



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 6



1. [3 балла] Второй член арифметической прогрессии равен  $12-12x$ , четвёртый член равен  $(x^2 + 4x)^2$ , а восьмой равен  $(-6x^2)$ . Найдите  $x$ .
2. [4 балла] Найдите наименьшее значение выражения  $10x + 5y$  при условии

$$\begin{cases} |2x - 3y| \leq 6, \\ |3x - 2y| \leq 4. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары  $(m, n)$  натуральных чисел, для которых одно из чисел  $A = m^2 - 4mn + 4n^2 + 13m - 26n$  и  $B = m^2n - 2mn^2 - 2mn$  равно  $17p^2$ , а другое равно  $15q^2$ , где  $p$  и  $q$  - простые числа.
4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе  $AH$  треугольника  $ABC$ , проходящая через середину  $M$  его стороны  $BC$ , пересекает сторону  $AC$  и продолжение стороны  $AB$  в точках  $Z$  и  $Y$  соответственно. Найдите  $BC$ , если  $AC = 18$ ,  $AZ = 6$ ,  $YZ = 8$ .
5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+4} - \sqrt{3-y} + 5 = 2\sqrt{12-x-y^2}, \\ 2x^5 + 4x^2 - \sqrt[3]{3y} = 2y^5 - \sqrt[3]{3x} + 4y^2. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат  $7 \times 7$  клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.
7. [6 баллов] В треугольнике  $ABC$  на медиане  $AM$  и биссектрисе  $CL$  как на диаметрах построены окружности  $\Omega$  и  $\omega$  соответственно, пересекающиеся в точках  $P$  и  $Q$ . Отрезок  $PQ$  параллелен высоте треугольника  $ABC$ , проведённой из вершины  $B$ . Окружность  $\Omega$  пересекает сторону  $AC$  повторно в точке  $N$ . Найдите длины сторон  $AC$  и  $BC$ , если  $AB = 6$ ,  $AN = 5$ .

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$a_n$  -  $n$ -ый член арифметической прогрессии, тогда

$a_n = a_1 + d(n-1)$ , где  $a_1$  - первый член прогрессии, а  $d$  - ее разность

$$\text{Тогда: } \begin{cases} \textcircled{1} a_2 = a_1 + d = 12 - 12x; \\ \textcircled{2} a_4 = a_1 + 3d = (x^2 + 4x)^2; \\ \textcircled{3} a_8 = a_1 + 7d = (-6x^2); \end{cases}$$

$$\textcircled{3} - \textcircled{1} : a_1 + 7d - a_1 - d = -6x^2 + 12x - 12 ;$$

$$6d = -6(x^2 - 2x + 1) ;$$

$$d = -(x-1)^2 ; (*)$$

$$\textcircled{2} - \textcircled{1} : a_1 + 3d - a_1 - d = x^2(x+4)^2 - 12 + 12x ;$$

$$2d = x^4 + 8x^3 + 16x^2 + 12x - 12 ; (**)$$

Объединим (\*) и (\*\*):

$$-2x^2 + 4x - 2 = x^4 + 8x^3 + 16x^2 + 12x - 12 ;$$

$$x^4 + 8x^3 + 18x^2 + 8x - 10 = 0 ;$$

$$\textcircled{3} - \textcircled{2} : 4d = -6x^2 - x^2(x+4)^2 ;$$

$$4d = -x^2(6 + x^2 + 8x + 16) ;$$

$$4d = -(x^4 + 8x^3 + 22x^2) ; (***)$$

Объединим (\*) и (\*\*\*):



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$4(x-1)^2 = x^4 + 8x^3 + 22x^2;$$

$$4x^2 - 8x + 4 = x^4 + 8x^3 + 22x^2;$$

$$x^4 + 8x^3 + 18x^2 + 8x - 4 = 0;$$

Заметим, что  $a_4 = \frac{a_2 + a_6}{2}$ , а  $a_6 = \frac{a_4 + a_8}{2}$ ;

