



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 9



1. [3 балла] Найдите все значения параметра t , при каждом из которых уравнение $x^2 + 2\sqrt{3}tx + 4t^2 - 4 = 0$ имеет два различных действительных корня, а их произведение положительно.
2. [4 балла] Натуральные числа a и b таковы, что их сумма равна 40, а значение выражения $a^2 - 2ab + b^2 + 15a - 15b$ равно $17p^5$, где p – некоторое простое число. Найдите числа a и b .
3. [5 баллов] На стороне BC треугольника ABC отмечены точки M и N так, что $BM = MN = NC$. Прямая, параллельная AN и проходящая через точку M , пересекает продолжение стороны AC за точку A в такой точке D , что $AB = CD$. Найдите AB , если $BC = 12$, $\cos(2\angle CEM) = -\frac{1}{4}$.
4. [5 баллов] В классе для занятий иностранным языком стоят три ряда парт, в каждом из которых по три парты, расположенных друг за другом. Парты рассчитана на одного человека. Школьник хорошо видит доску в любом из следующих случаев (и только в них):
 - он сидит на первой парте в ряду,
 - ближайшая парта перед ним пуста,
 - за ближайшей партой перед ним сидит ученик меньшего роста.

Сколькими способами можно рассадить в классе 8 учеников группы так, чтобы всем было хорошо видно доску, если известно, что все школьники разного роста? Ответ дайте в виде числа или выражения, содержащего не более двух слагаемых (в слагаемые могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

5. [5 баллов] Продолжение сторон BC (за точку C) и AD (за точку D) вписанного в окружность четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке E . Центр O окружности, вписанной в треугольник ABE , лежит на отрезке CD . Найдите наименьшее возможное значение суммы $ED + DO$, если известно, что $BE = 10$.
6. [4 балла] На острове расположено несколько деревень. Между некоторыми деревнями проложены дороги. Известно, что из любой деревни в любую другую можно добраться, причём по единственному маршруту. Также известно, что есть четыре деревни, из которых выходят 3, 4, 5 и 7 дорог соответственно, а из остальных деревень выходит ровно по одной дороге. Сколько деревень может быть на острове?
7. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел (x, y) , удовлетворяющие уравнению

$$\sqrt{2x + 2y - x^2 - y^2} + \sqrt{1 - |x + y - 2|} = 1.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Уравнение будет иметь 2 корня тогда когда его

$$\text{Дискриминант} \geq 0, \text{ т.е. } (25t)^2 - 4(4t^2 - 4) \geq 12t^2 - 16t + 16 > 0$$

$$16 - 4t^2 > 0$$

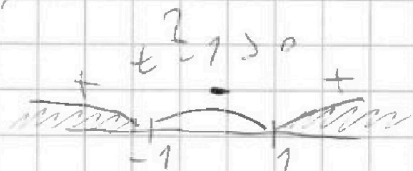
$$4 - t^2 > 0$$

$$(2 - t)(2 + t) > 0$$



$$\text{т.е. } t \in (-2; 2)$$

По т. Внета найдем значение корней от $4t^2 - 4$, но
условно оно должно быть > 0 , т.е. $4t^2 - 4 > 0$



$$\text{т.е. } t \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$$

Объединим два множества решений

$$\text{Получим ответ: } t \in (-2; -1) \cup (1; 2)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☒

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a^2 - 2ab + b^2 + 15a - 15b = (a-b)^2 + 15(a-b) = (a-b)(a-b+15) = 12p$$

Положим $40 = a+b > a-b$, и $40 = a+b > b-a$.

Заметим, что $a \neq b$ т.к. иначе $(a-b)(a-b+15) = 0 \neq 12p > 0$.

Пусть $a > b$. Мы знаем, что $(a-b)(a-b+15) = 12$.

12 разное значит $a-b: 12$ или $a-b+15: 12$

если $a-b: 12$, то $a-b \neq 12$ $a-b=12$ или $a-b=36$, т.к.

