



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 6



1. [3 балла] Второй член арифметической прогрессии равен $12-12x$, четвёртый член равен $(x^2 + 4x)^2$, а восьмой равен $(-6x^2)$. Найдите x .
2. [4 балла] Найдите наименьшее значение выражения $10x + 5y$ при условии

$$\begin{cases} |2x - 3y| \leq 6, \\ |3x - 2y| \leq 4. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары (m, n) натуральных чисел, для которых одно из чисел $A = m^2 - 4mn + 4n^2 + 13m - 26n$ и $B = m^2n - 2mn^2 - 2mn$ равно $17p^2$, а другое равно $15q^2$, где p и q — простые числа.
4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе AH треугольника ABC , проходящая через середину M его стороны BC , пересекает сторону AC и продолжение стороны AB в точках Z и Y соответственно. Найдите BC , если $AC = 18$, $AZ = 6$, $YZ = 8$.
5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+4} - \sqrt{3-y} + 5 = 2\sqrt{12-x-y^2}, \\ 2x^5 + 4x^2 - \sqrt[3]{3y} = 2y^5 - \sqrt[3]{3x} + 4y^2. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат 7×7 клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.
7. [6 баллов] В треугольнике ABC на медиане AM и биссектрисе CL как на диаметрах построены окружности Ω и ω соответственно, пересекающиеся в точках P и Q . Отрезок PQ параллелен высоте треугольника ABC , проведённой из вершины B . Окружность Ω пересекает сторону AC повторно в точке N . Найдите длины сторон AC и BC , если $AB = 6$, $AN = 5$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N2.

Сложим оба неравенства: $10 \geq |2x-3y| + |3x-2y|$

$$\rightarrow |2x-3y| + |2y-3x| \geq |2x-3y + 2y-3x| =$$

$$\leq |-x-y| = |x+y|. \Leftrightarrow x+y \geq -10. \Leftrightarrow y \geq -10-x.$$

$$4 \geq |3x-2y| = |2y-3x| \geq |-20-2x-3x| = |10+5x| \Leftrightarrow |x+4| \leq \frac{4}{5} \Rightarrow$$

$$\Leftrightarrow x+4 \geq -\frac{4}{5} \Leftrightarrow x \geq -\frac{24}{5}. \text{ Тогда } 10x+5y = 5(x+y) + 5y \geq$$

$$\geq 5 \cdot (-10) + 5 \cdot \left(-\frac{24}{5}\right) = -50 - 24 = -74. \text{ Это значение достигается}$$

$$\text{при } x = -\frac{24}{5} \text{ и } y = -\frac{26}{5}.$$

Ответ: -74.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№3. НОД чисел x и y и будут обозначать $[x, y]$.

$$A = m^2 - 4mn + 4n^2 + 13m - 26n = (m-2n)^2 + 13(m-2n) = (m-2n)(m-2n+13).$$

$$B = m^2n - 2mn^2 - 2mn = mn(m-2n-2).$$

~~$A = 17p^2$
 $B = 15q^2$~~ Заметим, что $[m-2n, m-2n+13] = [m-2n, 13] = k$.
 $k=1$ или $k=13$.

$$1) \begin{cases} A = 17p^2 \\ B = 15q^2 \end{cases}$$

$$1.1) k=1$$

$$1.1.1) \begin{cases} m-2n=17 \\ m-2n+13=p^2 \end{cases} \Rightarrow p^2=30, \text{ такого не бывает.}$$

$$1.1.2) \begin{cases} m-2n=p^2 \\ m-2n+13=17 \end{cases} \Rightarrow p^2=4 \Rightarrow p=2.$$

$$\text{Но тогда } B = mn \cdot \left(\frac{p^2}{2}\right) = mn \cdot 2.$$

$$mn \cdot 2 = 15q^2 \Rightarrow q:2 \Leftrightarrow q=2 \Rightarrow mn=30 \text{ и } m-2n=4. \text{ Решая эту систему имеем: } n=3 \text{ и } m=10.$$

$$1.2) k=13.$$

$$\text{Пусть } m-2n=13a. \text{ Тогда } m-2n+13=13(a+1)$$

$$A = 13^2 a(a+1) = 17p^2 \Rightarrow p=13 \text{ и } a(a+1)=17.$$

Но такого не бывает.

$$2) \begin{cases} A = 15q^2 \\ B = 17p^2 \end{cases}$$

$$2.1) k=1$$

$$2.1.1) \begin{cases} m-2n=15 \\ m-2n+13=q^2 \end{cases} \Rightarrow q^2=30, \text{ такого не бывает.}$$

$$2.1.2) \begin{cases} m-2n=q^2 \\ m-2n+13=15 \end{cases} \Rightarrow q^2=2, \text{ такого не бывает.}$$

$$2.2) k=13. \text{ Пусть } m-2n=13a, \text{ тогда } m-2n+13=13(a+1)$$

$$A = 13^2 a(a+1) = 15q^2 \Rightarrow q=13 \text{ и } a(a+1)=15, \text{ но такого не бывает.}$$

Ответ: (10, 3).