$$a_6 = \frac{x^4 + 8x^3 + 16x^2 - 6x^2}{2} = \frac{x^4 + 8x^3 + 10x^2}{2};$$

$$2a_4 = \frac{x^4 + 8x^3 + 10x^2}{2} + 12 - 12x;$$

$$2(x^4 + 8x^3 + 16x^2) = \frac{x^4 + 8x^3 + 10x^2 - 24x + 24}{2};$$

$$4x^4 + 32x^3 + 64x^2 = x^4 + 8x^3 + 10x^2 - 24x + 24;$$

$$3x^4 + 24x^3 + 54x^2 + 24x - 24 = 0$$

$$x^4 + 8x^3 + 18x^2 + 8x - 8 = 0$$

$$(x^2 + 4x)^2 + 2(x^2 + 4x) - 8 = 0;$$

Пусть  $(x^2 + 4x) = t$ , тогда  $t^2 + 2t - 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2, \\ t = -4; \end{cases}$

$$\begin{cases} x^2 + 4x = 2 \\ x^2 + 4x = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 4x - 2 = 0 \\ x^2 + 4x + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 - \sqrt{6} \\ x = -2 + \sqrt{6} \\ x = -2 \end{cases}$$

Ответ:  $\{-2 - \sqrt{6}; -2; -2 + \sqrt{6}\}$ .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} |2x - 3y| \leq 6 & \textcircled{1} \\ |3x - 2y| \leq 4 & \textcircled{2} \end{cases}$$

$$\textcircled{1} \Leftrightarrow -6 \leq 2x - 3y \leq 6 \Leftrightarrow -12 \leq 4x - 6y \leq 12 \Leftrightarrow -18 \leq 6x - 9y \leq 18;$$

$$\textcircled{2} \Leftrightarrow -4 \leq 3x - 2y \leq 4 \Leftrightarrow -12 \leq 9x - 6y \leq 12 \Leftrightarrow -8 \leq 6x - 4y \leq 8;$$

$$\begin{cases} -12 \leq 4x - 6y \leq 12, \\ -12 \leq 9x - 6y \leq 12; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12 \geq 6y - 4x \geq -12, \\ -12 \leq 9x - 6y \leq 12; \end{cases} \begin{cases} -12 \leq 6y - 4x \leq 12, \\ -12 \leq 9x - 6y \leq 12; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -24 \leq 5x \leq 24, \\ -12 \leq 9x - 6y \leq 12; \end{cases} \begin{cases} -\frac{24}{5} \leq x \leq \frac{24}{5}, \\ -12 \leq 9x - 6y \leq 12, \end{cases}$$

$$\begin{cases} -18 \leq 6x - 9y \leq 18, \\ -8 \leq 6x - 4y \leq 8; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -18 \leq 9y - 6x \leq 18, \\ -8 \leq 6x - 4y \leq 8; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -26 \leq 5y \leq 26 \\ -8 \leq 6x - 4y \leq 8 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{26}{5} \leq y \leq 26, \\ -8 \leq 6x - 4y \leq 8; \end{cases}$$

Возьмем  $x = \frac{24}{5}$  и  $y = -\frac{26}{5}$

Проверим:  $\left| -\frac{48}{5} + \frac{78}{5} \right| \leq 6$  - верно.

$\left| -\frac{72}{5} + \frac{52}{5} \right| \leq 4$  - верно.

Тогда минимальное значение  $(10x + 5y) = -\frac{24}{5} \cdot 10 + \left(-\frac{26}{5}\right) \cdot 5 =$

$= -48 - 26 = -74.$  Ответ:  $-74.$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = m^2 - 4mn + 4n^2 + 13m - 26n = (m-2n)^2 + 13(m-2n) =$$

$$= (m-2n)(m-2n+13).$$

$$B = m^2n - 2m^2n^2 - 2mn = mn(m-2n-2).$$

$$\begin{cases} (m-2n)(m-2n+13) = 14p^2, & \textcircled{1} \\ mn(m-2n-2) = 15q^2, & \textcircled{2} \end{cases}$$

① С учетом того, что  $p$  - простое имеем следующие случаи:

$$1) \begin{cases} m-2n = 1, \\ m-2n+13 = 14p^2; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} m-2n = 14p^2, \\ m-2n+13 = 1; \end{cases} \quad 3) \begin{cases} m-2n = 17, \\ m-2n+13 = p^2; \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} m-2n = p^2, \\ m-2n+13 = 17; \end{cases} \quad 5) \begin{cases} m-2n = 17p, \\ m-2n+13 = p; \end{cases} \quad 6) \begin{cases} m-2n = p, \\ m-2n+13 = 17p; \end{cases}$$

1) Так как  $m-2n \geq 1$ , то  $m-2n+13 = 14$ , то есть  $14 = 14p^2$ ,  $m \in \emptyset$ .

