МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 12

1. [4 балла] Решите неравенство

$$\left|x^3-9\right|+\left|x^2-1\right| \leqslant \left|x^3-x^2-8\right|.$$

2. [4 балла] Сколько существует троек натуральных чисел $(a;b;c)$ таких, что они образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию, а их произведение abc равно $5^{360}\cdot 7^{90}$?

3. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x;y)$, удовлетворяющие уравнению

$$x^2(y-3)-x(11y-34)+32y-101=0.$$

4. [5 баллов] Вокруг треугольника ABC описана окружность Ω. Точки D и E – середины сторон AB и AC соответственно, CF – биссектриса угла C треугольника ABC. Прямые ED и CF пересекаются в точке G, принадлежащей Ω. Найдите углы треугольника ABC, если известно, что площадь треугольника BCF в 25 раз больше площади треугольника DGF.

5. [4 балла] На координатной плоскости нарисован квадрат, все вершины которого лежат на графике функции $y=-x^5+ax$. Известно, что одна из диагоналей квадрата лежит на прямой $y=2x$, а центр совпадает с началом координат. Найдите значение параметра a и сторону квадрата.

6. [5 баллов] Числа a, b и c не все равны между собой, и при этом

$$a+\frac{7}{b}=b+\frac{7}{c}=c+\frac{7}{a}.$$

Найдите максимально возможное значение произведения abc.

7. [6 баллов] Равнобедренный треугольник ABC $(AB=BC)$ вписан в окружность ω, а на дуге AC, не содержащей точку B, взяты точки E и D так, что отрезки AD и CE пересекаются в точке F. На лучах EA и DC отметили точки X и Y соответственно таким образом, что $AX=CF$ и $CY=AF$. Найдите площадь четырёхугольника $BXFY$, если $BF=19$, $XY=36$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№1

$a = x^3-9,\ b = x^2-1 \Rightarrow |x^3-9| + |x^2-1| = |a| + |b|$

$|x^3-x^2-8| = |a-b| \Rightarrow |a|+|b| \leq |a-b|$

1) $a \geq 0,\ b \geq 0$

I) $a \geq b$.

$a+b \leq a-b$

$2b \leq 0 \Rightarrow b=0.$

$x^2-1=0 \Rightarrow x=\pm 1$, но тогда $a<0$.

II) $a<b$.

$a+b \leq b-a$

$2a \leq 0 \Rightarrow a=0 \Rightarrow x=\sqrt[3]{9}$

$(\sqrt[3]{9})^2-1 \geq 0$

$\sqrt[3]{81} \geq 1$.

$81 \geq 1$, значит $x=\sqrt[3]{9}$, подходит

2) $a \geq 0,\ b<0$

$a-b \leq a-b \quad (a-b \geq 0)$

Но если $b<0$, то $x^2<1 \Rightarrow x\in(-1;1) \Rightarrow x^3-9<0$

$\Downarrow$

$a<0$

Продолжение задачи 1.

3) $a<0$, $b\geq 0$.

$-a+b \leq b-a$.

Если $a<0 \Rightarrow x^3-9<0 \Rightarrow x<\sqrt[3]{9}$, но т.к.
$b\geq 0 \Rightarrow x^2-1\geq 0 \Rightarrow x\in[1;+\infty)\cup(-\infty;-1]$. $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} x<\sqrt[3]{9} \\ x\in[1;+\infty)\cup(-\infty;-1] \end{cases} \Rightarrow x\in[1;\sqrt[3]{9})\cup(-\infty;-1]$$

4) $a<0$, $b<0$.

~~$-a-b$~~ I) $a\leq b$

$-a-b\leq b-a$.

$-2b\leq 0$, но $b<0$.

II) $a>b$.

$-a-b \leq a-b$

$-2a\leq 0$, на $a<0$.