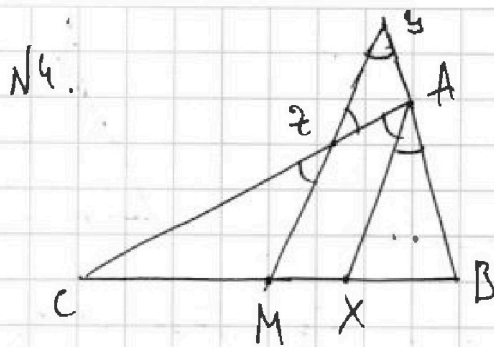


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$\angle CAZ = \angle BAZ$, но раз $MZ \parallel AX$, то $\angle CAM = \angle CZM$. $\angle ZZA = \angle CZM$ как вертикальные. $\angle CAB = \angle AZZ + \angle ZZA$, как внешний, значит раз $\angle CAB = 2 \angle AZZ$, то $\angle ZZA = \angle AZZ \Rightarrow \triangle AZZ$ - равнобедренный и

$AZ = AZ = 6$. $MZ \parallel AX \Rightarrow \frac{CZ}{CM} = \frac{CA}{CX}$, но св-во биссектрисы $\frac{CA}{CX} = \frac{AB}{BX}$. $AX \parallel MZ \Rightarrow \frac{AB}{BX} = \frac{BZ}{BM}$. Получаем, что $\frac{CZ}{CM} = \frac{CA}{CX} = \frac{AB}{BX} = \frac{BZ}{BM}$, т.е. $\frac{CZ}{CM} = \frac{BZ}{BM} \Rightarrow CZ = BZ$, т.к. $CM = BM$. $BZ = 12$,

$AB = BZ - ZA = 12 - 6 = 6$. Пусть $\angle ZAZ = \alpha$, тогда по т. косинусов

в $\triangle ZZA$: $ZZ^2 = AZ^2 + AZ^2 - 2 \cdot AZ \cdot AZ \cdot \cos \alpha \Rightarrow 64 = 36 + 36 - 2 \cdot 36 \cdot \cos \alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos \alpha = \frac{72 - 64}{72} = \frac{8}{72} = \frac{1}{9}$. $\angle CAB = 180^\circ - \alpha \Rightarrow$ по т. косинусов

в $\triangle CAB$: $BC^2 = AB^2 + AC^2 + 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos \alpha = 36 + 18^2 + 2 \cdot 6 \cdot 18 \cdot \frac{1}{9} =$

$= 360 + 24 = 384. \Rightarrow BC = 12\sqrt{6}$.

Ответ: $12\sqrt{6}$.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N5.

Поскольку в системе присутствует $\sqrt[4]{3x}$, то $3x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$.

Пусть $f(x) = 2x^5 + 4x^2 + \sqrt[4]{3x}$. $f(x)$ — ^{при $x \geq 0$.} возрастает, т.к. является

увеличивающей функцией, возрастающей при $x \geq 0$. Теперь заметим, что

второе уравнение системы означает, что $f(x) = f(y) \rightarrow x = y$.

Теперь преобразуем первое уравнение системы с учетом этого:

$$\sqrt{x+4} - \sqrt{3-x} + 5 = 2\sqrt{12-x-x^2}. \text{ Заметим, что } 12-x-x^2 =$$

$$= (x+4)(3-x). \text{ Поскольку присутствует } \sqrt{3-x}, \text{ то } 3-x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 3.$$

Также заметим, что $\sqrt{x+4} \geq \sqrt{3-x}$, т.к. $x+4 \geq 4$, а $x-3 \leq 3$.

$2x \geq 0 \Rightarrow x \geq -1$. Пусть $\sqrt{x+4} = t$ и $\sqrt{3-x} = p$. Тогда уравнение

$$\text{примет вид: } t - p + 5 = 2pt \quad (1). \text{ Заметим, что } (\sqrt{x+4} - \sqrt{3-x})^2 =$$

$$= 7 - 2\sqrt{(x+4)(3-x)} \Leftrightarrow (t-p)^2 = 7 - 2pt \quad (2)$$

$$(1) \Rightarrow (t-p)^2 = 2pt - 5. \text{ Тогда из (1) и (2) } 7 - 2pt = 2pt - 5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4pt = 12 \Rightarrow pt = 3. \Rightarrow \sqrt{12-x-x^2} = 3 \Rightarrow 12-x-x^2 = 9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}. \text{ Из } x \geq 0 \Rightarrow x = \frac{\sqrt{13}-1}{2}$$

Осталось заметить, что это значение при подстановке в это

значение системы имеет смысл, т.к. $0 < \frac{\sqrt{13}-1}{2} < 3$

$$\text{Ответ: } x = y = \frac{\sqrt{13}-1}{2}.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(1) \Rightarrow (t-p)^2 = (2pt-5)^2, \text{ но тогда из (1) и (2) } \Rightarrow (2pt-5)^2 = 7-2pt.$$

$$\text{Пусть } 2pt = k. \text{ Тогда } (k-5)^2 = 7-k \Leftrightarrow k^2 - 10k + 25 = 7-k \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k^2 - 9k + 18 = 0 \Leftrightarrow k = 6 \text{ или } k = 3.$$

$$\textcircled{1} \quad 2pt = 6 \Leftrightarrow pt = 3 \Leftrightarrow \sqrt{12-x-x^2} = 3 \Leftrightarrow -x^2 - x + 12 = 9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}, \text{ но } x \geq 0 \Rightarrow x = \frac{\sqrt{13}-1}{2}. (\text{**})$$

$$\textcircled{2} \quad 2pt = 3 \Leftrightarrow \sqrt{12-x-x^2} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow 2\sqrt{12-x-x^2} = 3 \Leftrightarrow -4x^2 - 4x + 24 = 9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 + 4x - 15 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm 4}{2} = \frac{-5}{2}, \frac{3}{2}, \text{ но } x \geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{3}{2}. (\text{*})$$

Осталось заметить, что при подстановке значений ****** и ***** система имеет смысл.

$$\text{Ответ: } \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right), \left(\frac{\sqrt{13}-1}{2}; \frac{\sqrt{13}-1}{2}\right).$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№6 Назовем раскраской ~~на~~ составные узлы сетки, когда равно 2 крайних $\frac{1}{2}$ балла. Будем всегда обозначать эти белые узлы A и B .