2) Так как  $m-2n+13 = 1$ , то  $m-2n = -12$ , то есть  $-12 = 14p^2$ ,  $\emptyset$ .

3) Так как  $m-2n = 17$ , то  $m-2n+13 = 30$ , то есть  $30 = p^2$ ,  $\emptyset$ .

4) Так как  $m-2n+13 = 17$ , то  $m-2n = 4$ , то есть  $4 = p^2$ , так как  $p$  - простое, то  $p = 2$ .

5) Так как  $m-2n = 17p$ , то имеем  $17p+13 = p$ ,  $\Leftrightarrow 13 = -16p$ ,  $\emptyset$ .

6) Так как  $m-2n = p$ , то имеем  $p+13 = 17p \Leftrightarrow 13 = 16p$ ,  $\emptyset$ .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{2) \begin{cases} (m-2n)(m-2n+13) = 15q^2 & \textcircled{1} \\ mn(m-2n-2) = 17p^2 & \textcircled{2} \end{cases}$$

$$\textcircled{1} \begin{cases} m-2n = 1 \\ m-2n+13 = 15q^2 \end{cases} \quad \textcircled{2} \begin{cases} m-2n = 15q^2 \\ m-2n+13 = 1 \end{cases} \quad \textcircled{3} \begin{cases} m-2n = 15 \\ m-2n+13 = q^2 \end{cases}$$

$$\textcircled{4} \begin{cases} m-2n = q^2 \\ m-2n+13 = 15 \end{cases} \quad \textcircled{5} \begin{cases} m-2n = 15q \\ m-2n+13 = q \end{cases} \quad \textcircled{6} \begin{cases} m-2n = q \\ m-2n+13 = 15q \end{cases}$$

Итого ответ:

Ответ: (10; 3)

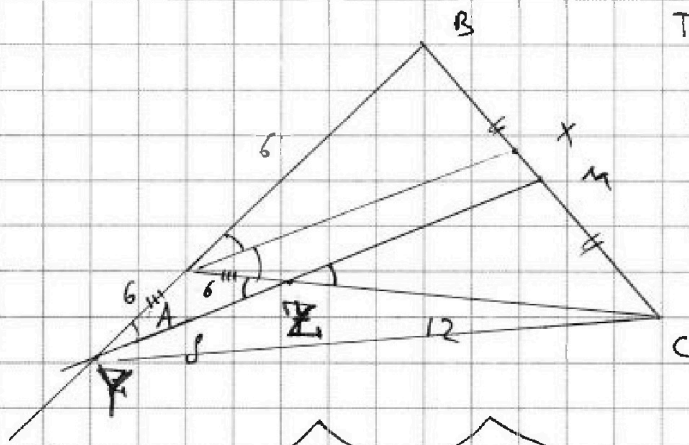


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



тк  $(YM) \parallel (AX)$ , то

$$\widehat{XAC} = \widehat{M'ZC}$$

или  $\widehat{M'ZC} = \widehat{A'ZY}$  как вертикал.

$$\widehat{BAX} = \widehat{BYM} \text{ как соответств.}$$

Тогда, тк  $\widehat{AYZ} = \widehat{A'ZY}$ , то  $\triangle AYZ - \text{р/б}$ ,  $|AY| = |A'Z|$ .

По теореме косинусов найдем угол  $\widehat{YAZ}$ :

$$\cos \widehat{YAZ} = \frac{36 + 36 - 64}{2 \cdot 6 \cdot 6} = \frac{4}{6 \cdot 6} = \frac{1}{9}$$

Тогда  $\cos \widehat{BAC} = -\frac{1}{9}$ . ( $\triangle BAC - \text{тупоугол.}$ )

Найдем  $\cos \widehat{A'ZY}$ :

$$\cos \widehat{A'ZY} = \frac{36 + 64 - 36}{2 \cdot 6 \cdot 8} = \frac{64}{96} = \frac{2}{3}$$

Тогда  $\cos \widehat{Y'ZC} = -\frac{2}{3}$ .

