



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 8



1. [3 балла] Пятый член арифметической прогрессии равен  $6x + 18$ , седьмой член равен  $(x^2 - 4x)^2$ , а одиннадцатый равен  $(-3x^2)$ . Найдите  $x$ .
2. [4 балла] Найдите наименьшее значение выражения  $14x + 7y$  при условии

$$\begin{cases} |4x - 3y| \leq 6, \\ |3x - 4y| \leq 8. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары  $(m, n)$  натуральных чисел, для которых одно из чисел  $A = m^2 - 2mn + n^2 + 9m - 9n$  и  $B = m^2n - mn^2 + 3mn$  равно  $13p^2$ , а другое равно  $3q^2$ , где  $p$  и  $q$  - простые числа.
4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе  $AH$  треугольника  $ABC$ , проходящая через середину  $M$  его стороны  $BC$ , пересекает сторону  $AC$  и продолжение стороны  $AB$  в точках  $Z$  и  $Y$  соответственно. Найдите  $BC$ , если  $AC = 12$ ,  $AZ = 3$ ,  $YZ = 4$ .
5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{5-y} + 5 = 2\sqrt{30-x-y^2}, \\ 4x^4 + x - 5\sqrt[4]{y} = 4y^4 - 5\sqrt[4]{x} + y. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат  $9 \times 9$  клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.
7. [6 баллов] В треугольнике  $ABC$  на медиане  $AM$  и биссектрисе  $CL$  как на диаметрах построены окружности  $\Omega$  и  $\omega$  соответственно, пересекающиеся в точках  $P$  и  $Q$ . Отрезок  $PQ$  параллелен высоте треугольника  $ABC$ , проведённой из вершины  $B$ . Окружность  $\Omega$  пересекает сторону  $AC$  повторно в точке  $N$ . Найдите длины сторон  $AC$  и  $BC$ , если  $AB = 26$ ,  $AN = 20$ .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

пусть  $y$  - разность прогрессии

5-ый элемент равен  $6x+18$

7-ой равен  $(6x+18) + 2y = (x^2-4x)^2$

11-ый равен  $(3x^2) = (x^2-4x)^2 + 4y$

$$\begin{cases} 12x+36+4y=2(x^2-4x)^2 \\ -3x^2=(x^2-4x)^2+4y \end{cases}$$

из 1-ого уравнения вытем второе

$$12x+36+4y-4y-(x^2-4x)^2=2(x^2-4x)^2+3x^2$$

$$3(x^2-4x)^2+3x^2-12x-36=0$$

$$(x^2-4x)^2+x^2-4x-\frac{12}{3}=0$$

пусть  $(x^2-4x)=t$

тогда  $t^2+t-12=0$

$$D=1+48=49$$

$$t=\frac{-1\pm 7}{2}=\begin{cases} -4 \\ 3 \end{cases}$$

$$x^2-4x+4=0$$

$$x^2-4x-3=0$$

$$(x-2)^2=0$$

$$x=2$$

$$D=16+12=28$$

$$x=\frac{4\pm\sqrt{28}}{2}=2\pm\sqrt{7}$$

Ответ:  $x=\{2-\sqrt{7}; 2; 2+\sqrt{7}\}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

пусть  $4x - 3y = a$ ,  $3x - 4y = b$

замечим, что  $14x + 7y = 11a - 10b = 44x - 33y - 30x + 40y = 14x + 7y$   
по св-ву модулей

$$\begin{cases} |a| \leq 6 \\ |b| \leq 8 \end{cases} \text{ равносильно } \begin{cases} 11|a| \leq 66 \\ 10|b| \leq 80 \end{cases}$$

$$10|b| \leq 80 \Rightarrow -10|b| \geq -80$$

$$11|a| \geq 0 \text{ по определению}$$

$$\begin{cases} 11|a| \geq 0 \\ -10|b| \geq -80 \end{cases} \quad 11|a| - 10|b| \geq -80$$

по св-ву модулей  $|m| - |n| \leq |m - n|$

$$11|a| - 10|b| \leq |11a - 10b|$$

$$|11a - 10b| \geq -80 \Rightarrow |14x + 7y| \geq -80$$

$$11|a| \leq 66 \Rightarrow -11|a| \geq -66$$

$$10|b| - 11|a| \geq -66$$

$$|10b - 11a| \geq -66$$

$$|11a - 10b| \leq 66 \Rightarrow |14x + 7y| \leq 66 \Rightarrow 14x + 7y \in [-66; 66]$$