Всего черных ^{узлов} изначально $(7+1)^2 = 64$. Посмотрим на то сколько различных раскрасок может породить одна или 4 последовательных поворота на 90° (различные ^{узлы} ~~узлы~~ - те, которые не совпадают параллельными черными). Ясно, что каждая порождает не менее 1 и не более 4. Разберем все эти случаи:

1) Порождает ровно 1. Тогда при повороте на 90° $A \rightarrow B$ и $B \rightarrow A$. Т.е. при повороте на 180° $A \rightarrow A$ но тогда A симметрична сама себе относительно центра квадрата. Такого не бывает.

2) Порождает ровно 2. Пусть начальная раскраска T . После поворота на 90° получаем T_1 . По 1) $T_1 \neq T$. Поворот на 270° это то же самое, что на 90° в другую сторону и опять по 1) получаем, что после поворота на 270° раскраска не равна T . Значит раз их всего 2, то после поворота на 90° и на 270° получим одну и ту же, т.е. T симметрична себе относительно центра квадрата.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

3) Порождает ровно 3. Пусть изначальная раскраска T . После поворо-
та на $90^\circ - T_1$, на $180^\circ - T_2$ и на $270^\circ - T_3$. По 1) $T_1 \neq T$ и $T_2 \neq T$. Если $T_1 = T_3$, то T центрально симметрична и $T_2 = T$, что
не так. Значит $T_1 \neq T_3$. Т.е. T_2 совпадает с кем-то. Но по 1)
 $T_2 \neq T_3$ и $T_2 \neq T_1 \Rightarrow T_2 = T$ и T центрально симметрична, что
не так!

4) Порождает 4 может, очевидно.

Получим, что раскраска порождает либо 2, либо 4 и раскрасок
кроме 2 т. ч. нет, когда она центрально симметрична. Всего

есть 32 центрально симметричные раскраски. Всего раскрасок

$$\frac{C_{64}^2}{2} = \frac{64 \cdot 63}{2} = 32 \cdot 62. \text{ Из них } 32 \text{ центрально симметричны, а}$$

значит оставшиеся $32 \cdot 62$ можно разбить на $8 \cdot 62$ группы по

4, в каждой группе все раскраски совпадают поворотом.

Тогда ответ на задачу будет $32 + 8 \cdot 62 = 528$

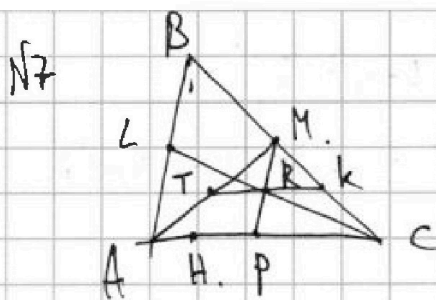
Ответ: 528.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Пусть T и R - центры \mathcal{L} и \mathcal{W} соответственно. Т.е. T - середина AM , а R - середина CL .

PQ - радикальная ось \mathcal{L} и $\mathcal{W} \Rightarrow$

\Rightarrow она перпендикулярно линии центров

\mathcal{L} и \mathcal{W} , т.е. $PQ \perp TR$. Пусть H - основание высот из B на AC .

По условию $PQ \parallel BH$, но $BH \perp AC$, а раз $BH \parallel PQ$, то

$BH \perp TR \Rightarrow TR \parallel AC$! Пусть K - середина MC , и P - середина AC .

Тогда точки P, R, M лежат на средней линии $\triangle ABC$ параллельной AB .

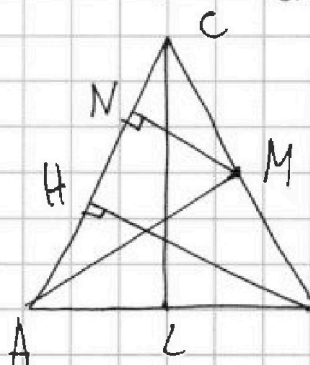
~~Точка~~ T, K - средние линии $\triangle AMC \Rightarrow TK \parallel AC$, но $TR \parallel AC \Rightarrow$

$\Rightarrow T, R, K$ лежат на одной прямой. Раз TK - средняя линия

в $\triangle AMC$, то $MR = RP$. Но тогда $\triangle MCR$ - параллелограмм! Так как

$\angle L = \angle R$ и $MR = RP$. Значит $LM \parallel AC \Rightarrow L$ - середина AB ! \cup

$\triangle ABC$ - равнобедренный, и $AC = BC$.