$40 > a-b > b$.

$$\begin{cases} a-b=12 \\ a+b=40 \end{cases} \Rightarrow a=\frac{52}{2} \text{ не целое число}$$

$$\begin{cases} a-b=36 \\ a+b=40 \end{cases} \Rightarrow a=38 \text{ Тогда: } 38 \cdot (38+15) = 12p$$

~~12p~~ $2 \cdot 49 = p$

если $a-b+15: 12$, то $a-b+15=12$ или $a-b+15=36$ или $a-b+15=57$

т.к. $55 > a-b+15 > 15$

$$\begin{cases} a-b=2 \\ a+b=40 \end{cases} \Rightarrow a=21 \text{ Тогда } 2 \cdot (2+15) = 12p$$

~~12p~~ $p=2$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☒

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} a-b = -15 \\ a+b = 40 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{25}{2} \text{ противоречие}$$

Получили только 1 решение $a=4, b=36, p=2$
Ответ: $a=4, b=36$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} a-b=15 \\ a+b=40 \end{cases} \Rightarrow a=\frac{55}{2} \text{ - противоречие}$$

$$\begin{cases} a-b=36 \\ a+b=40 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} a=38 \\ b=2 \end{matrix} \text{ Проверка: } 36 \cdot (36+15)=1296 \\ 2 \cdot 2=4$$

~~1296 = 1296~~ - противоречие.

Пусть $b > a$. ~~Получим, что если между $b-a=15$, то~~
~~еще будет другим скачком~~

если $a-b=17$

п.к. $40 > b-a > 0$, то $0 > a-b > 40$. Значит $a-b=-17$

$$\begin{cases} a-b=-17 \\ a+b=40 \end{cases} \Rightarrow a=\frac{23}{2} \text{ - противоречие}$$

$$\begin{cases} a-b=-34 \\ a+b=40 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} a=3 \\ b=37 \end{matrix} \text{ Проверка: } -34(-34+15)=-1296 \\ 2 \cdot 17=34$$

~~1296 = 1296~~ - не противоречие.

если $a-b+15=17$, п.к. $15 > a-b+15 > -25$, то $a-b+15=-17$

$$\begin{cases} a-b=-32 \\ a+b=40 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} a=4 \\ b=36 \end{matrix} \text{ Проверка: } -32(-32+15)=-1296 \\ 4 \cdot 4=16$$

~~1296 = 1296~~ - не противоречие.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☒

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

2-ой: за g человек не сидит, h человек;

3-ий: за h человек не сидит, g человек;

4-ий: за h человек не сидит, g человек;

Поскольку рассадит 10-го человек.

Рассадит за 1-ый раз - выберем человека g из 10 человек
Рассадит единственного h $C_{10}^2 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{6} = 56$

Рассадит за 2-ой раз - выберем человека g из 5 человек
Рассадит единственного h $C_5^2 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{6} = 10$

Рассадит за 3-ий раз - выберем человека g из 3 человек.

В 4-ый раз уже будут сидеть 2 человека (3 человека).

Выбором одного человека $C_3^2 = \frac{3 \cdot 2}{2} = 3$ человек и 10-го

человека - $4 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 3 = 336$. Поскольку в 4-ый раз

уже будут сидеть 3 человека

которые можно рассадить единственным способом $C_3^3 =$

$= \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{6} = 1$ человек - 1 способ.

