МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^6 3^{13} 5^{11}$, bc делится на $2^{14} 3^{21} 5^{13}$, ac делится на $2^{16} 3^{25} 5^{28}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC. Окружность, касающаяся прямой AC в точке A, пересекает высоту CD, проведённую к гипотенузе, в точке E, а катет BC – в точке F. Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1{,}4$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF.

3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система уравнений

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5, \quad \text{и} \quad \log_{11}^4 (0{,}5y) + \log_{0{,}5y} 11 = \log_{0{,}125y^3} \left(11^{-13}\right) - 5.$$

Найдите все возможные значения произведения xy.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-15;90)$, $Q(2;90)$ и $R(17;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K, лежащей на отрезке AM. Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q. Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 180, $SA = BC = 20$.

   а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1.

   б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N, $SN = 6$, а радиус сферы Ω равен 8.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
X						

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1

$a, b, c \in \mathbb{N}$ $\quad ab \vdots 2^6 3^{13} 5^{11}$; $bc \vdots 2^{14} 3^{21} 5^{13}$; $ac \vdots 2^{16} 3^{25} 5^{28}$

Пусть $v_p(x)$ - наибольшая степень вхождения простого числа p в разложение числа x на простые множители $(x \in \mathbb{N})$

По свойству степеней: $v_p(ab) = v_p(a) + v_p(b)$

$$\begin{cases} v_2(a) + v_2(b) \geq 6 & (1) \\ v_2(b) + v_2(c) \geq 14 & (2) \\ v_2(a) + v_2(c) \geq 16 & (3) \end{cases}$$

$\frac{(1) + (2) + (3)}{2}$: $v_2(a) + v_2(b) + v_2(c) \geq 18$

Оно достигается при: $v_2(a) = 2$; $v_2(b) = 4$; $v_2(c) = 12$

$\min v_2(abc) = 18$

Аналогично для 3:

$$\begin{cases} v_3(a) + v_3(b) \geq 13 \\ v_3(b) + v_3(c) \geq 21 \\ v_3(a) + v_3(c) \geq 25 \end{cases}$$

$v_3(a) + v_3(b) + v_3(c) \geq \frac{59}{2}$, но т.к. $v_3(x)$ - натуральное, то

$v_3(a) + v_3(b) + v_3(c) \geq 30$

Достигается при $v_3(a) = 5$; $v_3(b) = 9$; $v_3(c) = 16$

$\min v_3(abc) = 30$

Для 5:

$$\begin{cases} v_5(a) + v_5(b) \geq 11 \\ v_5(b) + v_5(c) \geq 13 \\ v_5(a) + v_5(c) \geq 28 & (4) \end{cases}$$

Из (4) и $v_5(b) \geq 0$:

$v_5(a) + v_5(b) + v_5(c) \geq 28$

Достигается: $v_5(a) = 14$; $v_5(b) = 0$; $v_5(c) = 14$

$\min v_5(abc) = 28$

Тогда минимальное $abc = 2^{18} 3^{30} 5^{28}$

Ответ: $2^{18} 3^{30} 5^{28}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№3

$$10\arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$$

$$\arccos(\sin x) = \frac{9\pi}{10} - \frac{x}{5} \qquad ОДЗ: \begin{cases} \frac{9\pi}{10} - \frac{x}{5} \in [0; \pi] \\ \sin x \in [-1; 1] \end{cases}$$

$$\sin x = \cos\left(\frac{9\pi}{10} - \frac{x}{5}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{9\pi}{10} + \frac{x}{5}\right) = \sin\left(\frac{x}{5} - \frac{2\pi}{5}\right)$$

$$\left[\begin{array}{l} x + 2\pi k = \frac{x}{5} - \frac{2\pi}{5} \\ \pi - x + 2\pi n = \frac{x}{5} - \frac{2\pi}{5} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x + 2\pi = 10\pi k \\ -6x + 2\pi = 10\pi n \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{2} + \frac{5\pi k}{2}, \ k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{7\pi}{6} + \frac{5\pi n}{3}; \ n \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