Ответ:  $-66$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

пусть  $4x - 3y = a$ ,  $3x - 4y = b$   
замечим, что  $14x = 4a - 6b = 32x - 24y - 18x + 24y$   
также замечим, что  $7y = 3a - 4b = 12x - 9y - 12x + 16y$   
из условия  $\begin{cases} |a| \leq 6 \\ |b| \leq 8 \end{cases}$   
по св-ву модулей имеем право сказать:  
 $|a| \leq 6$  ~~равносильно~~  $|3a| \leq 18$   
аналогично  $|6b| \leq 48$ ,  $|8a| \leq 48$ ,  $|4b| \leq 32$   
имеем  $\begin{cases} |8a| \leq 48 \\ |6b| \leq 48 \end{cases}$  и  $\begin{cases} |3a| \leq 18 \\ |4b| \leq 32 \end{cases}$   
согласно св-ву модулей  $|m| - |n| \leq |m - n|$   
~~поэтому  $|2a| - |6b| \leq 0$  и ~~существование~~~~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$B = mn(m-n+3) = \begin{bmatrix} 3q^2 \\ 13p^2 \end{bmatrix} \quad A = (m-n)(m-n+9) = \begin{bmatrix} 3q^2 \\ 13p^2 \end{bmatrix}$$

Так как  $m, n \in \mathbb{N}$ , то  $(m-n) \in \mathbb{N}$  и  $(m-n+9) \in \mathbb{N}$

разобьем  $3q^2$  и  $13p^2$  на 2 кат. множителя

~~$$3q^2 = 3 \cdot q^2 = 3q^2 \cdot 1 = 3q \cdot q = (-3) \cdot (-q^2) = (-1) \cdot (-3q^2) = (-3q) \cdot (-q)$$~~

перепишем эти варианты для числа A

- 1)  $m-n=3$   $m-n+9=12=q^2$   $\emptyset$
- 2)  $m-n=q^2$   $m-n+9=q^2+9=3$   $q^2=-6$   $\emptyset$
- 3)  $m-n=3q^2$   $m-n+9=3q^2+9=1$   $3q^2=-8$   $\emptyset$
- 4)  $m-n=1$   $m-n+9=10=3q^2$   $\emptyset$
- 5)  $m-n=3q$   $m-n+9=3q+9=q$   $2q=-4,5$   $\emptyset$
- 6)  $m-n=q$   $m-n+9=q+9=3q$   $\emptyset$
- 7)  $m-n=-3$   $m-n+9=6=-q^2$   $\emptyset$
- 8)  $m-n=-q^2$   $m-n+9=9-q^2=-3$   $\emptyset$
- 9)  $m-n=-1$   $m-n+9=8=-3q^2$   $\emptyset$
- 10)  $m-n=-3q^2$   $m-n+9=9-3q^2=-1$   $\emptyset$
- 11)  $m-n=-3q$   $m-n+9=9-3q=-q$   $\emptyset$
- 12)  $m-n=-q$   $m-n+9=9-q=3q$   $\emptyset$

Итак, число  $A \neq 3q^2$

Проверим его для  $13p^2$

$$13p^2 = 13 \cdot p^2 = 13p \cdot p = 13p^2 \cdot 1 = (-13) \cdot (-p^2) = (-13p) \cdot (-p) = (-13p^2) \cdot (-1)$$

если  $m$  и  $n$  поменять местами для 1 пары, то ничего не изменится

- 1)  $m-n=13$   $m-n+9=22=p^2$   $\emptyset$
- 2)  $m-n=13p$   $m-n+9=13p+9=p$   $\emptyset$
- 3)  $m-n=13p^2$   $m-n+9=13p^2+9=1$   $\emptyset$
- 4)  $m-n=-13p^2$   $m-n+9=-13p^2+9=-1$   $\emptyset$
- 5)  $m-n=-13p$   $m-n+9=-13p+9=-p$   $\emptyset$

6)  $m-n=-13$   $m-n+9=-4=-p^2$   $p^2=2$  - простое число

Итак, известно, что  $m=n-13$ ,  $A=13p^2$ ,  $B=3q^2$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$3q^2 = B = mn(m-n+3), m = n-13$$

$$3q^2 = n(n-13) \cdot 16$$

~~я не знаю, это либо  $n=3$ , либо  $n-13=3$~~

~~$$n=3: 3q^2 = 3 \cdot (-10) \cdot 16 \quad \emptyset$$~~

~~$$n-13=3 \Rightarrow n=16: 3q^2 = 16 \cdot 3 \cdot 16$$~~

$$\text{От } n \neq 16: 3q^2 = 3 \cdot q \cdot q = 3q \cdot q \cdot 1 = 3q^2 \cdot 1 \cdot 1 = (-3) \cdot (-q) \cdot q = 3 \cdot (-q) \cdot (-q) = (-3q) \cdot (-q) \cdot 1 = (-3q) \cdot q \cdot (-1) = 3q \cdot (-q) \cdot (-1) = (-3q^2) \cdot (-1) \cdot 1 = 3q^2 \cdot (-1) \cdot (-1)$$