Ответ: $x\in[1;\sqrt[3]{9}]\cup(-\infty;-1]$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№2

a, b, c

Т.к. это геометрическая прогрессия, то

$\frac{c}{b} = \frac{b}{a} \Rightarrow c = \frac{b^2}{a}$.

$abc = a \cdot b \cdot \frac{b^2}{a} = b^3 = 5^{360} \cdot 7^{90} \Rightarrow b = 5^{120} \cdot 7^{30}$

Т.к. c – натур., то $b^2 \vdots a \Rightarrow a = 5^p \cdot 7^q$, где $0 \leq p \leq 240$, $0 \leq q \leq 60$. $\Rightarrow$ значит есть 241 вариант для p и 61 вариант для q.

Ответ: $241 \cdot 61$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

[ ] [ ] [X] [ ] [ ] [ ] [ ]

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№3

$t = y - 3$

1) $t \neq 0$

$$x^2 t - x(11t - 1) + (32t - 5) = 0$$

$$D = 121t^2 - 22t + 1 - 4t(32t - 5) =$$

$$= 121t^2 - 22t + 1 - 128t^2 + 20t = -7t^2 - 2t + 1$$

Т.к. такое x существует $\Rightarrow D \geq 0 \Rightarrow -7t^2 - 2t + 1 \geq 0$.

$-7t^2 - 2t + 1 \geq 0$ (t лежит между корнями, т.к. парабола ~~выпуклая~~ ветвями вниз)

$$D = 4 + 4 \cdot 7 = 4 \cdot 8 = 32$$

$$t_{1,2} = \frac{2 \pm 4\sqrt{2}}{-14} = \frac{1 \pm \sqrt{2}}{-7} = -\frac{1 \pm \sqrt{2}}{7}$$

Т.к. y - целое, то и t - целое.

$$-\frac{1+\sqrt{2}}{7} > -1$$

$$\frac{1+\sqrt{2}}{7} < 1$$

$$\sqrt{2} < 6.$$

$$-\frac{1-\sqrt{2}}{7} < 1$$

$$\frac{1-\sqrt{2}}{7} > -1 \Leftrightarrow 1 - \sqrt{2} > -7 \Leftrightarrow \sqrt{2} < 8$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Значит, $-1 < t < 1 \Rightarrow$ и t - целое $\Rightarrow t=0$, но этот случай мы не рассматриваем.

2) $t=0$

$x-5=0 \Rightarrow x=5$.

Ответ: $(x=5;\ y=3)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

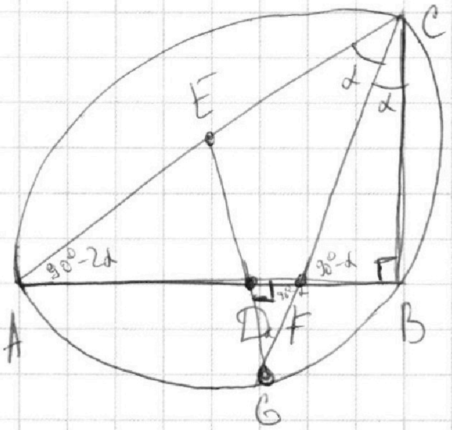
1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№4



Так как биссектриса пересекает описанную окружность, в той же точке, что пересекается с серединным перпендикуляром, то ED — сер. пер. к AB $\Rightarrow$

$\Rightarrow ED \perp AB$, т.к. ED — средняя линия, то $ED \parallel CB \Rightarrow \angle ABC = 90^\circ$. Пусть, $\angle ACF = \alpha$, тогда $\angle CAB = 90^\circ - 2\alpha$. Т.к. $ED \perp AB$, то ~~∠GB~~ $\angle GDB = 90^\circ$. $\angle CFB = \angle DFG = 90^\circ - \alpha$.