Решаем  $\triangle Y'ZC$ . По т. косинусов  $\triangle Y'ZC$ : ( $|ZC| = |AC| - |A'Z| = 12$ )

$$|YC|^2 = |YZ|^2 + |ZC|^2 - 2|YZ||ZC| \cdot \cos \widehat{Y'ZC};$$

$$|YC|^2 = 64 + 144 - 2 \cdot 8 \cdot 12 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = 208 + \frac{4 \cdot 8 \cdot 4}{128} = 336$$

$$|YC| = 4\sqrt{21};$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~Решение задачи~~  $\triangle ABC$

$$\triangle MAZ \sim \triangle XA \text{ по 1-му: } \frac{|XC|}{|AC|} = \frac{18}{12} \Leftrightarrow |XC| = \frac{3}{2} |AC|,$$

тогда  $X$  - середина  $(BM)$ .

Самыми,  $\triangle BAX \sim \triangle BYM$  по 1-му:

$$\frac{|BA|}{|BY|} = \frac{|BX|}{|BM|} \Leftrightarrow \frac{|BA|}{|BY|} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2|BA| = |BY|$$

$$|BY| = |BA| + |AY|, \text{ тогда}$$

$$|BA| = |AY| = 6.$$

По 7. косинусов в  $\triangle ABC$

$$|BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2 - 2|AB||AC| \cdot \cos \widehat{BAC}$$

$$|BC|^2 = 36 + 324 - 2 \cdot 6 \cdot 18 \cdot \left(-\frac{1}{5}\right);$$

$$|BC|^2 = 360 + 2 \cdot 6 \cdot 2$$

$$|BC|^2 = 384$$

$$|BC| = 8\sqrt{6}$$

Ответ:  $8\sqrt{6}$ .





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Решим ②:  $4t^2 - 18t + 18 = 0$   
 $2t^2 - 9t + 9 = 0$   
 $D = 81 - 4 \cdot 2 \cdot 9 = 9$

$$t_{1,2} = \frac{9 \pm 3}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \\ t = 2 \end{cases}$$

$$1) \begin{cases} u^2 + v^2 = 7 \\ uv = 3 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} u^2 + v^2 = 7 \\ uv = \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} u^2 + v^2 = 7 \\ 2uv = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u - v = 1 \\ (u + v)^2 = 13 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} u^2 + v^2 = 7 \\ 2uv = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (u + v)^2 = 10 \\ (u - v)^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

~~$$\begin{cases} u + v = \sqrt{13} + 1 \\ u + v = \sqrt{13} - 1 \end{cases}$$~~

$$\begin{cases} u - v = 1 \\ u + v = \sqrt{13} \\ u + v = -\sqrt{13} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} u + v = \sqrt{10} \\ u - v = 2 \\ u + v = -\sqrt{10} \\ u - v = 2 \\ u + v = \sqrt{10} \\ u - v = 2 \\ u + v = -\sqrt{10} \\ u - v = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = \frac{2}{2} \text{ не } \\ v = \frac{-\sqrt{10} + 2}{2} \text{ не } \\ u = \frac{\sqrt{10} + 2}{2} \\ v = \frac{\sqrt{10} - 2}{2} \\ u = \frac{-\sqrt{10} + 2}{2} \text{ не } \\ v = \frac{-\sqrt{10} - 2}{2} \text{ не } \\ u = \frac{\sqrt{10} + 2}{2} \\ v = \frac{\sqrt{10} - 2}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u = \frac{\sqrt{13} + 1}{2} \\ v = \frac{\sqrt{13} - 1}{2} \\ u = \frac{1 - \sqrt{13}}{2} \\ v = \frac{-1 - \sqrt{13}}{2} \end{cases} \text{ не } \text{ не } \text{ не } \text{ не}$$

$$\begin{cases} \sqrt{x+4} = \frac{\sqrt{13} + 1}{2} \\ \sqrt{3-x} = \frac{\sqrt{13} - 1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$1) \begin{cases} \sqrt{x+4} = 2 \\ \sqrt{3-x} = \frac{\sqrt{10} - 2}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+4 = 4 \\ 3-x = \frac{12 - 4\sqrt{10}}{4} \end{cases} \text{ не } \text{ не}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+4 = 4 \\ 3-x = \frac{14 - 2\sqrt{13}}{4} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{2\sqrt{13} - 2}{2}$$

$$2) \begin{cases} \sqrt{x+4} = \frac{\sqrt{10} + 2}{2} \\ \sqrt{3-x} = \frac{\sqrt{10} - 2}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+4 = \frac{12 + 4\sqrt{10}}{4} \\ 3-x = \frac{12 - 4\sqrt{10}}{4} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt{13} - 1 \text{ не } \text{ не}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{10} - 1 \\ x = \sqrt{10} \end{cases}$$