$$\frac{9\pi}{10} - \frac{x}{5} \in [0; \pi]$$

$$0 \le 9\pi - 2x \le 10\pi$$

$$-9\pi \le -2x \le \pi$$

$$-\frac{\pi}{2} \le x \le 4{,}5\pi$$

$$-\frac{\pi}{2} \le -\frac{\pi}{2} + \frac{5\pi k}{2} \le 4{,}5\pi$$

$$0 \le \frac{k}{2} \le 1; \ k \in \{0; 1; 2\}$$

$$-\frac{\pi}{2} \le \frac{7\pi}{6} + \frac{5}{3}\pi n \le \frac{9}{2}\pi$$

$$-3\pi \le 7\pi + 10\pi n \le 27\pi$$

$$-10\pi \le 10\pi n \le 20\pi$$

$$-1 \le n \le 2$$

$$n \in \{-1; 0; 1; 2\}$$

Ответ: $\left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{2} + \frac{5\pi k}{2}, \ k \in \{0; 1; 2\} \\ x = \frac{7\pi}{6} + \frac{5\pi n}{3}, \ n \in \{-1; 0; 1; 2\} \end{array}\right.$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

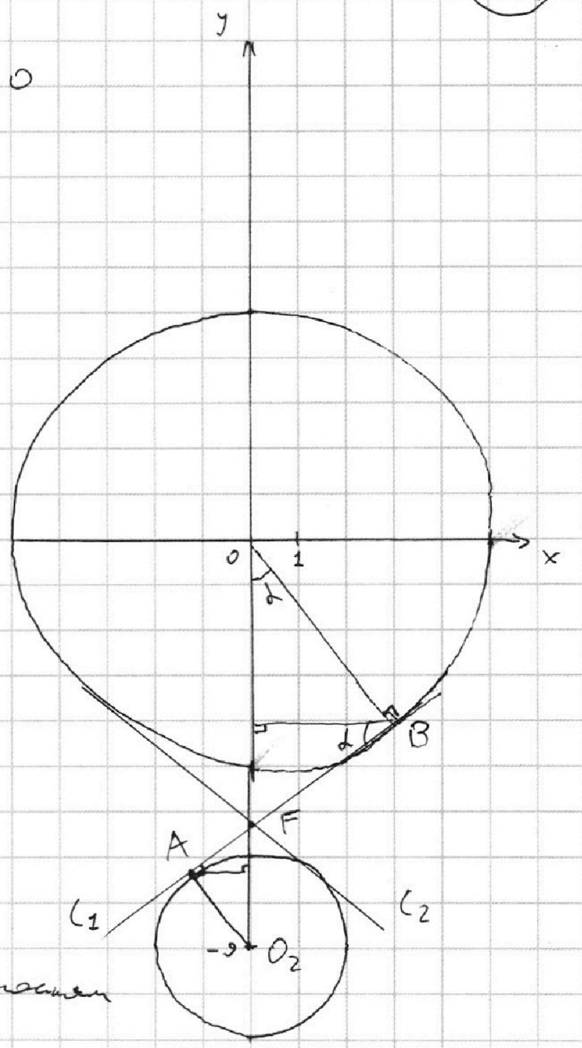
№4

$$\begin{cases} 5x+6ay-b=0 \\ (x^2+y^2-25)(x^2+y^2+18y+77)=0 \end{cases}$$

$\Updownarrow$

$$\begin{cases} 5x+6ay-b=0 & (1) \\ \left[\begin{aligned} &x^2+y^2=5^2 \\ &x^2+(y+9)^2=2^2 \end{aligned}\right. & (2) \end{cases}$$

Изобразим график совокупности (2)



(1): $5x+6ay-b=0$

$y=\frac{-5x}{6a}+\frac{b}{6a}$; Пусть $k=\frac{-5}{6a}$

Найдём такие k, что не существует 4 решения для системы ни при каких b

$k_{l_2} \le k \le k_{l_1}$

$k_{l_1}=tg\,\alpha=\frac{FB}{OB}$

l_1 - касательная к двум окружностям

$F=l_1 \cap O_y$; A и B - точки касания с окружностями

$\triangle FOB \sim FO_2A$, Пусть m - коэффициент подобия.