~~Значит, либо  $n, m \in \mathbb{N}$ :  $n \in (0, 13)$   $n > 13$~~

$$3 \cdot q \cdot q \left\{ \begin{array}{l} 1) n=3 \quad 3 \cdot (-10) \cdot 16 \quad \emptyset \\ 2) n=q \quad q-13=3 \quad q=16 \quad \emptyset \end{array} \right.$$

$$3q \cdot q \cdot 1 \left\{ \begin{array}{l} 3) n=3q \quad 3q-13=q \quad \emptyset \quad 3q-13=1 \quad \emptyset \\ 4) n=q \quad q-13=3q \quad \emptyset \quad q-13=1 \quad q=14 \quad \emptyset \\ 5) n=1 \quad -12=q \quad \emptyset \quad -12=3q \quad \emptyset \end{array} \right.$$

$$3q^2 \cdot 1 \cdot 1 \left\{ \begin{array}{l} 6) n=3q^2 \quad 3q^2-13=1 \quad \emptyset \\ 7) n=1 \quad 1-13=1 \quad \emptyset \quad 1-13=3q^2 \quad \emptyset \end{array} \right.$$

$$(-3) \cdot (-q) \cdot q \left\{ \begin{array}{l} 8) n=-3 \quad -3-13=q \quad \emptyset \quad -3-13=-q \quad \emptyset \\ 9) n=-q \quad -q-13=-3 \quad \emptyset \quad -q-13=q \quad \emptyset \\ 10) n=q \quad q-13=-q \quad \emptyset \quad q-13=-3 \quad \emptyset \end{array} \right.$$

$$(-3q) \cdot (-q) \cdot 1 \left\{ \begin{array}{l} 11) n=-3q \quad -3q-13=-q \quad \emptyset \quad -3q-13=1 \quad \emptyset \\ 12) n=-q \quad -q-13=-3q \quad \emptyset \quad -q-13=1 \quad \emptyset \\ 13) n=1 \quad 1-13=-q \quad \emptyset \quad 1-13=-3q \quad \emptyset \end{array} \right.$$

$$3 \cdot (-q) \cdot (-q) \left\{ \begin{array}{l} 14) n=3 \quad 3-13=-q \quad \emptyset \\ 15) n=-q \quad -q-13=-q \quad \emptyset \quad -q-13=3 \quad \emptyset \end{array} \right.$$

$$(-3q) \cdot q \cdot 1 \left\{ \begin{array}{l} 16) n=-3q \quad -3q-13=q \quad \emptyset \quad -3q-13=-1 \quad \emptyset \\ 17) n=q \quad q-13=-3q \quad \emptyset \quad q-13=-1 \quad \emptyset \\ 18) n=-1 \quad -1-13=-3q \quad \emptyset \quad -1-13=q \quad \emptyset \end{array} \right.$$

$$3q \cdot (-q) \cdot (-1) \left\{ \begin{array}{l} 19) n=3q \quad 3q-13=-q \quad \emptyset \quad 3q-13=-1 \quad \emptyset \\ 20) n=-q \quad -q-13=3q \quad \emptyset \quad -q-13=-1 \quad \emptyset \\ 21) n=-1 \quad -1-13=-q \quad \emptyset \quad -1-13=3q \quad \emptyset \end{array} \right.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} 22) n = -3q^2 \\ 23) n = -1 \\ 24) n = 1 \end{cases} \begin{cases} -3q^2 - 13 = 1 \quad \emptyset \\ n \in \mathbb{N} \\ 1 - 13 = -1 \quad \emptyset \end{cases} \begin{cases} -3q^2 - 13 = -1 \quad \emptyset \\ 1 - 13 = -3q^2 \quad -12 = -3q^2 \\ q^2 = 4 \quad yg \\ n = 1 \quad (13; +1) \end{cases}$$
$$25) n = 3q^2 \quad \begin{cases} 3q^2 - 13 = -1 \quad \emptyset \\ \text{тогда } m = -1 \Rightarrow \emptyset \end{cases} \quad \begin{cases} 3q^2 - 13 = 1 \quad \emptyset \end{cases}$$
$$26) n = -1 \quad \text{не } yg \quad n \in \mathbb{N}$$