Ответ:  $(\sqrt{13} - 1; \sqrt{13} - 1)$ .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА

1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \sqrt{x+4} - \sqrt{3-y} + 5 = 2\sqrt{12-x-y^2}, & (1) \\ 2x^3 + 4x^2 - \sqrt{3y} = 2y^5 - \sqrt{3x} + 4y^2; & (2) \end{cases}$$

Дана система уравнений тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} x \geq -4 \\ y \leq 3 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ y \in [0; 3] \end{cases}$$

1) Заметим, что уравнение (2) выполняется тогда и только тогда, когда

$$x = y.$$

Проверим какие значения по уравнению (1):

$$\sqrt{x+4} - \sqrt{3-x} + 5 = 2\sqrt{12-x-y^2} \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{x+4} - \sqrt{3-x} = 2\sqrt{12-x-y^2} - 5$$

Пусть  $\sqrt{x+4} = u$ , а  $\sqrt{3-x} = v$ . Получаем: ( $u \geq 0$  и  $v \geq 0$ )

$$u - v = 2uv - 5 \Leftrightarrow u - 2uv - v + 5 = 0.$$

Тогда  $-u^2 + 4 = v^2$ . Получим систему:

$$\begin{cases} u^2 + v^2 = 4 \\ u - v = 2uv - 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^2 + v^2 = 4 \\ u^2 + v^2 - 2uv = 4u^2v^2 - 20uv + 25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u^2 + v^2 = 4 \\ 4u^2v^2 - 18uv + 18 = 0, & (2) \end{cases} \text{ Пусть } uv = t$$



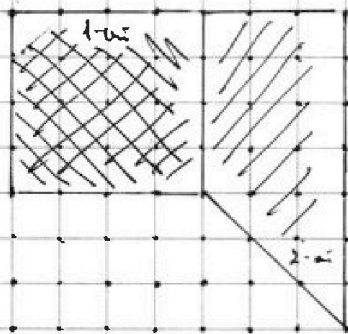
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Пусть  $A$  - количество узлов;

Всего узлов:  $(4+1) \cdot (4+1) = 64$ .

1) если мы рассмотрим 1-ый узел в  
одном из узлов квадрата:

Возможностей выбрать первый узел осталось 4.

1.1) Если второй узел лежит на левой границе (□)

Возможностей выбрать второй узел - 6 (т.к. 2 узла уже не могут быть  
выбраны). ~~тогда~~  $A = 4 \cdot 6 : 4$ ;  $A = 6$ .  
т.к. рассмотрим узел на 4 поворота для этого.

1.2) Если второй узел лежит не на левой границе (а не в углу)

Расширивая какой-либо <sup>второй</sup> узел в левый мы сразу добавим еще

4 случая, ведь ~~он~~ ~~на~~ ~~этом~~ узле сейчас поворачиваем:

$$A = 4 \cdot \frac{(64 - 4 - 6)}{54}; \quad A = 6 + \frac{6}{54} = \frac{60}{9}$$

1.3) Если второй узел тоже будет расположен в углу:

~~тогда~~ если оба узла на одной границе 1 случай и если

они на одной стороне квадрата: тоже еще 1 случай:  $A = 2$ ;  $A = 62$ .

2) Если первый узел лежит вне угла, но не в углу:



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
— ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~Возможности 2 квадрата 1-ый узел: 60.~~

~~Возможности 2 квадрата 2-ой узел:  $60 + 89$  (ответ не совсем)~~

Возьмем квадрат  $5 \times 5$ . В данном квадрате мы сможем выбрать

выбрать 1-ый узел (крае узел). Дело в том, что если

выбрать 1-ый узел во всем квадрате, то коррктных 1-ых узлов будет

в 4 раза меньше узла совпадающих отрезков после преобразования. Но также

при выборе 2-ого узла он может совпасть с до этого ранее рассмотренным

первым узлом. Поэтому возьмем случайный квадрат, который будет

занимать  $\frac{1}{4}$  квадрата и стороны (+ также средин).