$m=\frac{OB}{O_2A}=2{,}5$; $m=\frac{OF}{FO_2}=2{,}5$; $OF+FO_2=9$; $OE=\frac{5}{7}\cdot 9$

$\triangle FOB$: По теореме Пифагора: $FB^2=OF^2-OB^2=5^2\left(\frac{81}{49}-1\right)$

$FB=5\sqrt{\frac{32}{49}}=\frac{20}{7}\sqrt{2}$; $k_{l_1}=\frac{4}{7}\sqrt{2}$. Видно, что график симметричен относительно O_y, тогда $k_{l_2}=-k_{l_1}=-\frac{4}{7}\sqrt{2}$

$-\frac{4}{7}\sqrt{2} \le \frac{-5}{6a} \le \frac{4}{7}\sqrt{2}$; $-\frac{24\sqrt{2}}{35} \le \frac{1}{a} \le \frac{24\sqrt{2}}{35}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№4

$-\frac{24\sqrt{2}}{35} \leq \frac{1}{a} \leq \frac{24\sqrt{2}}{35}$; $\left[\begin{array}{l} a \leq -\frac{35}{48}\sqrt{2} \\ a \geq \frac{35}{48}\sqrt{2} \end{array}\right.$

Тогда система может иметь ровно 4 решения

при $a \in \left(-\frac{35}{48}\sqrt{2}; \frac{35}{48}\sqrt{2}\right)$

Точка пересечения (1) с Oy — это точка с координатами $\left(0; \frac{b}{6a}\right)$, она однозначно задаётся значением b для каждого конкретного a, что найдётся такой b для каждого a.

Ответ: $\left(-\frac{35}{48}\sqrt{2}; \frac{35}{48}\sqrt{2}\right)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№6

Выразим уравнения прямых, задающих стороны параллелограмма

$OR: y=0$ $QR: \frac{y-0}{90} = \frac{x-17}{2-17}$; $y=-6x+102$

$PQ: y=90$ $OP: y_p = k(-15) = 90$; $k=6$; $y=-6x$

Все точки внутри параллелограмма удовлетворяют системе:

$$\begin{cases} y \ge 0 \\ y \le 90 \\ y \ge -6x \\ y \le -6x+102 \end{cases}$$

Пусть $A_1 = 6x_2 + y_2$; $B_1 = 6x_1 + y_1$

$A_1 - B_1 = 48$

Точки A и B лежат внутри $OPQR$, то их координаты удовлетворяют системе

$\begin{cases} y_1 \ge 0 \\ y_2 \ge 0 \end{cases}$; $\begin{cases} y_1 \le 90 \\ y_2 \le 90 \end{cases}$; $\begin{cases} y_1 + 6x_1 \ge 0 \\ y_1 + 6x_1 \le 102 \end{cases}$; $\begin{cases} y_2 + 6x_2 \ge 0 \\ y_2 + 6x_2 \le 102 \end{cases}$

$\begin{cases} 0 \le B_1 \le 102 \\ 0 \le A_1 \le 102 \end{cases}$; $A_1 - B_1 = 48$, то $B_1 \in [0; 54]$

$B_1 = 6x_1 + y_1$; $\underset{\vdots 6}{6x_1} = B_1 - y_1$; то $B_1 \equiv y_1 \pmod 6$

Если $B_1 \vdots 6$, то $y_1 \vdots 6$; $y_1 \le 90$, т.е. 16 вариантов y_1 для B_1; $B_1 \vdots 6$; $B_1 \in [0; 54] \rightarrow 10$ вариантов B_1

Для конкретного $B_1 \vdots 6$, есть уникальный $A_1 \vdots 6$, $y_2 \vdots 6$; $y_2 \le 90$

16 вариантов y_2 Итого: $10 \cdot 16^2$

Если $B_1 \equiv k \pmod 6$; $k \ne 0$, то $y_1 \equiv k \pmod 6$; $A_1 \equiv k \pmod 6$

45 вариантов $B_1 \rightarrow \frac{90}{6}$ вариантов для $y_1 \equiv k \pmod 6$

$\downarrow$

уникальный $A_1 \rightarrow \frac{90}{6}$ вариантов для $y_2 \equiv k \pmod 6$. Итого: $45 \cdot 15^2$

Ответ: 12685

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$-\frac{4}{7}\sqrt{2} \le -\frac{5}{6a} \le \frac{4}{7}\sqrt{2}$

$-\frac{24}{35}\sqrt{2} \le \frac{1}{a} \le \frac{24}{35}\sqrt{2}$

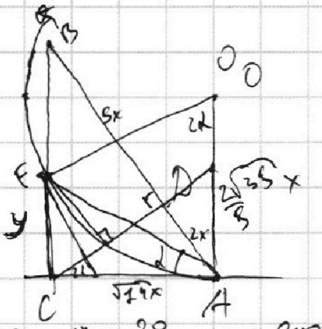
$-2 \le -\frac{1}{2} \le 2$

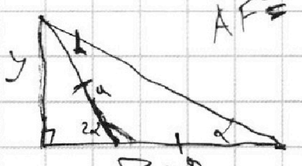
$-2 < -\frac{1}{2} < 2$

$\left[\begin{array}{l}\frac{1}{a} \ge -\frac{24}{35}\sqrt{2}\\ \frac{1}{a} \le \frac{24}{35}\sqrt{2}\end{array}\right.$