Ответ: таких пар нет



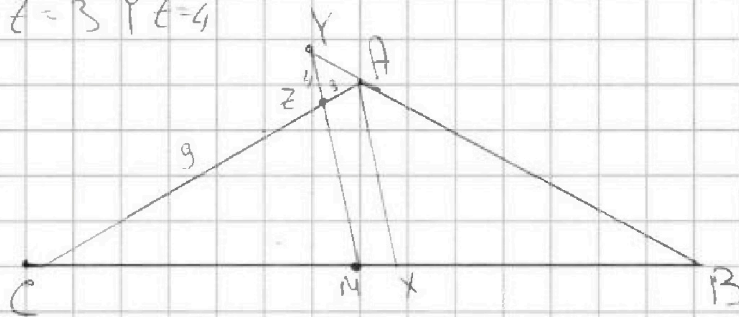
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Дано:  $AH$  - бис-са,  $AH \parallel MZ$ ,  $M$  - середина  $BC$   
 $AC = 12$   $AZ = 3$   $YZ = 4$   
 $BC = ?$



$$CZ = AC - AZ = 9$$

$MZ \parallel AH \Rightarrow \angle CAH = \angle CZM$  как соответственные

при секущей  $AC$

$\angle CAH = \angle BAH$  т.к.  $AH$  - бис-са

$\angle YAZ = \angle CZM$  как вертикальные

$\angle BAC$  - внешний для  $\triangle AYZ$  при угле  $YAZ$ , значит

$$\angle BAC = \angle Y + \angle YZA$$

пусть  $\angle CAH = \angle BAH = \angle CZM = \angle YZA = \alpha$

тогда  $\angle BAC = 2\alpha = \angle Y + \angle YZA = \angle Y + \alpha$

$\angle Y = \alpha = \angle YZA \Rightarrow \triangle YZA$  р/б  $\Rightarrow YA = AZ = 3$

по теореме косинусов в  $\triangle YAZ$ :

$$AY^2 + AZ^2 - 2 \cdot AY \cdot AZ \cdot \cos(180^\circ - 2\alpha) = YZ^2$$

$$9 + 9 - 18 \cos(180^\circ - 2\alpha) = 16$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\cos(180^\circ - 2\alpha) = -\frac{1}{3} \Rightarrow \cos 2\alpha = -\frac{1}{3}$$

$\triangle CZM \sim \triangle CAH$  т.к.  $\angle C$  общий,  $\angle CZM = \angle CAH$

$$k = \frac{CZ}{AC} = \frac{3}{12} = \frac{3}{4} = \frac{CM}{CA}$$

по условию  $M$  - середина  $BC$

пусть  $BC = 2a$ , тогда  $CM = BM = a$

$$CX = \frac{4}{3}CM = \frac{4}{3}a \Rightarrow BX = BC - CX = 2a - \frac{4}{3}a = \frac{2}{3}a$$

$$\text{и так, } \frac{BX}{CX} = \frac{\frac{2}{3}a}{\frac{4}{3}a} = \frac{1}{2}$$

по св-ву биссектрисы:  $\frac{AC}{AB} = \frac{CX}{BX} = 2$

$$AB = \frac{AC}{2} = 6$$

по т. косинусов в  $\triangle ABC$ :

$$BC = \sqrt{144 + 36 - 2 \cdot 12 \cdot 6 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)} = \sqrt{180 + 36} = 14$$

Ответ: 14



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА  
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x \leq -2$$

$$3\sqrt{x+6} = -2-x$$

~~$$9x+72$$~~

$$9x+54 = x^2+4x+4$$

$$x^2-5x-50=0$$

$$D = 25 + 200 = 225$$

$$x = \frac{5 \pm 15}{2} \begin{cases} 10 \\ -5 \end{cases}$$

$$10 \text{ не ур. } x \leq -2$$

$$-5 \text{ не ур. } x \geq 0$$

$$x \geq 1,5$$

$$4x^2+9-12x = 80-16x$$

$$4x^2+4x-71=0$$

$$D = 16 + 16 \cdot 71 = 16 \cdot 72$$
$$x = \frac{-4 \pm 4 \cdot 6 \cdot \sqrt{2}}{8}$$

$$x = \begin{cases} \frac{-1+6\sqrt{2}}{2} \\ \frac{-1-6\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$\frac{-1-6\sqrt{2}}{2} < 1,5 \Rightarrow \text{не ур.}$$

$$5 > \frac{-1+6\sqrt{2}}{2} > 1,5$$

$$x = \frac{-1+6\sqrt{2}}{2} \text{ ур.}$$

$$\text{Ответ: } \left( \frac{-1+6\sqrt{2}}{2}, \frac{-1+6\sqrt{2}}{2} \right)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{5-y} + 5 = 2\sqrt{30-xy} \\ 4x^4 + x - 5^4 y = 4y^4 - 5^4 x + y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \leq 5 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

$$4(x^4 - y^4) + (x - y) + 5(\sqrt{x^4} - \sqrt{y^4}) = 0$$

$$(x-y) \left( 4(x+y)(x^2+y^2) + 1 + \frac{5}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}(\sqrt{x} + \sqrt{y}) \right) = 0$$