Итого: $56 + 10 + 3 + 1 = 70$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☒

6
☐

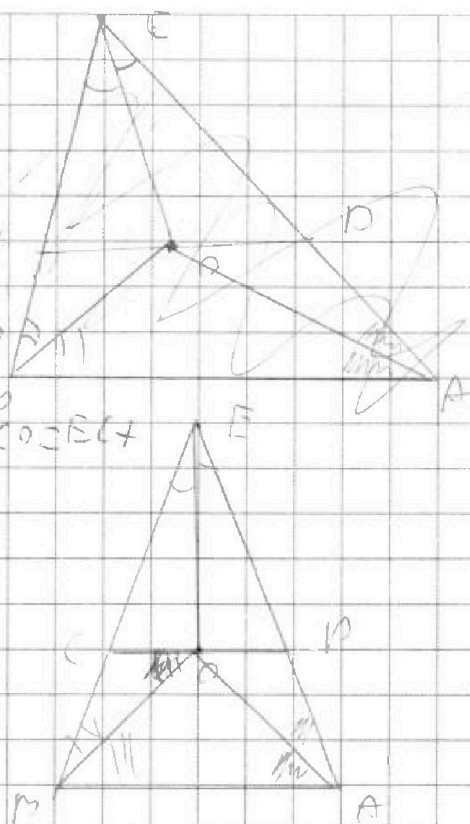
7
☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Зависимость достигается когда
треугольник равнобедрен. т.к. тогда
ABCD - равнобедренный треугольник и
CD // AB и $\angle CBA = \angle CAB = \angle CDB$
Значит $CB = CD$ и $ED + DC = EC + CD = EC + CB = EB = 10$.





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Рассмотрим граф, где деревья это вершины, а
дуги ребра, т.к. каждая дуга единственна, то
есть вершина степени ≤ 1 ребро, т.е. из этих
ребер нет.

Вершины степени 1 не могут быть соединены
друг с другом, т.к. иначе они образуют
компоненту связности которая не соединена с
другими вершинами.

Заметим, что в нашей графе нет циклов иначе
существовали бы вершины в цикле между
которыми 2 пути, т.е. наш граф дерево и в нём
 k вершин, а значит $k-1$ ребро. С другой стороны
есть 4 вершины степени 3, 4, 5, 7 и $k-4$ степени 1.
Значит всего ребер $3+4+5+7+k-4 = 15+k$, но т.к.
граф дерево в нём $k-1$ ребро т.е.

$$\frac{15+k}{2} = k-1 \Rightarrow 15+k = 2k-2 \Rightarrow k = 17.$$



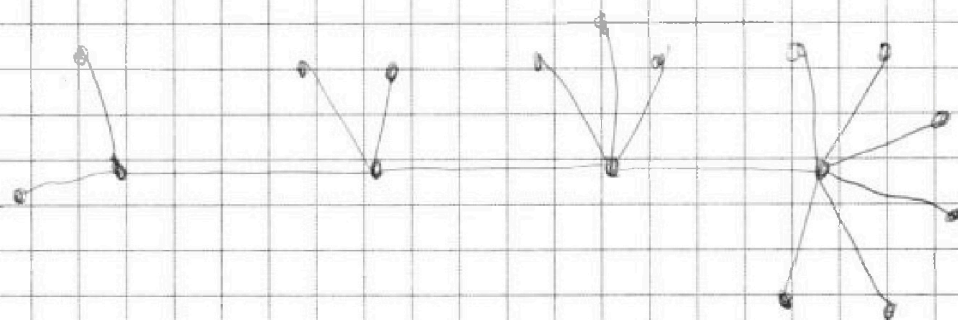
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пример на 17:



Видно, что от удовлетворяет условию и
т.к. от дерева, то для любого 7-го вершин
попарно единичный.