$a \ge \frac{35\cdot\sqrt{2}}{24\cdot 2}$

$a \le$



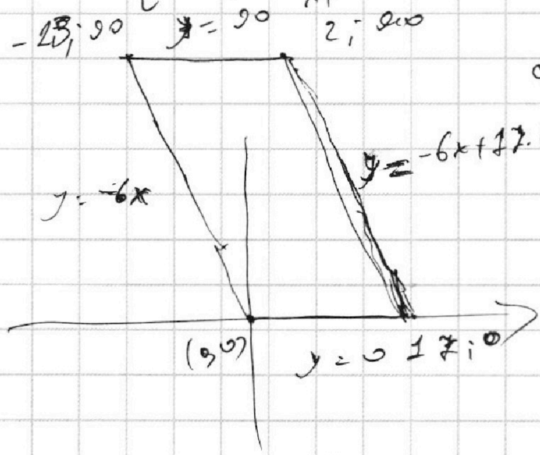


$AF^2 =$

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{y}{a}$

$a^2 = y^2 + (\sqrt{14}x - a)^2$

$y^2 + (\sqrt{14}x)^2 = 2a^2 - 2a^2$



$\frac{y-0}{90} = \frac{x-17}{-15}$

$\frac{y}{90} = \frac{-x}{15} + \frac{17}{15}$

$y = -6x + 17\cdot 6$

$y_1 \le -6x_1 + 17\cdot 6$

$y_1 \ge -6x_1$

$y_1 \ge 0$

$y_1 \le 90$

$y_2 + 6x_2 \ge 0$

$y_1 + 6x_1 \le 17\cdot 6 = 102$

$y_1 \in [0; 90]$

16

$A \ge 0$ $B \ge 0$

$A \le 102$ $B \le 102$

$A - B = 48$

$A \in [48; 102]$

$B \in [0; 54]$. 55 вар.

0, 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54

10

$B = y_1 + 6x_1$

$\boxed{6x_1} = B - y_1$

55 вар ↗ 55·15

K

$A_1 \Rightarrow y_1$.

10125 + 2560

12685

$225\cdot 45 + 2560$

$\frac{22500}{2} - 5\cdot 225 + 2560 = 11250 - 1125$

$55\cdot 15\cdot 15$

$15\cdot 45\cdot 15 + 10\cdot 16\cdot 16$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$ab : 2^{6} 3^{13} 5^{11}$; $bc : 2^{14} 3^{21} 5^{13}$; $ac : 2^{16} 3^{25} 5^{28}$ $a^2 b^2 c^2 : 2^{36} 3$

$a = pn$; $b = pm$ p-нод.

НОК $(a, b) = pmn$

$b : 2^{p} 3^{9} 5^{5}$

$v_2(a) + v_2(b) \ge 6$
$v_2(b) + v_2(c) \ge 14$
$v_2(c) + v_2(a) \ge 16$

$\cancel{13} \to 14$
$21 \; v_2(a) + v_2(b) + v_2(c) \ge 18$ 86
$25 \; 13 + 21 + 25 \ge 59$ 36

$v_2(a) = 2$ $v_2(b) = 4$ $v_2(c) = 12$
$v_3(a) = 0$ $v_3(b) = 14$ $v_3(c) = 21$
$(5, 9; 16)$

$10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$

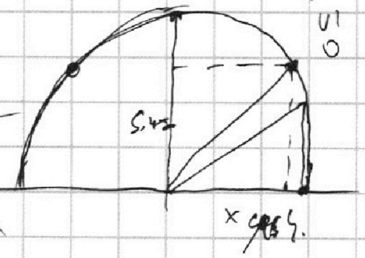
$\begin{cases} \sin x \ge 0 \\ \frac{9\pi - 2x}{10} \in [-1; 1] \end{cases}$

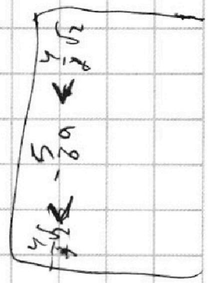
$D(\arccos x) = [0; \pi]$

$\sin x = \alpha$ $\arccos \alpha = \frac{9\pi - 2x}{10}$ $\cos\left(\frac{9\pi - 2x}{10}\right) = \sin x$