равенство выполняется только при  $x=y$ , ведь:

$$1 > 0$$

$$4(x+y)(x^2+y^2) \geq 0$$

(т.к.  $x^2 \geq 0, y^2 \geq 0,$   
 $x+y \geq 0, y^2 \geq 0$ )

$$\frac{5}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})} > 0$$

правая скобка не обращается в ноль

! чтобы  $\sqrt{x} - \sqrt{y}$  представить как  $\frac{5}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})}$  нужно быть уверенным, что  $\begin{cases} x \neq 0 \\ y \neq 0 \end{cases}$

$\sqrt{6} - \sqrt{5} + 5 \neq 2\sqrt{30} \Rightarrow$  выражение представимо

$$x=y \text{ (из 2-ого ур-ния)}$$

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{5-x} + 5 = 2\sqrt{30-x-x^2}$$

~~$$\sqrt{6} - \sqrt{5} + 5 = 2\sqrt{30-x-x^2}$$~~

~~$$a - b + 5 = 2\sqrt{ab}$$~~

~~$$a(1-2b) = b \cdot 5 \quad a = \frac{b-5}{1-2b}$$~~



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~$$\sqrt{x+6} = \sqrt{5-x}$$~~

~~$$\sqrt{x+6} + 5 = 2\sqrt{30-x-x^2} + \sqrt{5-x}$$~~

~~$$\sqrt{x+6} + 5 = 2\sqrt{30-x-x^2} + \sqrt{5-x}$$~~

~~$$x+31+10\sqrt{x+6} = 120-4x-4x^2+5-x+4(5-x)\sqrt{x+6}$$~~

~~$$(4x-10)\sqrt{x+6} = 94-6x-4x^2$$~~

~~$$(2x-5)\sqrt{x+6} = -2x^2-3x+47$$~~

$$(\sqrt{x+6} - \sqrt{5-x})^2 = x+6+5-x-2\sqrt{30-x-x^2} = 11-2\sqrt{30-x-x^2}$$

таким образом уравнение:

$$(\sqrt{x+6} - \sqrt{5-x})^2 + \sqrt{x+6} - \sqrt{5-x} - 6 = 0$$

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{5-x} = t$$

$$t^2 + t - 6 = 0$$

$$t = -3$$

$$t = 2$$

$$\sqrt{x+6} + 3 = \sqrt{5-x}$$

$$x+9+6\sqrt{x+6} = 5-x$$

$$6\sqrt{x+6} = -4-2x$$

$$* x \leq -2$$

$$\sqrt{x+6} = \sqrt{5-x} + 2$$

$$x+6 = 9-x+4\sqrt{5-x}$$

$$2x-3 = 4\sqrt{5-x}$$

$$* x \geq 1,5$$

~~$$36x+12+6 = 4x^2$$~~



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

всего в квадрате  $9 \times 9$  100 точек

выбрать 2 точки из 100 можно  $C_{100}^2$  способами

$$C_{100}^2 = \frac{100!}{98! \cdot 2!} = 99 \cdot 50 = 4950$$

теперь заметим, что все комбинации 2-х точек при повороте повторяются 4 раза, то есть общее кол-во вариантов надо разделить на 4

Однако, если 2 точки симметричны относительно центра квадрата, то кол-во таких вариантов надо делить только на 2, ведь в данном случае вместо 4 комбинаций, совпадающих при повороте, у нас их только две (еще две симметричны, и исключены тем, что мы считаем  $C_{100}^2$  вместо  $A_{100}^2$ ). Всего точек 100, значит пар, симметрично расположенных от центра 50.

