



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 6



1. [3 балла] Второй член арифметической прогрессии равен $12 - 12x$, четвёртый член равен $(x^2 + 4x)^2$, а восьмой равен $(-6x^2)$. Найдите x .
2. [4 балла] Найдите наименьшее значение выражения $10x + 5y$ при условии

$$\begin{cases} |2x - 3y| \leq 6, \\ |3x - 2y| \leq 4. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары (m, n) натуральных чисел, для которых одно из чисел $A = m^2 - 4mn + 4n^2 + 13m - 26n$ и $B = m^2n - 2mn^2 - 2mn$ равно $17p^2$, а другое равно $15q^2$, где p и q — простые числа.
4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе AH треугольника ABC , проходящая через середину M его стороны BC , пересекает сторону AC и продолжение стороны AB в точках Z и Y соответственно. Найдите BC , если $AC = 18$, $AZ = 6$, $YZ = 8$.
5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+4} - \sqrt{3-y} + 5 = 2\sqrt{12-x-y^2}, \\ 2x^5 + 4x^2 - \sqrt[3]{3y} = 2y^5 - \sqrt[3]{3x+4y^2}. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат 7×7 клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.
7. [6 баллов] В треугольнике ABC на медиане AM и биссектрисе CL как на диаметрах построены окружности Ω и ω соответственно, пересекающиеся в точках P и Q . Отрезок PQ параллелен высоте треугольника ABC , проведённой из вершины B . Окружность Ω пересекает сторону AC повторно в точке N . Найдите длины сторон AC и BC , если $AB = 6$, $AN = 5$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~ 1

] (a_n) - данная арифм. прогрессия с разностью d . Тогда:

$$\begin{cases} a_1 + d = 12 - 12x \\ a_1 + 3d = (x^2 + 4x)^2 \\ a_1 + 7d = -6x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 + d = 12 - 12x \\ 2d = x^2(x+4)^2 + 12x - 12 \\ 6d = -6x^2 + 12x - 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 + d = 12 - 12x \\ d = -x^2x - 2 \\ x^2(x+4)^2 + 2x^2 - 4x + 4 + 12x - 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^4 + 8x^3 + 18x^2 + 8x - 8 = 0 \\ a_1 + d = 12 - 12x \\ d = -x^2 + 2x - 2 \end{cases}$$

Схема Горнера:

1	8	18	8	-8	
-2	1	6	6	-4	0
-2	1	4	-2	0	

$$x^4 + 8x^3 + 18x^2 + 8x - 8 = 0 \Leftrightarrow (x+2)^2(x^2 + 4x - 2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = -2 \pm \sqrt{6} \end{cases}$$

Ответ: $\{-2; -2 + \sqrt{6}; -2 - \sqrt{6}\}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

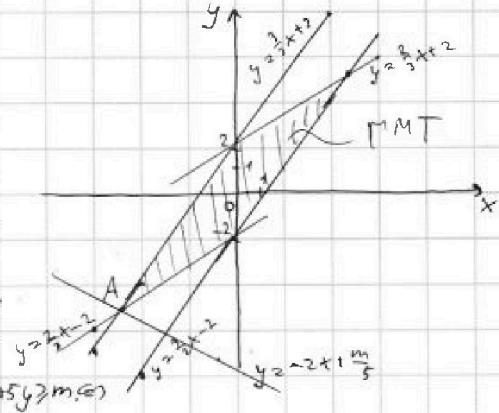
1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~2

$$\begin{cases} |2x-3y| \leq 6 \\ |3x-2y| \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-3y \leq 6 \\ 2x-3y \geq -6 \\ 3x-2y \leq 4 \\ 3x-2y \geq -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq \frac{2}{3}x-2 \\ y \leq \frac{2}{3}x+2 \\ y \geq \frac{3}{2}x-2 \\ y \leq \frac{3}{2}x+2 \end{cases}$$



] m - наименьшее значение $10x+5y$ при данных условиях для x, y удовлетворяющих условиям.
Тогда ГМТ решения данных условий $10x+5y \geq m$

$\Leftrightarrow y \geq -2x + \frac{m}{5}$, то есть ГМТ, удовлетворяющее условиям лежит на линии $y = -2x + \frac{m}{5}$, и такая линия имеет с ГМТ одну общую точку.