$\cos\alpha - \sin\beta =$

~~$\cos x \cos y$~~





$-10 \le 9\pi - 2x \le 10$

$-9\pi - 10 \le -2x \le 10 - 9\pi$

$\frac{9}{2}\pi - 5 \le x \le \frac{9}{2}\pi + 5$

$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$

$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{9\pi - 2x}{10}\right) = \sin x$

$\sin\left(\frac{2x - 4\pi}{10}\right) = \sin x$

$\sin\left(\frac{x - 2\pi}{5}\right) = \sin x$

$\left[\begin{array}{l} \frac{x - 2\pi}{5} = x + 2\pi k \\ \frac{x - 2\pi}{5} = \pi - x + 2\pi k \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} x - 2\pi = 5x + 10\pi k \\ x - 2\pi = 5\pi - 5x + 2\pi k \end{array}\right.$ $\Leftrightarrow$ $\left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{2} + \frac{5}{2}\pi k \\ x = \frac{7\pi}{6} + \frac{\pi}{3} n \end{array}\right.$

$x \ge \frac{9}{2}\pi - 5$

$x \le \frac{9}{2}\pi + 5$

$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$

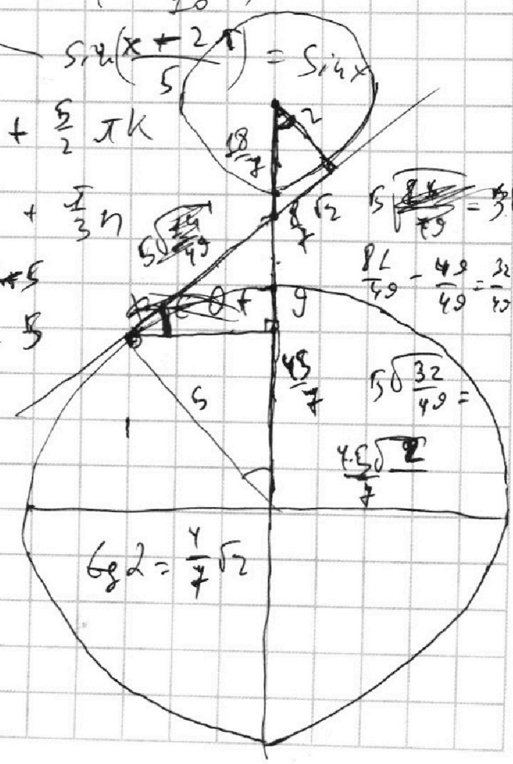
$(y^2 + 2 \cdot 9y + 81 - 4)$

$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0 \\ \left[\begin{array}{l} x^2 + y^2 = 25 \\ x^2 + (y + 9)^2 = 4 \end{array}\right. \end{cases}$

$-6ay = 5x - b$

$y = -\frac{5x}{6a} + \frac{b}{6a}$

$-\frac{5}{6a} = k$



$5\sqrt{\frac{2}{7}}$

$\frac{81}{49} - \frac{49}{49} = \frac{32}{49}$

$5\sqrt{\frac{32}{49}} =$

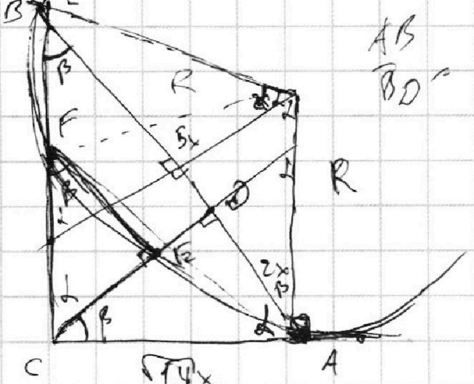
$\frac{4 \cdot 5\sqrt{2}}{7}$

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{7}\sqrt{2}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

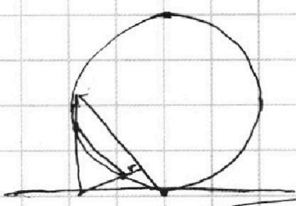
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$\frac{AB}{BD} = \frac{7}{5}$