AM - диаметр $\mathcal{U} \Rightarrow \angle ANH = 90^\circ$. Тогда $NM \parallel HB$ и

NM - средняя линия в $\triangle HCB$. Пусть $CN = x$. Тогда

~~и~~ $HN = x$. $AH = AN - HN = 5 - x$. $AC = 5 + x$.

$BC = AC = 5 + x$. По т. Пифагора из $\triangle AHB$ и \triangle

HCB имеем: ~~$AB^2 = AH^2 + BH^2$~~ $AB^2 - AH^2 = BH^2$, $BH^2 = BC^2 - HC^2 \Rightarrow$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\Rightarrow AB^2 - AH^2 = BC^2 - HC^2 \Rightarrow 36 - (5-x)^2 = (5+x)^2 - (2x)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 36 - 25 - x^2 + 10x = 25 + x^2 + 10x - 4x^2 \Rightarrow 2x^2 = 14 \Rightarrow x = \sqrt{7}.$$

$$AC = BC = 5 + \sqrt{7}.$$

Ответ: ~~AB~~ $AC = BC = 5 + \sqrt{7}.$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N1 Обозначим шаг прогрессии за d . Тогда: $-6x^2(12-12x) = 6d \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow d = -x^2 + 2x - 2$. И $4d = -6x^2 - (x^4 + 4x^3)$. Другая запись:

$$4(-x^2 + 2x - 2) = -6x^2 - (x^4 + 4x^3) \Leftrightarrow -4x^2 + 8x - 8 = -6x^2 - x^4 - 4x^3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^4 + 8x^3 + 18x^2 + 8x - 8 = 0 \quad (1) \text{ Заметим, что } x = -2 \text{ корень.}$$

Тогда $P(x) = x^4 + 8x^3 + 18x^2 + 8x - 8$ делится на $(x+2)$.

После деления имеем: $P(x) = (x+2)(x^3 + 6x^2 + 6x - 4)$. Заметим, что

$x = -2$ - корень $x^3 + 6x^2 + 6x - 4$, значит $P(x) = (x+2)^2(x^2 + 4x - 2)$.

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x^2 + 4x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = -2 \pm \sqrt{6} \end{cases} \text{ Остается заметить, что}$$

все найденные x подходят, т.к. они все удовлетворяют условию:

$a_3 - a_4 = 4d$, $a_8 - a_2 = 6d$, а значит и $a_4 - a_2 = 2d$. Значит подстановка

любого из найденных значений x получится арифметическая прогрессия.

Ответ: $x = 2$, $x = -2 - \sqrt{6}$, $x = -2 + \sqrt{6}$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$a_2 = 12 - 12x$
 $12 - 12x \geq 0$
 $a_4 = (x^2 + 4x)^2$
 $a_8 = -6x^2$
 $a_2 = a_1 + d = 12 - 12x$
 $a_4 = a_1 + 3d = (x^2 + 4x)^2$
 $a_8 = a_1 + 7d = -6x^2$
 $d = -6x^2 - 12 + 12x$
 $d = -x^2 + 2x - 2$
 $4d = -6x^2 - (x^2 + 4x)^2$
 $2(x^2 + 4x)^2 - 12 + 24x = -6x^2 - (x^2 + 4x)^2$
 $3(x^4 + 16x^2 + 8x^3) - 24 + 24x - 6x^2 = 0$
 $3x^4 + 48x^2 + 24x^3 - 24 + 24x - 6x^2 = 0$
 $3x^4 + 54x^2 + 24x^3 + 24x - 24 = 0$
 $f(x) = x^4 + 18x^2 + 8x^3 + 8x - 8 = 0$
 $f(1) = 1 + 8 + 18 + 8 - 8 \neq 0$
 $f(0) = -8$
 $-4x^2 + 8x - 8 = -6x^2 - (x^4 + 16x^2 + 8x^3)$
 $8x - 8 + 2x^2 = -x^4 - 8x^3 - 16x^2$
 $x^4 + 8x^3 + 18x^2 + 8x - 8 = 0$
 $x = -1$
 $1 - 8 + 18 - 8 - 8 < 0$
 $x = -2$
 $16 - 64 + 72 - 8 - 8 = 0$
 $x^4 + 8x^3 + 18x^2 + 8x - 8 \bigg| x+2$
 $x^4 + 2x^2$
 $-6x^3 + 18x^2$
 $6x^3 + 12x^2$
 $-6x^2 + 8x$
 $6x^2 + 12x$
 $-6x^2 + 8x$
 $6x^2 + 12x$
 $-4x - 8$
 $x^2 - 2x + 2 \geq 0$
 $(x-1)^2 + 1 \geq 0$