Δ (·) A - точку пересечения $y = \frac{3}{2}x + 2$ и $y = \frac{3}{2}x - 2$

$$\begin{cases} y = \frac{3}{2}x + 2 \\ y = \frac{3}{2}x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{3}{2}x + 2 \\ 3x + 12 = 4x - 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{24}{5} \\ y = -\frac{26}{5} \end{cases} \quad A(-\frac{24}{5}; -\frac{26}{5})$$

Рассматривая прямую $y = -2x + c$, где c - параметр, ставим перед собой задачу, что прямая $y = -2x + \frac{m}{5}$ пройдет тогда и только тогда, когда пройдет через A .

$$\begin{cases} y = -2x + \frac{m}{5} \\ x = -\frac{24}{5} \\ y = -\frac{26}{5} \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{26}{5} = 2 + \frac{48}{5} + \frac{m}{5} \Leftrightarrow m = -74$$

оставшиеся значения m имеют нецелые, и.и. значения единичной.

Ответ: -74.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 3

$$\begin{cases} A = m^2 - 4mn + 4n^2 + 13m - 26n \\ B = m^2n - 2mn^2 - 2mn \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = (m-2n)^2 + 13(m-2n) \\ B = mn(m-2n-2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = (m-2n)(m-2n+13) \\ B = mn(m-2n-2) \end{cases}$$

I. Случай, когда $A = 17p^2$, $B = 15p^2$

$$(m-2n)(m-2n+13) = 17p^2$$

при $m-2n = 17p$: $m-2n+13 = p$, но $m-2n > 17p > p = m-2n+13 > m-2n$ (!)

при $m-2n = p$: $m-2n+13 = 17p > m-2n+13 = p+13 > m-2n$ (!)

при $m-2n = 17$: $p^2 = m-2n+13 = 17+13=30$ — не п.кв.р!

при $m-2n+13 = 17$: $m-2n = 4$

$$mn(m-2n-2) = 15p^2 \stackrel{m-2n=4}{=} (n^2+4n)2 = 15p^2 \stackrel{m-2n=4}{=} n^2+2n = 15 \stackrel{n \geq 0}{=} n=3$$

$$m-2n=4 \stackrel{n=3}{=} m=10$$

найдем (3; 10)

II. Случай, когда $A = 15p^2$, $B = 17p^2$

при $m=1$: $B = n(-2n-1) < 0$, но $17p^2 > 0$ (!)

при $n=1$: $B = m(m-4)$

- 1) при $m = 17p > 16$
- 2) при $m = p$: $m-4 = 17p > p > m$ (!)

3) при $m = 17$: $p^2 = 17-4 = 13$ (!)

4) при $m-4 = 17$: $m = 21 = p^2$ (!)

при $m=17$: $n =$

$$m-2n-2=1:$$



На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sim 5$$

$$2x^5 + 4x^2 - 4\sqrt{3}y = 2y^5 - 4\sqrt{3}x + 4y^2 \Leftrightarrow 2x^5 + 4x^2 + 3\sqrt{3}x = 2y^5 + 4y^2 + 3\sqrt{3}y \Leftrightarrow x = y$$

т.к. $90 - 8\sqrt{3} < 0$
 $f(x) = 2x^5 + 4x^2 + 3\sqrt{3}x$ отпр. т.к. нестр.р.
 и убывает (из-за макс.)

условие равенства сторонней т.е. т.е.:

$$\begin{cases} x=y \\ \sqrt{x+4} - \sqrt{3-x} = 2\sqrt{(x+4)(3-x)} - 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ 7 - 2\sqrt{(x+4)(3-x)} = 4(x+4)(3-x) - 20\sqrt{(x+4)(3-x)} + 25 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ 2(x+4)(3-x) - 9\sqrt{(x+4)(3-x)} + 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ \sqrt{(x+4)(3-x)} = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 9 \cdot 8}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ \sqrt{(x+4)(3-x)} = 6 \\ \sqrt{(x+4)(3-x)} = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ x^2 + x - 12 = -36 \\ x^2 + x - 12 = -9 \\ (x+4)(3-x) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2-4 \\ x \in 3 \\ x=y \\ x^2 + x + 24 = 0 \\ x^2 + x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=2-4 \\ x=2-4 \\ x \in 3 \\ x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+12}}{2} \end{cases}$$