$\triangle GDF \sim \triangle CBF \Rightarrow BF = k \cdot FD$ (где k — коэффициент подобия) $\frac{S_{\triangle CBF}}{S_{\triangle GDF}} = k^2$ (по условию) $\Rightarrow$

$\Rightarrow k = 5 \Rightarrow BF = 5FD$. $AF = AD + DF = BD + DF =$
$= DF + FB + DF = 7FD$.

$$\frac{AF}{\sin\alpha} = \frac{CF}{\sin(90^\circ - 2\alpha)} = \frac{CF}{\cos 2\alpha} \Rightarrow AF = \frac{CF \cdot \sin\alpha}{\cos 2\alpha}$$

$$\frac{FB}{\sin\alpha} = \frac{CF}{\sin 90^\circ} \Rightarrow FB = CF \cdot \sin\alpha.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$\frac{AF}{FB} = \frac{\frac{CF \cdot \sin\alpha}{\cos 2\alpha}}{CF \cdot \sin\alpha} = \frac{1}{\cos 2\alpha} = \frac{7DF}{5DF} = \frac{7}{5} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \cos 2\alpha = \frac{5}{7} \Rightarrow$ т.к. $\cos 2\alpha > 0$, и $\alpha < 90°$

$\Rightarrow 2\alpha < 180°$, то $2\alpha = \arccos\frac{5}{7}$

Ответ: $\angle ABC = 90°$, $\angle ACB = \arccos\frac{5}{7}$,

$\angle CAB = 90° - \arccos\frac{5}{7}$

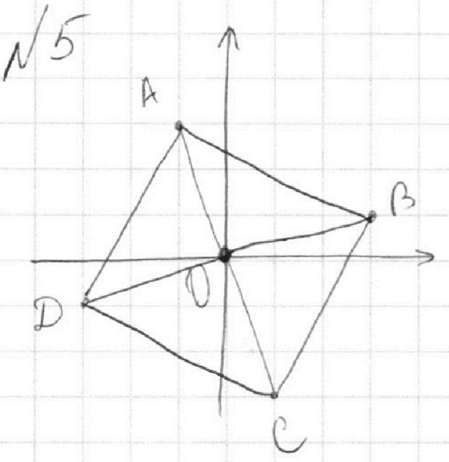
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№5



Пусть $A(p;q)$, тогда C как центрально противоположная имеет координаты $C(-p;-q)$

Аналогично $B(k;l)$ и $D(-k;-l)$

(если $p<0$ или $k<0$, то переобозначим точки)

1) AC на $y=2x$, т.к. $AC \perp BD$, то BD на

$y=\frac{-1}{2}x$

$q=2p, \quad l=\frac{-1}{2}k$

$y=-x^5+ax$	$y=-x^5+ax$
подставим A	подставляем B
$q=-p^5+ap$	$l=-k^5+ak$
$2p=-p^5+ap$	$-\frac{1}{2}k=-k^5+ak$
$2=-p^4+a$	$-\frac{1}{2}=-k^4+a$
$p^4=a-2$	$k^4=a+\frac{1}{2}$

Т.к. $ABCD$ — квадрат, то $AC^2=BD^2$

$AC^2=4p^2+4q^2=20p^2$; $BD^2=4k^2+4l^2=5k^2$

$5k^2=20p^2 \Rightarrow k^2=4p^2 \Rightarrow k^4=16p^4 \Rightarrow a+\frac{1}{2}=16a-32$

$15a=32+\frac{1}{2} \Rightarrow 15a=\frac{65}{2} \Rightarrow a=\frac{13}{6}$.

$AB^2=(k-p)^2+(q-l)^2$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$k>0, p>0 \Rightarrow k=2p$ (из $k^2=4p^2$).

$q=2p, \quad l=-\frac{1}{2}k=-p.$

$AB^2=p^2+9p^2=10p^2=10\sqrt[2]{p^4}=10\sqrt[2]{\frac{13}{6}-2}=$

$=10\sqrt[2]{\frac{1}{6}}=\frac{10}{\sqrt[2]{6}}=\frac{10\sqrt[2]{6}}{6}=\frac{5\sqrt{6}}{3}.$

2) BD на $y=2x$. Аналогично предыдущему случаю.