$a_4 - a_2 = 2d = (x^2 + 4x)^2 - 12 + 12x \geq 0$
 $a_8 - a_4 = 4d = -6x^2 - (x^2 + 4x)^2$
 $2(x^2 + 4x)^2 - 12 + 24x = -6x^2 - (x^2 + 4x)^2$
 $3(x^4 + 16x^2 + 8x^3) - 24 + 24x - 6x^2 = 0$
 $3x^4 + 48x^2 + 24x^3 - 24 + 24x - 6x^2 = 0$
 $3x^4 + 54x^2 + 24x^3 + 24x - 24 = 0$
 $1) x = -2$
 $a_2 = 12 + 24 = 36$
 $a_4 = (4 + -8)^2 = 16$
 $a_8 = -24$
 $\sqrt{6} - 2$
 $12 = 12\sqrt{2} + 24 = 36 - 12\sqrt{2}$
 $\min(10x + 5y) = \min(2x + y)$
 $\begin{cases} 4x^2 + 9y^2 - 12xy \leq 36 & -10 \\ 9x^2 + 4y^2 - 12xy \leq 24 & 16 \\ 13(x^2 + y^2) - 24xy \leq 60 & 6 \\ 13(x^2 + y^2) - 26xy + 2xy \leq 60 & -4 \\ 13(x^2 + y^2 - 2xy) + 2xy \leq 60 & -14 \\ 13(x-y)^2 + 2xy \leq 60 & -21 \end{cases}$
 $x = -2$
 $D = 16 + 8 = 24$
 $-8 + 24 - 12 - 4 = 0$
 $x_2 = \frac{-4 \pm 2\sqrt{6}}{2}$
 $x^3 + 6x^2 + 6x - 4 \bigg| x+2$
 $x^3 + 2x^2$
 $4x^2 + 6x - 4$
 $4x^2 + 8x$
 $-2x - 4$
 $-2x - 4$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$|3x-2y| \leq 6$ $|2x-3y| \leq 6$ $\min(2x+1) = ?$ $4x-12 \leq 3x-12$
 $4x \leq 3x$

$|3x-2y| \leq 4$ $|a+b| \leq |a|+|b|$
 $1) 2x \geq 3y$ $|\frac{-18}{5} + \frac{78}{5}| \leq 6$ $3x$ $|\frac{-168}{5} + \frac{28}{5}| \leq 4$ $\frac{2x-6}{3} \vee \frac{3x-4}{2}$

$2x-3y \leq 6$ $|\frac{22}{5} + \frac{52}{5}|$
 $2x-3y \leq 6$
 $1.1) 3x \geq 2y$ $2x-3y \leq 6$
 $5x-2y \leq 4$

$1) x \geq y$ $|\frac{10+36}{5} \leq \frac{-14}{5}|$ $5|x-y| \leq |2x-3y| + |3x-2y| \leq 10$ $\leq |5x+20|$
 $y \geq x-2$ $|\frac{4}{5} \geq |x+4|$
 $2x+4 \geq 2x+x-2 \geq 3x-2$ $|x-y| \leq 2$ $|3y-2x| \leq 6$ $\frac{4}{5} \geq |x+4|$
 $|2y-3x| \leq 4$ $x + \frac{4}{5}x$

$2) x \leq y$ $x \geq y$ $y-x \leq 2$
 $2x+1 \geq 2y-4+1 = 2y-3$ $x \geq y-2$ $x \geq y$
 $x=100$ $x+y \leq 2$

$x = -\frac{36}{5}$ $x=2$ $x+y \leq 2$
 $y = -\frac{14}{5}$ $|4-3y| \leq 6$ $200-$
 $|\frac{-22}{5} + \frac{42}{5}| \leq 6$ $|6-2y| \leq 4$
 $|72-42| \leq 30$ $y=1$

$x \geq 2$ $x-y \leq 2$ $|2x-3y| \geq |2x|$
 $y \geq 0$ $y \geq x-2$ $-y \leq 2-x$ $|2x-3y| \leq |2x+6-3x| = |6-x|$

$|x+y| \leq 10$ $x+y \geq -10$ $|2x-3y| = |3y-2x| \geq |3x-6-2x| =$
 $-y \leq x+10$ $x+y = -10$ $= |5x-6|$ 6
 $y \geq 10-x$ $|2x-3y| \leq 6$ $|5x-6| \leq 6$ $\frac{6}{5} \geq x+6 \geq -\frac{6}{5}$

$|2x-3y| \geq |2x-3|$ $0 \leq 5x-6 \leq 12$ $6 \leq 5x \leq 18$ $x \geq -\frac{6}{5}-6$
 $|2x-3y| = |3y-2x| \geq$ $6 \leq 5x \leq 18$ $x \leq \frac{18}{5}$ $x \geq -\frac{6-50}{5}$
 $\geq |-30-3x-2x| = |5x+30|$ $= |x+30|$ $\frac{6}{5} \geq |x+6|$ $x \geq -\frac{6-50}{5}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$5 \min(2x+y) = ? \quad \begin{cases} 4x^2 + 9y^2 - 12xy \leq 36 \\ 9x^2 + 4y^2 - 12xy \leq 144 \end{cases}$$

$$mn = 30$$

$$m - 2n = 4$$

$$(2n+4)n = 30$$

$$n^2 + 2n = 15 \quad n_{1,2} = \frac{-2 \pm 8}{2}$$

$$n^2 + 2n - 15 = 0 \quad = -2 \pm 4 \Rightarrow$$

$$D = 4 + 60 = 8^2 \Rightarrow n = 2$$

$$m = 8$$

$$1) \quad 2x \geq 3y, \quad x \geq \frac{3}{2}y, \quad 2x - 3y \leq 0, \quad x \leq \frac{6+3y}{2}$$