$$-4 < \frac{-1-4}{2} < \frac{-1-\sqrt{13}}{2} < 0 < 3$$

$$-4 < 0 < \frac{-1+\sqrt{13}}{2} < \frac{-1+4}{2} < 3$$

Ответ: $\left\{ \left(\frac{-1+\sqrt{13}}{2}, \frac{-1+\sqrt{13}}{2} \right); \left(\frac{-1-\sqrt{13}}{2}, \frac{-1-\sqrt{13}}{2} \right) \right\}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№6

В квадрате 7×7 64 узла сетки
(т.е. границы)

Всего случаев перекрытия узлов (см. условие) ^{с учётом} без учёта ориентации C_{64}^2 .
 Без учёта ориентации C_{64}^2 перекрытия симметричны относительно центра перекрытия.
 Если перекрытия симметричны относительно центра перекрытия, то перекрытия симметричны относительно центра перекрытия.
 Если перекрытия симметричны относительно центра перекрытия, то перекрытия симметричны относительно центра перекрытия.
 Если перекрытия симметричны относительно центра перекрытия, то перекрытия симметричны относительно центра перекрытия.

Асим. перекрытия 32 (один узел в нижней половине квадрата, второй восстанавливаем симм.)

$$\frac{C_{64}^2 - 32}{4} + \frac{32}{2} = \frac{64 \cdot 63}{2} - 32 + \frac{32}{2} = 8 \cdot 63 - \frac{32}{2} = 480 + 24 - 8 = 496$$