Ответ: $a=\frac{13}{6}$, сторона квадрата $-\sqrt{\frac{5\sqrt{6}}{3}}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№6

$$a+\frac{7}{b}=b+\frac{7}{c}=c+\frac{7}{a},\quad a\neq 0,\ b\neq 0,\ c\neq 0.$$

1) $a=b$.

$$a+\frac{7}{a}=a+\frac{7}{c}\Rightarrow a=c=b.$$ Противоречие.

2) $a\neq b$.

$$a+\frac{7}{b}=b+\frac{7}{c}$$

$$a-b=\frac{7}{c}-\frac{7}{b}\Rightarrow a-b=\frac{7(b-c)}{bc}\Rightarrow b-c=\frac{(a-b)bc}{7}$$

$$b+\frac{7}{c}=c+\frac{7}{a}$$

$$b-c=\frac{7(c-a)}{ac}\Rightarrow c-a=\frac{(b-c)ac}{7}$$

$$c-a=\frac{(b-c)ac}{7}=\frac{(a-b)abc^2}{49}$$

$$c+\frac{7}{a}=a+\frac{7}{b}$$

$$c-a=\frac{7(a-b)}{ab}\Rightarrow\frac{(a-b)abc^2}{49}=\frac{7(a-b)}{ab}\xRightarrow{(\text{т.к. } a\neq b)}$$

$$\Rightarrow\frac{abc^2}{49}=\frac{7}{ab}\Rightarrow a^2b^2c^2=343\Rightarrow \max abc=\sqrt{343}$$

Пример: $a=-2\sqrt{7},\ b=\sqrt{7},\ c=\frac{-\sqrt{7}}{2}$

$abc=\sqrt{343}$.

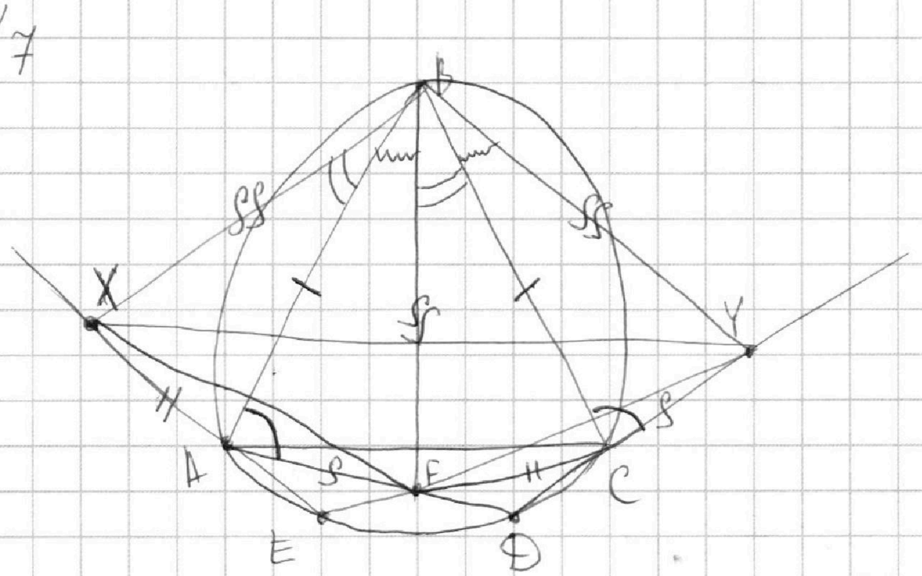
$$a+\frac{7}{b}=b+\frac{7}{c}=c+\frac{7}{a}=-\sqrt{7}.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№7



$AB = BC$, $AX = CF$, $CY = AF$

$\angle BCY = 180^\circ - \angle FCB = 180^\circ - (180^\circ - \angle BAF) = \angle BAF$

$\Downarrow$

$\triangle BAF = \triangle BCY \Rightarrow BF = BY$

$\angle XAB = \angle FCB$ (аналогично) $\Rightarrow \triangle XAB = \triangle BFC$

$\Downarrow$

$BX = BF$

~~$\angle FBC = \angle ...$~~

Т.к. $\triangle XAB = \triangle BFC \Rightarrow \angle XBA = \angle FBC$

$\triangle ABF = \triangle CBY \Rightarrow \angle ABF = \angle CBY$.