$$\frac{3x-2y}{2} \geq \frac{3}{2}y - \frac{1}{2}y$$

$$A = m^2 - 4mn + 4n^2 + 13m - 26n$$

$$B = m^2n - 2mn^2 - 2mn =$$

$$= mn(m - 2n - 2)$$

$$A = (m - 2n)^2 + 13(m - 2n)$$

$$(2n+4)n = 30$$

$$n(n+2) = 15$$

$$n^2 + 2n - 15 = 0$$

$$1) \quad A = 17p^2$$

$$B = 15q^2$$

$$1.1) \quad m = 1$$

$$n(-2n-1) = 15q^2$$

$$1.2) \quad n = 1$$

$$m(m-4) = 15q^2$$

$$2) \quad m - 2n - 13 = 17$$

$$m - 2n = p^2$$

$$p^2 = 30$$

$$m - 2n = 13$$

$$m - 2n$$

$$1) \quad m - 2n = 17$$

$$m - 2n - 13 = p^2$$

$$p^2 = 4 \Rightarrow p = 2$$

$$mn \cdot 18 = 18q^2$$

$$mn = q^2$$

$$m = n = q$$

$$(m - 2n - m + 2n + 13)$$

$$2 = 4 + 4 \cdot 15 =$$

$$= 4 \cdot 6 = 24$$

$$n_{1,2} = \frac{-2 \pm 8}{2} = -1 \pm 4$$

$$n = 3$$

$$m = 10$$

$$\begin{cases} A = (m - 2n)(m - 2n - 13) \\ B = mn(m - 2n - 2) \end{cases} \quad \text{НОД}(m - 2n, m - 2n - 13) = \text{НОД}(m - 2n, 13) = k$$

$$2) \quad B = 17p^2$$

$$A = 15q^2$$

$$2.1) \quad k = 1$$

$$2.1.1) \quad m - 2n = 15$$

$$m - 2n - 13 = q^2$$

$$2.1.2) \quad q^2 = 2$$

$$m - 2n = 9$$

$$2.2) \quad k = 13$$

$$m - 2n - 13 = 15 \quad q^2 = 28$$

$$18a \cdot 13(a-1) = 15 \cdot 13$$

$$a(a-1) = 15$$

$$1.1) \quad k = 1$$

$$1.1.1) \quad m - 2n = 17$$

$$m - 2n - 13 = q^2 \Rightarrow q = 2$$

$$1.1.2) \quad m - 2n = q^2$$

$$m - 2n - 13 = 17$$

$$q^2 = 30$$

$$1.2) \quad k = 13$$

$$m - 2n = 13a$$

$$m - 2n - 13 = 13(a-1)$$

$$mn(17-1) = 15p^2$$

$$mn = p^2$$

$$m = n = p, \quad m = 13p$$

$$m = p^2 \quad n = 1$$

$$p^2 - 2 = 17 \quad p = 19$$

$$13^2(a-1)a = 13 \cdot 17$$

$$a(a-1) = 17$$

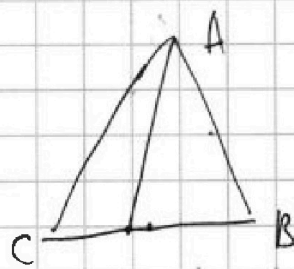
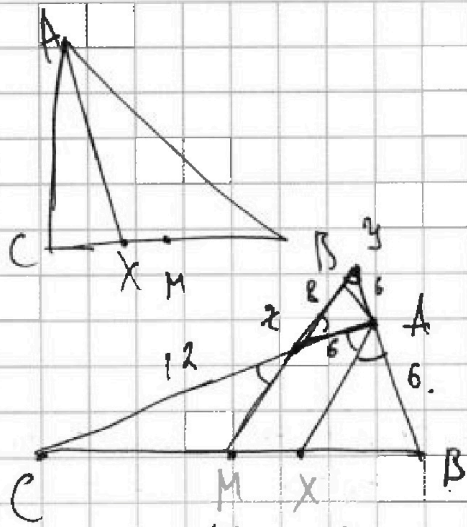


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$BC = ? \quad AC = 18 \quad AZ = 6 \quad 32 = 8.$



$$\frac{CZ}{CM} = \frac{AC}{CX} = \frac{AB}{Bx} = \frac{BZ}{BM}$$

$CZ = BZ.$

$$\sqrt{x+4} - \sqrt{3-y} + 5 = 2\sqrt{12-x-y^2}$$

$$2x^2 + 4x - \sqrt{3y} = 2y^2 - \sqrt{3x+4y}$$

$$\begin{array}{r} \times 18 \\ \times 12 \\ + 144 \\ \hline 324 \\ + 76 \\ \hline 400 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 384 \quad | \quad 4 \\ \underline{32} \\ 64 \\ \underline{816} \\ 816 \\ \hline 0 \end{array}$$

$202 = 2 \cdot 101.$

$$\begin{array}{r} 384 \quad | \quad 4 \\ \underline{32} \\ 64 \\ \underline{816} \\ 816 \\ \hline 0 \end{array}$$

