7t + 9 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 36}}{2} = \frac{7 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$t_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{13}}{2} = \frac{7 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$1) t = \frac{7 - \sqrt{13}}{2} \Rightarrow (-)$$

$$2) t = \frac{7 + \sqrt{13}}{2} \Rightarrow x = y = \frac{5 + \sqrt{13}}{2} (+)$$

2 шаг.

$$\sqrt{t(7-t)} = \frac{3}{2}$$

$$4t^2 - 28t + 9 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{14 \pm \sqrt{196 - 36}}{4}$$

$$= \frac{14 \pm \sqrt{160}}{4} = \frac{14 \pm 4\sqrt{10}}{4} = \frac{7 \pm \sqrt{10}}{2} \Rightarrow 1) \frac{7 - 2\sqrt{10}}{2} (-)$$

$$2) \frac{7 + 2\sqrt{10}}{2} (+)$$