Ответ: 496

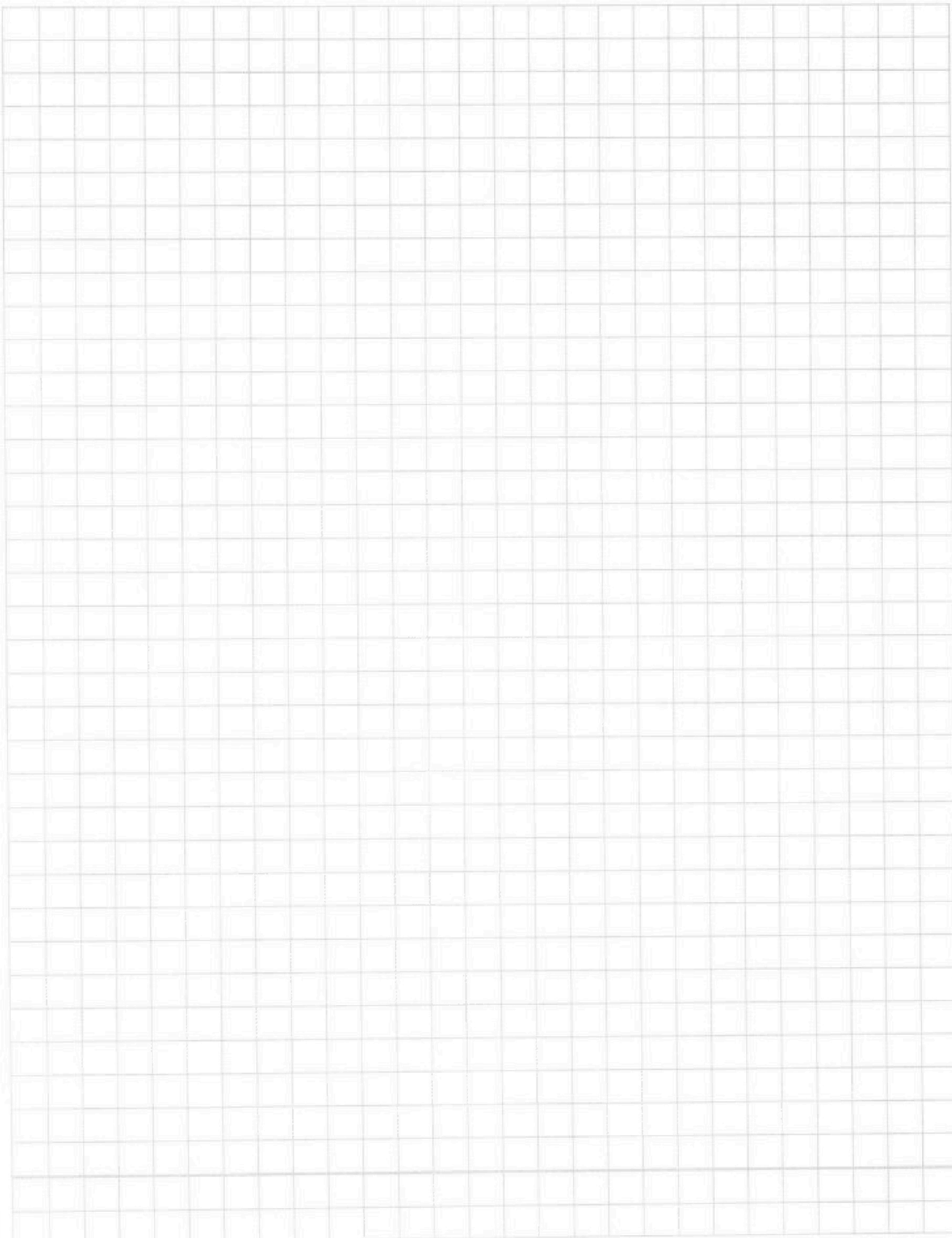


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



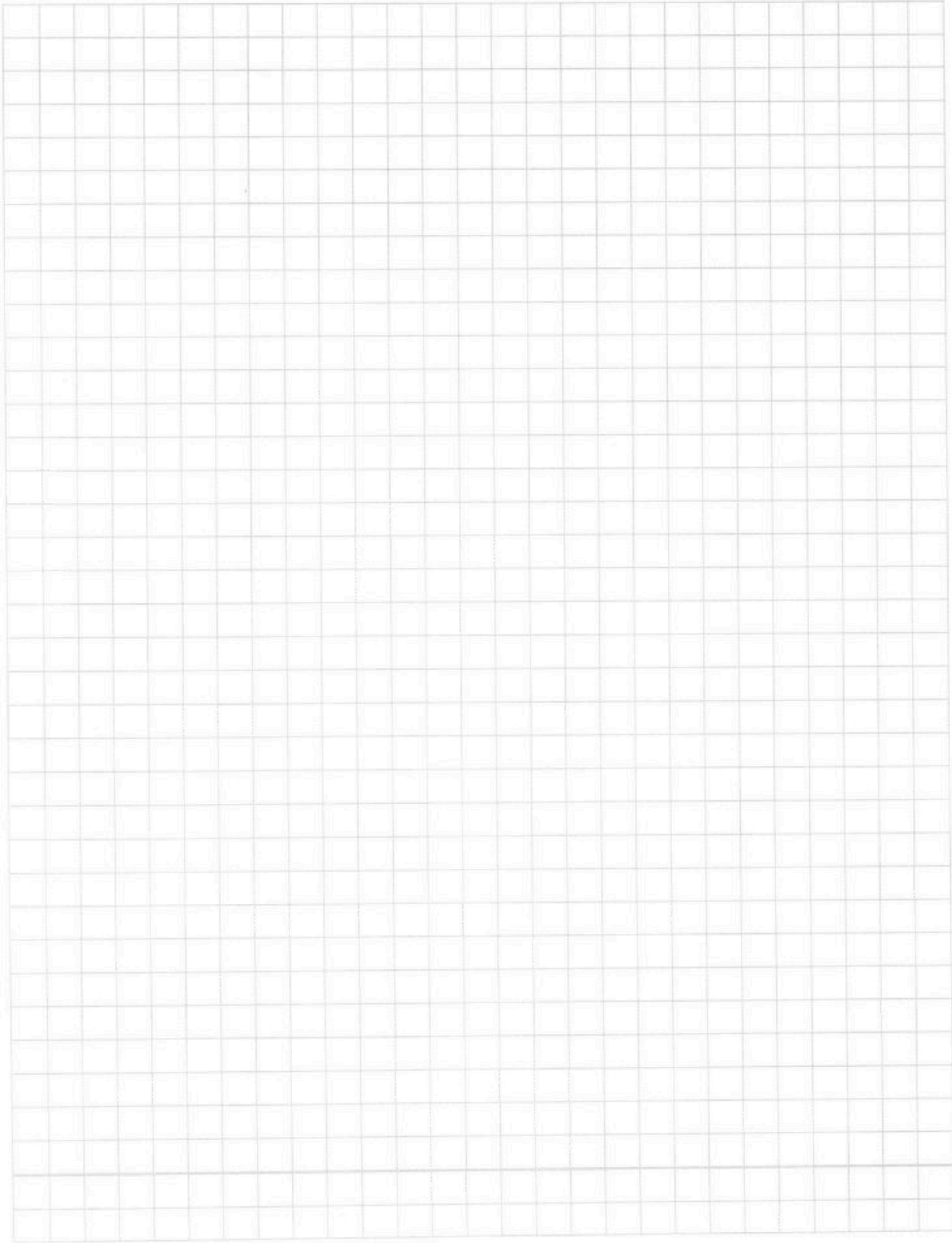


На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

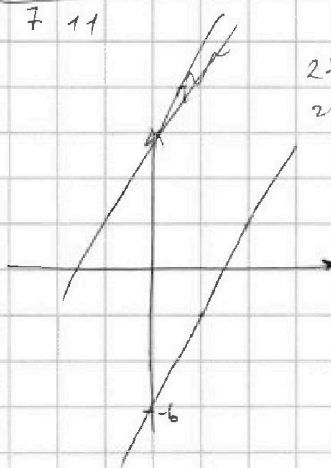
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} 12-12x=9 \\ (x^2+4x)^2 = a+2d \\ -6x^2 = a+6d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12-12x=9 \\ x^4+8x^3+16x^2+12x-12=2d \\ -6x^2=12-12x+6d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 2(2x+d) \\ d = x-1-x^2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x^4+8x^3+16x^2+12x-12+2x^2+2-2x \\ x^4+8x^3+18x^2+10x-10=0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^2(x+4)^2+12-12x+2x^2+2-2x \\ \Leftrightarrow x^2(x+4)^2+2(x^2-4x+4)=0 \end{aligned}$$

	1	8	18	10	-10
-1	1	7	11		



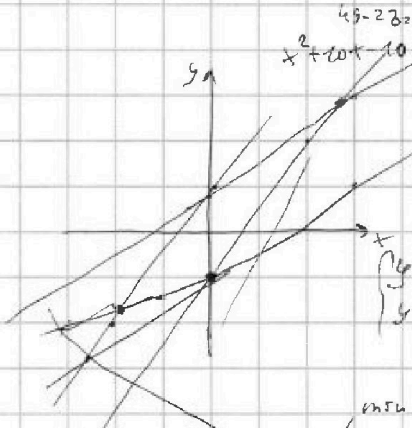
$$2x-3y \leq 6$$

$$y \geq \frac{2x-6}{3}$$