Пусть $\angle XBY = 2\beta$, тогда по теореме косинусов

$XY^2 = BX^2 + BY^2 - 2\cos 2\beta \cdot BX \cdot BY$

$XY = 36$, $BX = BY = BF = 19$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$36^2 = 19^2 + 19^2 - 2\cdot\cos 2\beta \cdot 19^2$

$36^2 = 19^2(2 - 2\cos 2\beta)$

$\left(\frac{36}{19}\right)^2 = 2 - 2\cos 2\beta$

$2\cos 2\beta = 2 - \left(\frac{36}{19}\right)^2$

$2 - \frac{36^2}{19^2} = \frac{2\cdot 19^2 - 36^2}{19^2} = \frac{2\cdot 361 - 1296}{19^2} = \frac{-574}{19^2}$

$\cos 2\beta = \frac{-287}{19^2}$

$\cos 2\beta = 1 - 2\sin^2\beta$.

$1 - 2\sin^2\beta = \frac{-287}{19^2}$

$2\sin^2\beta = 1 + \frac{287}{19^2}$

$2\sin^2\beta = \frac{648}{361}$

$\sin^2\beta = \frac{324}{361}$; т.к. $\beta < 90^\circ$, то $\sin\beta > 0$.

$\sin\beta = \frac{18}{19}$.

$S_{\triangle XBF} = S_{\triangle YBF} = \frac{1}{2}\cdot XB\cdot BF\cdot\sin\beta = \frac{1}{2}\cdot 19^2\cdot\frac{18}{19} =$

$= \frac{18\cdot 19}{2}$

$S_{BXFY} = S_{\triangle XBF} + S_{\triangle YBF} = \frac{18\cdot 19}{2} + \frac{18\cdot 19}{2} = 18\cdot 19 = 342.$

Ответ: 342.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$a+\frac{7}{b}=b+\frac{7}{c}=c+\frac{7}{a}$; max abc

1) ~~$a\neq b, a\neq c, b\neq c$~~

$a-b=\frac{7}{c}-\frac{7}{b}$ $\quad a^2b^2c^2=343$

$a-b=7\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{b}\right)$ $\quad abc=\sqrt{343}=\sqrt[2]{7^3}$

$a-b=7\left(\frac{b-c}{bc}\right)$ $\quad$ 2) $a=b$

$b-c=\frac{(a-b)bc}{7}$ $\quad a+\frac{7}{b}=b+\frac{7}{c}$

$\frac{7}{b}=\frac{7}{c}$

$b+\frac{7}{c}=c+\frac{7}{a}$ $\quad b-c=\frac{(a-b)\cdot\frac{\sqrt{343}}{a}}{7}$ $\quad b=c=a.$

$b-c=\frac{7}{a}-\frac{7}{c}$ $\quad b-\frac{\sqrt{343}}{ab}=\frac{(a-b)\sqrt{343}}{7a}$

$\frac{(a-b)bc}{7}=\frac{7}{a}-\frac{7}{c}$ $\quad ab^2-\sqrt{343}=b(a-b)\sqrt{7}$

$=7\cdot\frac{c-a}{ac}$

$a=1,\ b=\sqrt[2]{7},\ c=7$

$a+\frac{7}{b}=1+\sqrt[2]{7}$

$c-a=\frac{(a-b)abc^2}{49}$ $\quad c-a=\frac{(a-\sqrt{7})\sqrt{343}\cdot c}{49\sqrt{7}}$