$384 = 2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 = (12\sqrt{6})^2$

$96 = 48 \cdot 2 = 16 \cdot 6.$

$|2x - 3y| \leq 6.$

$|3x - 2y| \leq 4.$

$4x^2 + 9y^2 - 12xy \leq 36$

$9x^2 + 4y^2 - 12xy \leq 16$

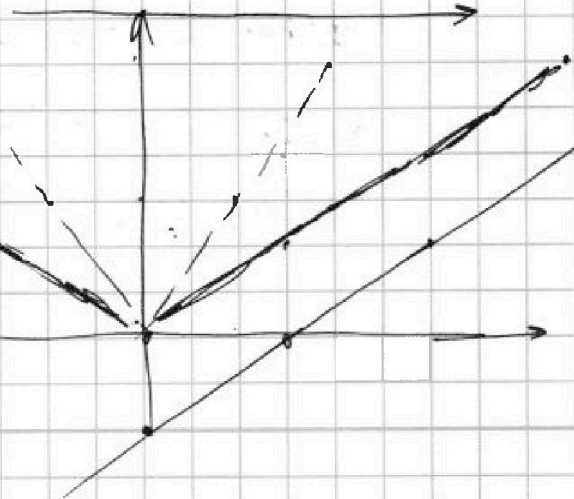
$y = \frac{3}{2}x$

$3y \leq 2x - 6.$

$y \leq \frac{2}{3}x - 2.$

$\text{г. } 2x - 3y = 6.$

$|2x - 3y| = 0.$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

32

32 · 63 *всего*

$$\frac{32 \cdot 63 \cdot 64}{64} = 8 \cdot 63 - \cancel{64} + 32 =$$

$$= 8 \cdot 63 + 16 = 8 \cdot 65$$

$$32 + 62 \cdot 8 = 480 + 16 \cdot 8 = 480 + 48 =$$

$$= 528$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

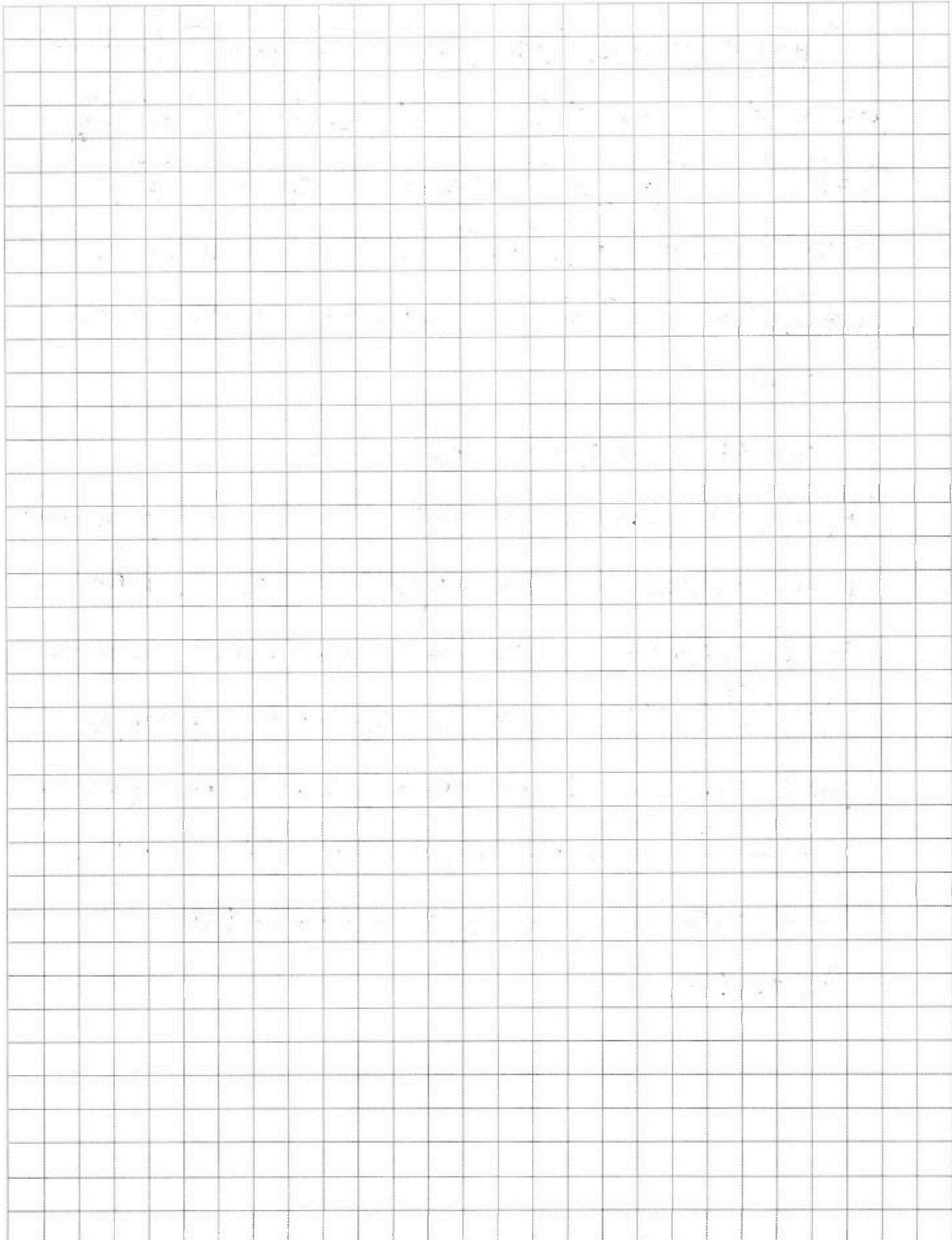
5

6

7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Всего узлов черных узлов $8^2 = 64$. Площадь покрасить можно
каждого 2 узла в белый равно C_{64}^2 . Теперь заметим, что

в осях $x+4+3-y+25-2\sqrt{12-4y+3y-x}$ $x \geq 0$.