Второй узел будем выбирать из части (трапеции) которой квадрат,

глава равная четв квадрат, вычитаемые совпадения.

Итого возможностей квадрате 1-ый узел:  $25 - 1 = 24$  (из угла).

Возможностей выбрать 2-ой узел: 43. (убрав угол и 1-ый узел).

$$A = 24 \cdot 43; \quad A = 24 \cdot 43 + 62 = 1032 + 62 = 1094.$$

Ответ: 1094.





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^4 + 8x^3 + 18x^2 + 8x - 10 = 0$$

$$B^2 \text{ min } (m - 2n - 2)$$

$$1 \quad 8 \quad 18 \quad 8 \quad -10 \quad a_2$$

$$a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \quad a_5 \quad a_6 \quad a_7$$

$$a_2 - d + a_3 - d$$

$$|2x - 3y| \leq 6$$

$$|3x - 4y| \leq 4$$

$$a_4 = \frac{a_1 + a_4}{2}$$

$$a_4^2 = 2 \frac{m-4}{2}$$

$$2a_4 = a_2 + a_3 - 2d$$

$$2n = 1 \quad n = \frac{1}{2}$$

$$-6 \leq 2x - 3y \leq 6 \quad | \cdot 3 \cdot 2$$

$$+ \quad -6 \leq 5x - 5y \leq 6$$

$$-4 \leq 3x - 4y \leq 4 \quad | \cdot 2 \cdot 3$$

$$-2 \leq x - y \leq 2 \quad m \in \{1, 2, 3, 4, 5, 9, 15, 15q, 9^2\}$$

$$-13 \leq 6x - 9y \leq 18$$

$$4n^2 + 8n - 64$$

$$m = 39$$

$$n = 5$$

$$-8 \leq 6x - 4y \leq 8 \quad n^2 + 2n - 64$$

$$-12 \leq 4x - 6y \leq 12 \quad n = 3$$

$$-8 + 18 \leq 6x - 4y - 6x + 4y \leq 8 - 18$$

$$-12 \leq 9x - 6y \leq 12 \quad 16(4 + 15q^2)$$

$$10 \leq 5y \leq -10 \quad 2n^2 - 4n \quad (2n^2 - 4)n$$

$$-12 \leq 5x \leq 12 \quad 4 + 2n^2 + 4n$$

$$64 + 4 \cdot 4 \cdot 64$$

$$4n^2 + 8n - 15q^2$$

$$-2 \leq y \leq 2 \quad 14n^2 = 2n + 4$$

$$0 \leq 5x \leq 12 \quad 64 + 16 \cdot 15q^2$$

$$64 + 4 \cdot 4 \cdot 64$$

$$96 \cdot 4 - 60 \leq 5y \leq 60$$

$$24 \cdot 4 \cdot 2n \quad 15q^2 \cdot 4n$$

$$x \leq 0 \quad + \quad 9^2 \quad 15$$

$$16(4 + 64)$$

$$32 \quad -8 \leq 3z \leq 24$$

$$24 \quad 4 \cdot 2n \quad 4n$$

$$9 = 2$$

$$+ \quad 15q^2 \quad 1$$

$$A = m^2 - 4mn + 4n^2 + 13m - 26n = 12p^2$$

$$+ \quad 5 \quad 3q \quad m, n, x \quad mn = 30$$

$$B = m^2n - 2mn^2 = 2mn$$

$$360 - 12 \cdot 6 \quad 348 \quad 4 \cdot 15 \cdot 64$$

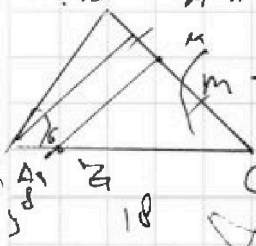
$$+ \quad 15q^2$$

$$(m - 2n)^2 + 13(m - 2n) = 36 + 32n + 18 \cdot 6$$

$$+ \quad 3 \quad 5q^2$$

$$C = (m - 2n)(m - 2n + 13) = 14p^2 \quad \text{min } 15q^2$$

$$+ \quad 5 \quad 3q^2$$



$$384 = 4 \cdot 96 = 6 \cdot 16 \quad 4^2 \cdot 2 \cdot 6 \quad 86$$

$$+ \quad 15 \quad 9^2$$

$$+ \quad 9 \quad 15q$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7  СТРАНИЦА \_\_\_\_\_ ИЗ \_\_\_\_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