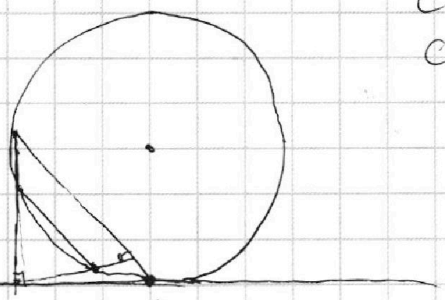
$$\begin{cases} \nu_5(a)+\nu_5(b)\geq 11 \\ \nu_5(b)+\nu_3(c)\geq 13 \\ \nu_5(a)+\nu_5(c)\geq 28 \ (3) \end{cases}$$



$CD^2 = 10x^2$

$CD = \sqrt{10}x$

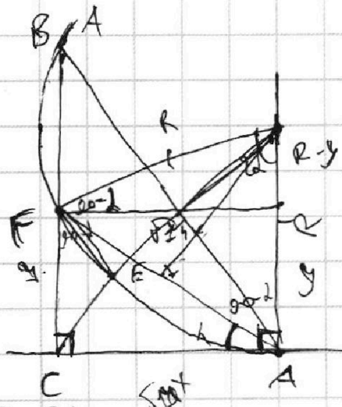
$\boxed{S_{ACD} = \sqrt{10}x^2}$

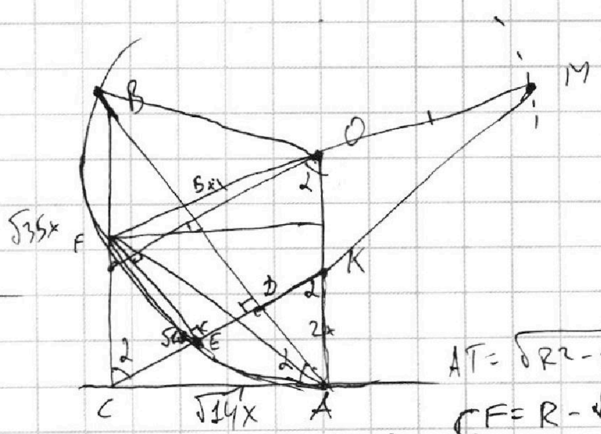


$AC = \sqrt{(10+4)x^2} = \sqrt{14}x$

$BC^2 = 49x^2 - 14x^2 = 35x^2$

$BC = \sqrt{35}x$





$14x^2 = CE\cdot EM$

$EM^2 + FE^2 = (2R)^2$

$CE\cdot EF = S_{CEF}$

$R^2 - R^2 - y^2 + 2Ry = 14x^2$

$AT = \sqrt{R^2-14x^2}$

$CF = R - \sqrt{R^2-14x^2}$

$AF^2 = 14x^2 + R^2 + R^2 - 14x^2 - 2R\sqrt{R^2-14x^2}$

$CD\cdot DK = AD^2 = 4x^2$

$\sqrt{10}x\cdot DK = 4x^2$

$DK = \frac{2}{5}\sqrt{10}x$

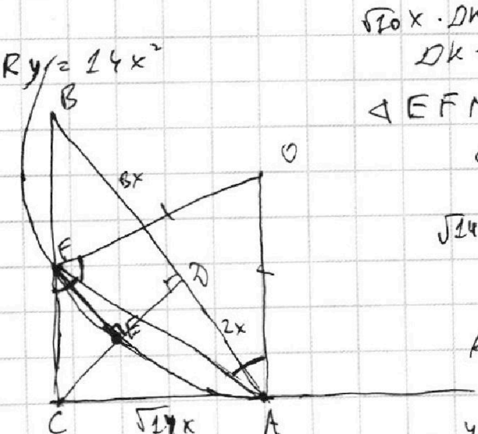
$\triangle EFM$ — MF — диаметр

$14x^2 =$

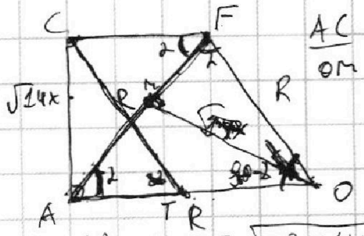
$\sin 2 = \cancel{\sqrt{\ldots}}$

$\sin 2 = \frac{\sqrt{14}x}{2\sqrt{R^2-14x^2}} =$

$S_{AFC} = \frac{CF}{BF}$



$\frac{AC}{OM} = \frac{AF}{R}$



$AM = MF = \sqrt{R^2-14x^2}$

$4R^2 - 4\cdot 14x^2 - 14x^2 = CF^2$