Итак, конечная формула:  $\frac{4950 - 50}{4} + \frac{50}{2} = 1250$

Ответ: 1250



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$4x - 3y = a$   
 $3x - 4y = b$   
 $|a| \leq 6$   
 $|b| \leq 8$

$|a-b| \geq |a-|b||$   
 $|a+b| \leq |a|+|b|$   
 $|3a| \leq 18 \quad |b| \geq 8 \Rightarrow |6b| \geq 48$   
 $|3b| \leq 24 \quad |a| \geq 6 \Rightarrow |6a| \geq 36$   
 $|4a| \leq 24 \quad 96 \geq |8a|+|6b|$   
 $|4b| \leq 32 \quad 96 \geq |8a+6b|$

$14x = 8a - 6b$   
 $7x = 4a - 3b$   
 $7y = 3a - 4b$

$|8a-6b| \leq 48$   
 $|4a-3b| \leq 24$   
 $|3a-4b| \leq 24$

$-5 < 0$   
 $-7 < 0$

$|8a-6b| \leq 48$   
 $|8a| + |-6b| \leq 96$   
 $96 \geq |14x|$

$|x| - |y| \leq 14$   
 $|x| - |y| \leq 12$

$72 = 9 \cdot 8$   
 $36 = 2$

$x+6 + 5-x-11 = 11-2\sqrt{50-x-5^2} = (\sqrt{4+6} \cdot \sqrt{5-x})^2$

$x+3 + 10 - x + 3 = 120 - 4x - 4x^2 + 5 - x - 2\sqrt{5-x}$   
 $2x\sqrt{x+6} + x+3 - 120 + 4x + 4x^2 - 5 - x - 2\sqrt{5-x}$

$\sqrt{x+6} (1-2\sqrt{5-x}) + 5 - \sqrt{5-x} = 0$

$2x^2 + 3x - 47 = 0$   
 $3x^2 + 47 - 8$

$37$   
 $385$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

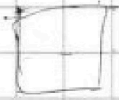
1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$m^2 - 2mn + n^2 + gm - gn = (m-n)^2 + g(m-n) = (m-n+g)(m-n)$$

$$m^2n - mn^2 + 3nm = mn(n-n+3)$$



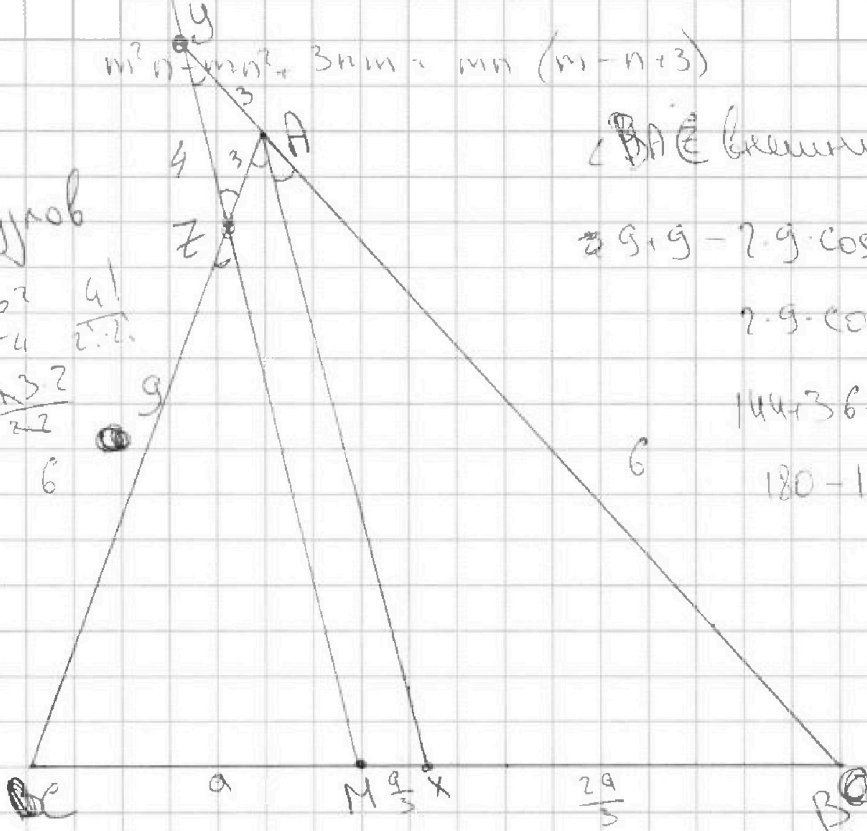
100 ургов

$$C_{100}^2$$

$$C_4^2 \cdot \frac{4!}{2!2!}$$

$$\frac{x-5}{s-h} - \frac{2}{1} - \frac{4 \cdot 3^2}{22} = 6$$

$$\frac{s-h}{22-1} = \frac{g+s-h}{s-g}$$



$\angle BAC$  (внешний)