(1)  $d = -(x-1)^2$   $a_2$  
 $y \leq 3 \vee y = -4$   
 $y \geq 0 \vee y = 0$ 
 
 $\begin{matrix} 4 & 8 \\ 16 & -24 \end{matrix}$

(2)  $2d = x^4 + 8x^3 + 16x^2 + 12x - 12$   $3x, 46d$

(3)  $4d = -x^4 - 8x^3 - 22x^2$   $4-8$   $2(a_1 + 5b)$   
 $y=3$   $46$

(2)  $2(2) = (3) \Leftrightarrow 2x^4 + 16x^3 + 32x^2 + 24x - 24 = -x^4 - 8x^3 - 22x^2$

(1)  $2(3) \Leftrightarrow -4x^2 + 8x - 4 = -x^4 - 8x^3 - 22x^2$

$x^4 + 8x^3 + 22x^2 + 24x - 24 = 0$   
 $3x^4 + 24x^3 + 57x^2 + 24x - 24 = 0$   $a_1 = 2, a_2 = 7$

$\begin{cases} x^4 + 8x^3 + 18x^2 + 8x - 8 = 0 \\ x^4 + 8x^3 + 18x^2 + 8x - 4 = 0 \end{cases}$  
 $(x^2 + 4x)^2 + 6(x^2 + 4x - 4) = 0$   
 $d^2 + 6(d - 4) = 0$   
 $a_1 = 2, a_2 = 3d$   
 $d^2 + 6d - 24 = 0$

$x = 0$   $d^2 + 6d - 4 = 0$   
 $D = 36 + 16 = 52$   
 $d_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{52}}{2}$   
 $a_1 = 2, a_2 = d$

$2(1) = (2)$   $16 - 36 = 2d$   
 $-2x^2 + 4x - 2 = x^4 + 8x^3 + 16x^2 + 12x - 12$   $-20 = 2d$

$x^4 + 8x^3 + 18x^2 + 8x - 10 = 0$   $(x=1)$   
 $x^4 + 8x^3 + 16x^2 - 24x + 24 = 2(x^4 + 8x^3 + 16x^2)$

$2) + (3) : 6d = -6x^2 + 12x - 12$   
 $d = -(x-1)^2$   $a_1 = \frac{a_5 + a_2}{2}$

$2a_6 = \frac{a_1 + a_8}{(x^2 + 4x)^2 - 6x^2} = \frac{x^4 + 8x^3 + 16x^2}{2} + 12 - 12x$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Анализ (1):  $(m-2n=4)$

- 1)  $\begin{cases} m=3 \\ n=5 \\ m-2n-2=q^2 \end{cases}$ ; 2)  $\begin{cases} m=5 \\ n=3 \\ m-2n-2=q^2 \end{cases}$ ; 3)  $\begin{cases} m=9 \\ n=5 \\ m-2n-2=3q \end{cases}$ ;  
 4)  $\begin{cases} m=9 \\ n=3q \\ m-2n-2=5 \end{cases}$ ; 5)  $\begin{cases} m=1 \\ n=15 \\ m-2n-2=q^2 \end{cases}$ ; 6)  $\begin{cases} m=1 \\ n=q^2 \\ m-2n-2=15 \end{cases}$ ;  
 7)  $\begin{cases} m=1 \\ n=15q^2 \\ m-2n-2=5 \end{cases}$ ; 8)  $\begin{cases} m=1 \\ n=15q \\ m-2n-2=q \end{cases}$ ; 9)  $\begin{cases} m=1 \\ n=25q \\ m-2n-2=3q \end{cases}$ ; 10)  $\begin{cases} m=1 \\ n=1 \\ m-2n-2=15q^2 \end{cases}$ ;  
 11)  $\begin{cases} m=1 \\ n=3 \\ m-2n-2=5q^2 \end{cases}$ ; 12)  $\begin{cases} m=1 \\ n=5 \\ m-2n-2=3q^2 \end{cases}$ ; 13)  $\begin{cases} m=1 \\ n=9 \\ m-2n-2=15q \end{cases}$ ; 14)  $\begin{cases} m=1 \\ n=3q \\ m-2n-2=5q \end{cases}$

$$(2) : mn(m-2n-2) = 15q^2 \Leftrightarrow mn \cdot 2 = 15q^2 \Leftrightarrow q:2.$$