$$3x-2y \leq 4$$

$$y \geq \frac{3x-4}{2}$$

$$\begin{cases} 12-12x \leq 9 \\ 12-12x \leq 6 \end{cases}$$



$$10x+5y=20$$

$$y \geq -2x + \frac{4}{5}$$

$$\begin{cases} y = \frac{2}{3}x - 2 \\ y = \frac{3}{2}x + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9x - 12 = 4x + 12 \\ 5x = 24 \\ x = \frac{24}{5} \\ y = \frac{3}{2} \cdot \frac{24}{5} + 2 = \frac{36}{5} + 2 = \frac{52}{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2(x+4)^2 = a+2d \\ 12-12x+2d \end{cases}$$

$$x^2(x+4)^2 = 12-12x+2d \Rightarrow x^2(x+4)^2 + 2x^2 + 8x - 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^4+8x^3+18x^2+10x-8=0$$

	1	8	18	10	-8
-1	1	7	11		
-2	1	6	6	-4	0
-2	1	4	-2	0	

$$x^2+4x-2=0 \Rightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{16+8}}{2}$$

$$\begin{aligned} & \frac{24}{5}, \frac{52}{5} \\ & \left(\frac{24}{5}, \frac{52}{5} \right) \\ & -48 + 26 = -22 \end{aligned}$$