$b+\frac{7}{c}=\sqrt[2]{7}+1$

$\sqrt{7}(c-a)=c(a-\sqrt{7})$

$a+\frac{7}{b}=c+\frac{7}{a}$ $\quad c+\frac{7}{a}=14.$ $\quad b=\sqrt{7}$

$c\sqrt{7}-a\sqrt{7}=ac-c\sqrt{7}$

$c-a=\frac{7}{b}-\frac{7}{a}$ $\quad a^2b^2c^2=343$

$\frac{\cancel{(a-b)}abc^2}{49}=7\cdot\frac{\cancel{a-b}}{ab}$ $\quad ab^2-\sqrt{343}=ab\sqrt{7}-b^2\sqrt{7}$

$ab^2+b^2\sqrt{7}=ab\sqrt{7}+\sqrt{343}$

$\frac{abc^2}{49}=7\cdot ab$ $\quad b^2(a+\sqrt{7})-b\cdot a\sqrt{7}-\sqrt{343}=0.$

$2c\sqrt{7}=ac+a\sqrt{7}$ $\quad 2c\sqrt{7}=7+a\sqrt{7}$

$2c=\sqrt{7}+a.$

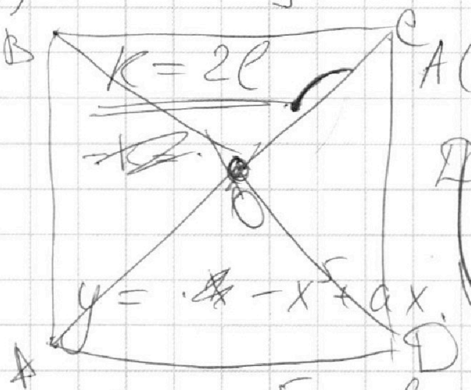
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

1) $BD \to y = 2x$



$A(-l; 2l)$ $B(l; 2l)$ $C(l; -2l)$
$D(-l; -2l)$

B: $2l = -l^5 + al$

$2 = -l^4 + a$

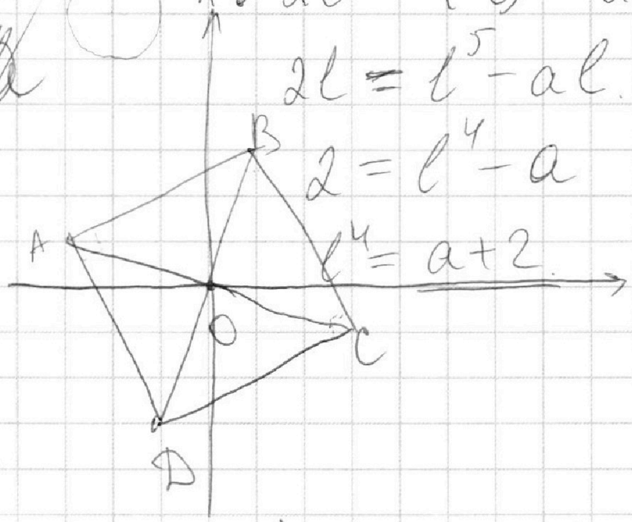
$l^4 = a - 2$

A: $2l = -(-l)^5 - al$

$2l = l^5 - al$

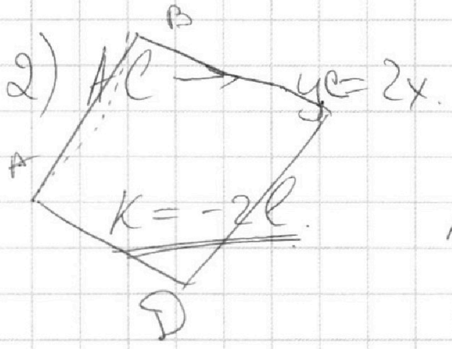
$2 = l^4 - a$

$l^4 = a + 2$



$a - 2 = a + 2$

2) $AC \to y = 2x$



$A(-l; -2l)$ $B(l; -2l)$
$C(l; 2l)$ $D(-l; 2l)$

$y = -x^5 + ax$

C: $2l = -l^5 + al$

$2 = -l^4 + a$

$l^4 = a - 2$

B: $-2l = -l^5 + al$

$-2 = -l^4 + a$

$l^4 = -a - 2$

$a - 2 = -a - 2$

$\underline{a = 0}$

D: $2l = l^5 - al \Rightarrow l^5 = 2l + al \Rightarrow l^4 = a + 2$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$y = 3$