$$2g + g - 2g \cdot \cos(180^\circ - 2\alpha) = 16$$

$$2g \cdot \cos(180^\circ - 2\alpha) = \frac{1}{g}$$

$$144 + 36 - 2 \cdot 6^2 \cdot 18 = 18x^2$$

$$180 - 16 = 164$$

$$4x^4 + x + 5\sqrt{x} = 4y^2 + y + 5\sqrt{y}$$

$$4(x^4 - y^2) + (x - y) + 5(\sqrt{x} - \sqrt{y}) = 0$$

$$2x^2 \sqrt{x} \sqrt{y} \quad x - y$$

$$(3\sqrt{x} + 3\sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})$$

$$(x-y) \left( 4(x+y)(x^2+y^2) + 1 + \frac{5}{(3\sqrt{x} + 3\sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})} \right)$$

$$\sqrt{6} - \sqrt{5} + 5 = 2\sqrt{30}$$

$$11 - 2\sqrt{30} = 120 + 25 - 20\sqrt{30}$$

$$18\sqrt{30} = 134$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

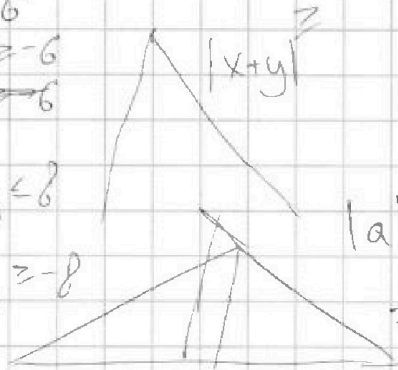
СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} |4x-3y| \leq 6 \\ |3x-4y| \leq 8 \end{cases} \begin{cases} 4|x|-3|y| \leq 6 \\ 3|x|-4|y| \leq 8 \end{cases} \quad |a|-|b| \leq |a-b|$$

$$|4x-3y| - |3x-4y| \leq -2$$

$$\begin{cases} 4x-3y \leq 6 \\ 4x-3y \geq -6 \\ 3x-4y \leq 8 \\ 3x-4y \geq -8 \end{cases}$$



$$\begin{aligned} 2x+y & & 4|y|-3|x| & \geq -8 \\ 4|x|-3|y| & \leq 6 & 4y-3x & \geq -8 \\ 3|x|-4|y| & \leq 8 \end{aligned}$$

$$|a|+|b| \geq |a \cdot b|$$

$$7|x-y| \leq 14$$

$$|x|-|y| \leq 2$$

$$|y|-|x| \geq -2$$

$$|y-x| \geq -2$$

$$\begin{cases} x-y \leq 2 \\ x-y \geq -2 \end{cases} \begin{cases} x \leq 2+y \\ x \geq y-2 \end{cases}$$

$$|x-y| \leq 2$$

$$|x+y|$$

$$|4x+7y| \leq |4|x|+7|y||$$

$$\begin{array}{r} 3x-4y - 4x+3y - 4x+3y - 4x+3y - 4x+3y - 4x+3y \\ 5x-6y - 6x+y \\ 3x-4y + 3x-4y - 4x+3y - 4x+3y - 4x+3y - 4x+3y - 4x+3y \\ \hline 5a-2b \end{array}$$

$$5a-2b$$

$$-6x+7y$$

$$4x-3y$$

$$4x-3y=a$$

$$3x-4y=b$$

$$9a-3b = 16x - 12y - 9x + 12y = 7x$$

$$3a-4b = 12x-9y-12x+16y+7y$$

$$3a-4b=7y$$

$$\begin{aligned} |4a| & \leq 24 \\ |3b| & \leq 24 \end{aligned}$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1)  $5 \quad 6x+18$        $7 \quad (x^2-4x)^2$        $11 \quad (-2x^2)$

$6x+18+2y = (x^2-4x)^2 \quad | -2$

$(x^2-4x)^2 + 4y = -3x^2$

$12x+36+4y = 2(x^2-4x)^2$

$(x^2-4x)^2 - 12x - 36 = -3x^2 - 2(x^2-4x)^2$

$3(x^2-4x)^2 + 3x^2 - 12x - 36 = 0$

$(x^2-4x)^2 + x^2 - 4x - 12 = 0$

$x^2 - 4x + 4 = 0$        $x^2 - 4x - 3 = 0$

$D = 16 - 11 = 28$

$x = \frac{4 \pm \sqrt{28}}{2} = 2 \pm \sqrt{7}$

$11 \pm 4\sqrt{7}$

$5 \quad 30 \pm 6\sqrt{7}$        $7 \quad (11+4\sqrt{7}-8-4\sqrt{7})^2 = 9$        $11 \quad -33-12\sqrt{7}$

$3 \quad 21+6\sqrt{7}$

$14x+7y = 11a-10b$        $\begin{cases} |11a| \leq 66 \\ |10b| \leq 80 \end{cases}$