Учитывая, что  $m-2n=4$ , оставаясь левым, получаем:

$$4n^2 + 8n - 15q^2 = 0.$$

$$D = 64 + 4 \cdot 4 \cdot 15q^2 = 16(4 + 15q^2).$$

$$n_{1,2} = \frac{-8 \pm 4\sqrt{4+15q^2}}{8} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+15q^2}}{2};$$

$15q^2 + 4 = x^2$ , имеет единственное решение при  $q=2$  и  $x=8$  в нашем случае.

$$\text{Тогда: } n_{1,2} = \frac{-2 \pm 8}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 5 \in \mathbb{N} \\ n = -3 \notin \mathbb{N} \end{cases} \Leftrightarrow m = 10$$

Проверяем у условия (1)  $(10; 3)$ .





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

44

$a_1 =$   
 $a_2 =$

$x^4 + 8x^3 + 16x^2 + 8x - 8 = 0$

$d = 2$   
 $a_1 = 1$   
 $a_2 = 3$   
 $a_n = a_1 + d(n-1)$   
 $a_3 = 2 + 2 = 4$

(1)  $a_1 = a_1 + d = 12 - 12x$   
(2)  $a_2 = a_1 + 3d = (x^2 + 11x)^2$   
(3)  $a_3 = a_1 + 4d = (-6x^2)$

$(3) - (2) = 4d = -6x^2 - (x^2 + 11x)^2 = -x^2(6 + (x^2 + 11x)^2)$   
 $4d = -x^2(x^2 + 8x + 22)$   
 $4x^2 - 8x + 4 = x^2 + 8x^3 + 22x^2$   
 $4 + 8x^3 + 18x^2 - 8x - 4d = -x^2(x^2 + 8x + 22)$

(2)  $-(1)^2 = 2d = x^2(x+4)^2 - 12 + 12x$   
 $2d = x^4 + 8x^3 + 16x^2 + 12x - 12$   
 $4d = -x^4 - 8x^3 - 22x^2$

(3)  $-(1) = 6d = -6x^2 - 12 + 12x$   
 $x^4 + 8x^3 + 16x^2 + 24x - 24 = 0$   
 $-6x^2 + 12x - 12$

1 8 16 24 -4 =  $-x^2 + 2x = 1$   
-2 1 6 -2 28  $d = -(x-1)^2$   
2 1 6 30 84 ...  
-3 1 5 -5 35 ...  
 $-2x^2 + 4x - 2 = x^4 + 8x^3 + 16x^2 + 12x - 12$   
 $x^4 + 8x^3 + 16x^2 + 8x - 8 = 0$

$x^2(x+4)^2 = x^2(x+4)^2$   
 $(x+2)^2(x^2 + 4x - 2)$   
 $D = 16 + 4 \cdot 2 = 24$   
 $x^2 + 8x + 16$   
1 6 6 -4  
-2 1 4 -2 0  
 $-6x^2 + 12x - 12$   
1 2 18 3 -8  
-2 1 6 28 -4 0  
 $x^3(x+2) + 6x^2(x+2) + 6x(x+2) - 4(x+2)$   
 $(x+2)(x^3 + 6x^2 + 6x - 4) = 0$   
 $x^2(x+2) + 4x(x+2) - 2(x+2) = 0$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Лорча QR-кода недопустима!

Handwritten mathematical work on grid paper. The main equation is  $x^2 + 2 \cdot 4x^2 \cdot x + (4x)^2 + 2(x^2 + 4x) - 8 = 2$ . The student derives  $(x^2 + 4x)^2 + 2(x^2 + 4x) - 4 = 2$  and  $x^2 + 2x - 2 = 0$ . They calculate the discriminant  $D = 4 + 16 = 20$  and find roots  $x = -1 \pm \sqrt{5}$ . A diagram shows a triangle with sides  $x$  and  $4x$ . The student also works on a system of inequalities:  $4x - 6y \leq 12$ ,  $9x - 6y \leq 12$ , and  $12 \leq 6y - 4x \leq 12$ . They find the feasible region and its vertices, including  $(-2, 4)$ ,  $(2, 4)$ , and  $(0, 2)$ . The final answer is  $x \in [-2, 2]$ .