Ответ: 17



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

т.к. x и y целые то выражение $2x+2y-x^2-y^2$ и
 $1-|x+y-2|$ также целые, но каждое из них ≥ 0 .
 т.к. корни нельзя извлечь из отрицательных
 чисел. ~~то~~ каждое выражение также ≤ 1 т.к.
 иначе корни из числа больше 1 также были бы 1.
~~то~~ ^{т.к.} каждое из выражений ≥ 0 и тогда
 сумма этих двух > 1 , а по условию равна 1.
 Тогда каждое из заданных выражений равно 1.
 При этом из них равно 1 может быть 0, а второе из них
 1.

$$\begin{cases} 2x+2y-x^2-y^2=0 \\ 1-|x+y-2|=1 \end{cases} \quad \begin{cases} 2(x+y)=x^2+y^2 \\ |x+y-2|=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2+y^2=2 \cdot 2=4 \\ x+y=2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x &= 2-y \\ y^2 + (2-y)^2 &= 4 \end{aligned}$$

$$y^2 - 4y + 4 = 4$$

$$\begin{aligned} y^2 - 4y &= 0 \Rightarrow y=2 \Rightarrow x=0 \\ y^2 - 4y &= 0 \Rightarrow y=0 \Rightarrow x=2 \end{aligned}$$

Подставляя найденные $(2;0)$ и $(0;2)$
 в первое уравнение можно убедиться
 что они подходят.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} 2x+2y-x^2-y^2=1 \\ 1-|x+y-2|=0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x+2y=x^2+y^2+1 \\ |x+y-2|=1 \Rightarrow \begin{cases} x+y-2=1 \Rightarrow x+y=3 \\ x+y-2=-1 \Rightarrow x+y=1 \end{cases} \end{cases}$$

1. $x+y=3 \Rightarrow x=3-y$

$$2(x+y)=x^2+y^2+1$$

$$5=(3-y)^2+y^2+1$$

$$5=(3-y)^2+y^2$$

$$2y^2-6y+5=5$$

$$2y^2-6y+4=0$$

$$y^2-3y+2=0$$

$$y=1 \text{ и } x=2$$

$$y=2 \text{ и } x=1$$

или попарно квадраты

или

2. $x+y=1 \Rightarrow x=1-y$

$$2(x+y)=x^2+y^2+1$$

$$2=(1-y)^2+y^2+1$$

$$1=(1-y)^2+y^2$$

$$10^{-1}y^2+1=1$$

$$y^2-2y=0$$

$$y^2-2y=0$$

$$\checkmark$$

$$y=1 \text{ и } x=0$$

$$y=0 \text{ и } x=1$$

или попарно квадраты

$$\text{Ответ: } (2,0); (0,2); (2,1); (1,2); (0,1); (1,0)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Handwritten solutions and diagrams on grid paper.

Top left: $9 \cdot 6 - 56$, 6 , 1 , 2 , $10 - 6 \cdot 2 +$, 10 .

Top right: $94 \cdot 42$, $329 - 110 = 219$.

Middle left: $a_1 > a_2$, $100 + 22$, 10 .

Middle right: $h = \frac{1}{\sqrt{11}}$, $9 \cdot 2 = 18$, $18 - \frac{1}{2} = 17.5$.

Bottom left: $100 - 2 \cdot 2 \cdot 2 = 96$, $100 - 2 \cdot 2 \cdot 2 = 96$, $100 - 2 \cdot 2 \cdot 2 = 96$.

Bottom right: $100 - 2 \cdot 2 \cdot 2 = 96$, $100 - 2 \cdot 2 \cdot 2 = 96$, $100 - 2 \cdot 2 \cdot 2 = 96$.

Diagrams include circles, triangles, and geometric constructions.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

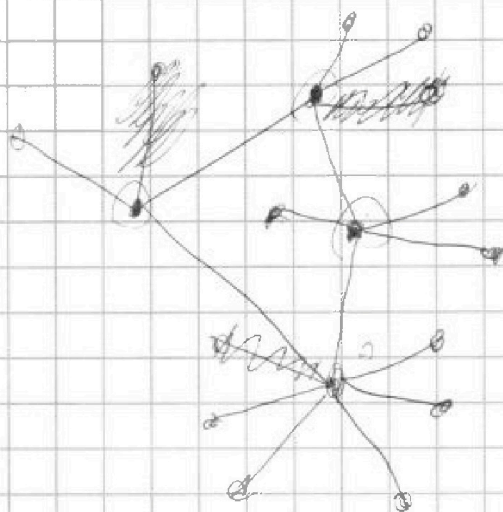
5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