$$2x^5 + 4x^2 + \sqrt[4]{3x} = 4y^4 + 2y^5 + \sqrt[4]{3y} \quad \text{з.з. } x \geq 0$$

$$f(x) = 2x^5 + 4x^2 + \sqrt[4]{3x}$$

$$\sqrt{x+4} - \sqrt{3-x} + 5 = 2\sqrt{12-x-x^2}$$

$f(x)$ - возрастает. $x=y$.

$$\begin{aligned} -x^2 - x + 12 & \quad x^2 + x - 12 \\ D & \quad \quad D = 1 + 48 = 49 \end{aligned}$$

$$x+4+3-x - 2\sqrt{(x+4)(3-x)} = (1-x-5)\sqrt{x+4} - \sqrt{3-x} + 5 = 2\sqrt{(x+4)(3-x)}$$

$$7 - 2pt$$

~~$$t - p + 5 = 2pt$$~~

$$x+4, 3-x$$

$$(2t+1)(p-\frac{1}{2}) = 4,5$$

$$2pt - t + p - 5 = 0$$

$$3-x \leq 0$$

$$(t-p)^2 = 7 - 2pt$$

~~$$(t+x)(p+p)$$~~

$$x+4, 4$$

$$(2t+1)(p+\frac{1}{2}) = 2pt - t + p - \frac{1}{2}$$

$$t-p = 7 - 2pt$$

$$2pt - (t-p) = 5$$

$$\sqrt{7-2pt}$$

$$2pt = k$$

$$12 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \sqrt{12 + \frac{1}{4}} < 6$$

$$k - \sqrt{7-k} = 5$$

$$12 - x - x^2$$

$$(k-5)^2 = 7-k$$

$$x_0 = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$k^2 + 25 - 10k = 7k$$

$$D = 16 + 16 \cdot 39 = 16 \cdot 40$$

$$k^2 - 9k + 18 = 0$$

$$2pt$$

$$D = 81 - 72 = 9$$

$$2pt = 3$$

$$k_{1,2} = \frac{9 \pm 3}{2} = 6; 3$$

$$pt = \frac{3}{2}$$

$$12 - x - x^2 = \frac{9}{4}$$

$$4x^2 + 4x - 48 = -9$$

$$4x^2 + 4x - 39 = 0$$

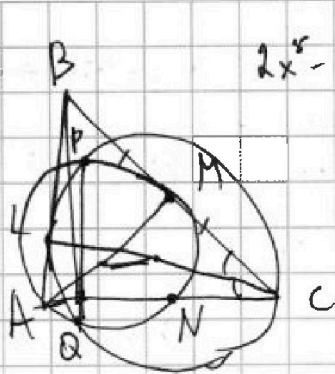


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

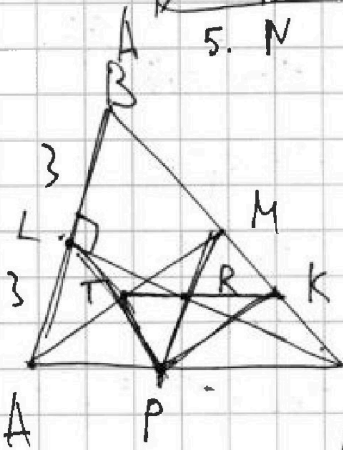
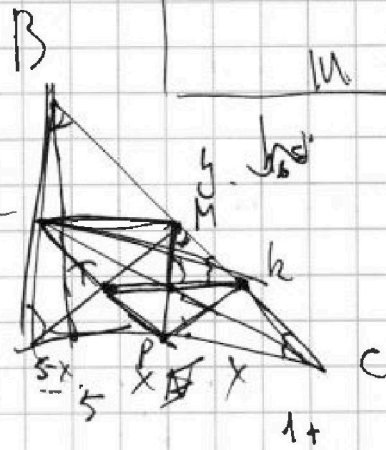
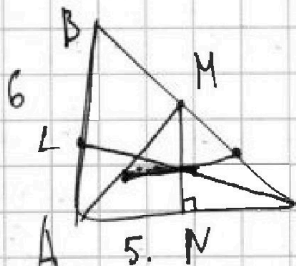
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$2x^5 - 2y^5 + 4(x^2 - y^2) = \sqrt[4]{(3y)^4} - (3x)^{\frac{1}{4}}$$



$\frac{2m+1}{m+1}$

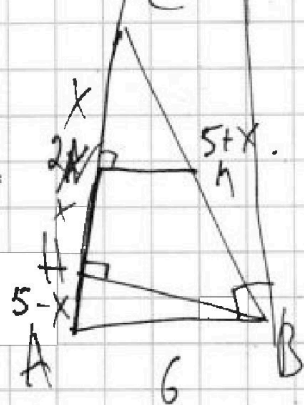


$$MK = \frac{1}{4}BC.$$

$$81 - 72 = 9.$$

$$\frac{9 \pm 3}{2} = 6 \text{ or } 3.$$

$$D = 16 + 4 \cdot 4 \cdot 15 = 16 \cdot 16$$



$$BH^2 = 36 - (5-x)^2 = (5+x)^2 - 4x^2$$

$$36 - 25 - x^2 + 10x = 25 + x^2 + 10x - 4x^2$$

$$2x^2 = 14. \quad D = 1 + 12$$

$$x = \sqrt{7}. \quad x_{02} = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$\frac{\sqrt{13} + 1}{2} \approx 3. \quad \sqrt{13} \approx 3.6$$