$44x-33y = 30x+40y$        $-10b \geq -80$

$|11a-10b| \leq 14$        $|10b-11a| \geq -80$

$\sqrt{x+6} - \sqrt{5-x} + 5 - 2\sqrt{30-x-4y^2} = 0$

$a-2ab-b=-5$        $a-b+5=2ab$        $1+2\sqrt{30-x-4y^2} = 4(\sqrt{x+6} + \sqrt{5-x} + 5 + 2\sqrt{30-x-4y^2})$

$a-2ab-b=-5$        $a-b+5=2ab$        $1+2\sqrt{30-x-4y^2} = 4(\sqrt{x+6} + \sqrt{5-x} + 5 + 2\sqrt{30-x-4y^2})$

$8-5\sqrt{2}+25 = \sqrt{28}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$C_{100}^2 = \frac{100!}{50 \cdot 99! \cdot 2!} = \frac{100 \cdot 99}{2} = 4950$$



$$\frac{16!}{1! \cdot 2!} = \frac{16 \cdot 15}{2} = 8 \cdot 15 = 120$$

$$m \neq n$$

$$m - n = 13k$$

$$13k(13k+g) = 13p^2 \quad (m-n)(m-n+g)$$

$$p^2 = 13k^2 + gk$$

$$mn(m-n+3)$$

$$13p^2 \quad 3q^2$$

$$\begin{array}{r} 4950 \cdot 4 \\ \hline 4 \quad 1237,5 \\ \hline 9 \\ \hline 15 \\ \hline 20 \end{array}$$

если  $n = 0$  то

$$\frac{(n-1)n}{2} - \frac{n}{2} = \frac{n}{2} \cdot \frac{4}{2} = 2n$$

если  $m \equiv n \equiv 0$

$$\text{то } (m-n)(m-n+3) = 27 \dots \quad 3q^2 \quad q=3$$

$$mn(m-n+3) = 27 \rightarrow 3q^2 = 27$$

$$3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$$

~~если  $m \equiv n$~~

$$(m-n)(m-n+g) = 27 \Rightarrow g = 9 \text{ не так}$$

$\checkmark$   $q=3$  так уже было

$$C_3^2 = \frac{3!}{2! \cdot 1!} = 3$$

$$\begin{aligned} (m-n)(m-n+g) &= 27 \\ mn(m-n+3) &= 13p^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a(a+3) &= 27 \\ a^2 + 3a - 27 &= 0 \\ a &= 9 + 3 + 12 = 24 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 1900 \cdot 4 \\ \hline 4 \quad 475 \\ \hline 9 \\ \hline 10 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$3a^2: \{3, a, a\}; \{1, a, 3a\}; \{3, a^2, 1\}; (3a^2 | 1 | 1) (3a | a) (3 | a^2) (a^2 | 1)$$

$$13p^2: (13, p, p); (13p, p, 1); (13p^2, 1, 1) (13, p^2, 1) (13, p^2) (13p, p) (p^2 | 1)$$

$$\frac{mn(m-n+3)}{(m-n)(m-n+3)} \rightarrow \begin{array}{r} 13p, p \\ 13p^2, 1 \\ 13p^2, 1 \end{array} \quad \begin{array}{r} 3a | a \\ 3 | a^2 \\ 3a^2 | 1 \end{array}$$

$$13p(13p+9)$$

$$13p+9=p \quad 13p=-9 \quad p=$$

$$p(p+9)$$

$$p+9=13p \quad 9=12p$$

$$3 | a | a \quad 3 | a^2 | 1 \quad 3a^2 | 1 | 1$$

$$-13p^2 | -p$$

$$-13p^2 | -1$$

$$-13p^2 | -p^2$$

$$-13p+9 | -p \quad -p+9 = -13p$$

$$a \quad a+9$$

$$-13p^2+9=1$$

$$-13+9 = -p^2$$

$$mn(m-n+3) = 3a^2$$

$$m-n = -13 \quad m-n-13$$

$$16n(n-13) = 3a^2 \quad 3 | a | a$$

$$3a^2 - a^2 - 1$$

$$-3a^2 | -1 | 1$$

$$p = \pm 2$$

$$13p^2(13p^2+9) \quad a^2 | 3 | 1$$

$$13p^2+9=1 \quad a^2 | 3a^2 | 1$$

$$3a+9-a \quad a^2 | 3 | a$$

$$9+9=3a \quad a^2 | 3a$$

$$3a^2+10-1 \quad 3a^2-9$$

$$-3a^2 = 9$$

$$-3 = a^2$$

$$-3a^2 | -1$$

$$-3a+9 = -9$$

$$-3+9 = -a^2$$

$$-3a^2+9 = 1$$