1 2 3

1 2 3

$$K + 4.$$

$$K + 3 = \frac{10 + K}{2}$$

$$K + 3 = 10 + K$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$x^2 + 2\sqrt{3}x + 4x^2 - 4 = 0$$

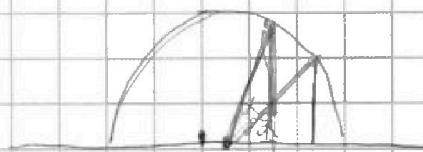
$$\cos 2\alpha$$

$$4t^2 - 4 > 0$$

$$t^2 > 1 > 0$$

$$(t-1)(t+1)$$

$$t \in (-\infty; -1); (1; \infty)$$



$$\sin - \beta$$

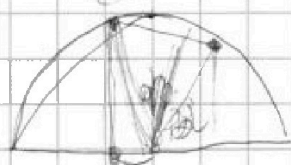
$$\cos - \alpha$$

$$D = 12t^2 - 16t + 16 = 16 - 4t^2$$

$$(a-t)(a+t)$$

$$\frac{-2}{1}$$

$$(\cos \beta - \cos \alpha) + (\sin \beta - \sin \alpha) = a(1 - \cos \alpha)$$



$$a - 9ab + b + 15a - 15b$$

$$(a-b)^2 + 15(a-b)$$

$$(a-b)(a-b+15) = 15a^2$$

$$a-b=0$$

$$a-b=12$$

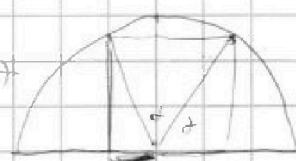
$$a-b=34$$

$$a+b=40$$

$$\cos 2\alpha = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

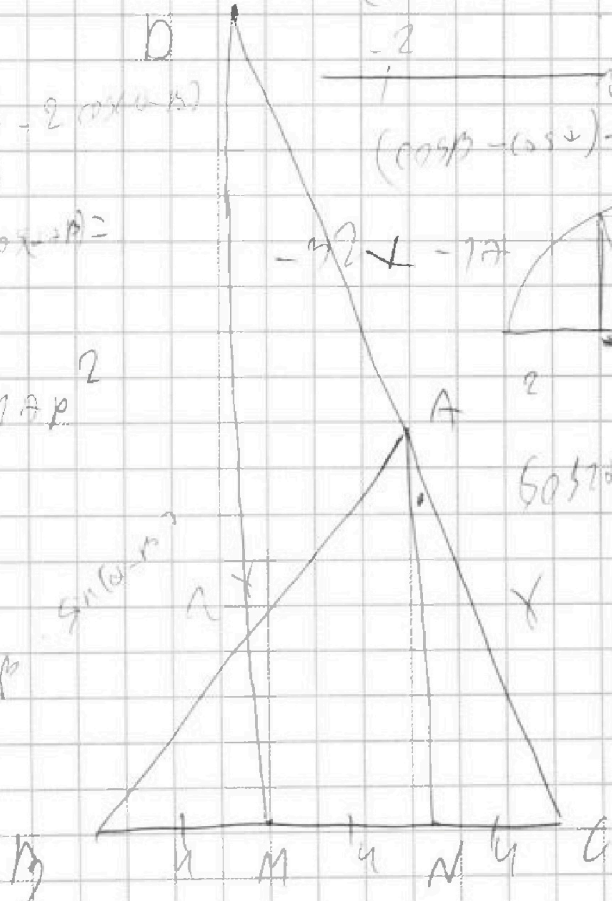
$$D = 16 - 4t^2$$

$$-42 \times 17$$



$$a$$

$$\cos 2\alpha + \cos 2\beta$$





На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