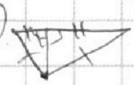
$-x(33-34) + 96 - 101 = 0$

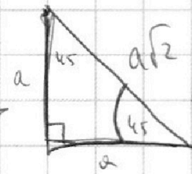
$x - 5 = 0$

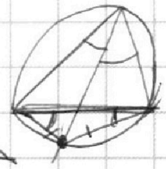
$x = 5$

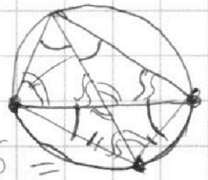
$(20-1)^2 =$

$361 \times 2 = 722$



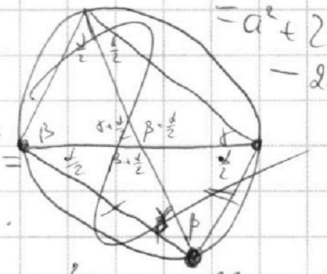




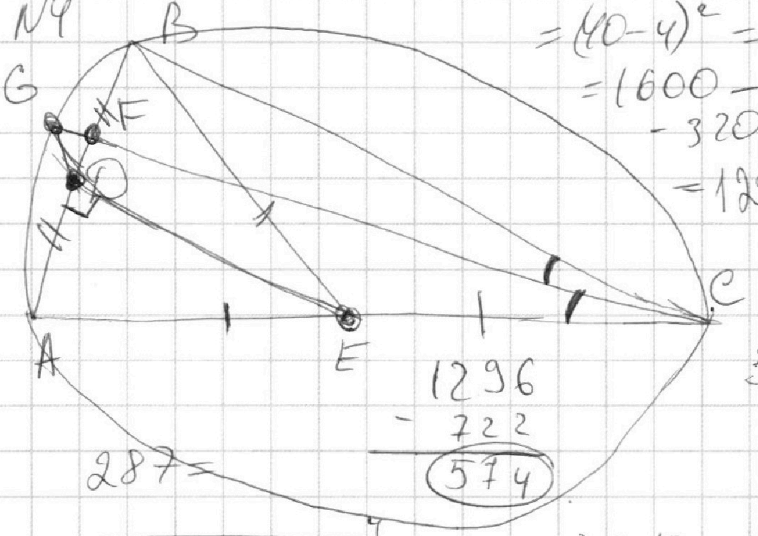


$a^2 = a^2 + 2a^2 - 2\cos 45 \cdot a\sqrt{2} \cdot a = a^2 + 2a^2 - 2a^2 = a^2$

$= 36 \cdot 36 = (40-4)^2 = 1600 - 320 + 16 = 1296$



№4



$19^2 = 361$

$36^2 = 1296$

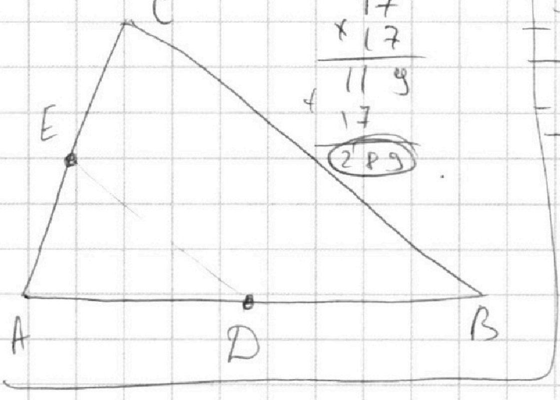
$1296 - 722 = 574$

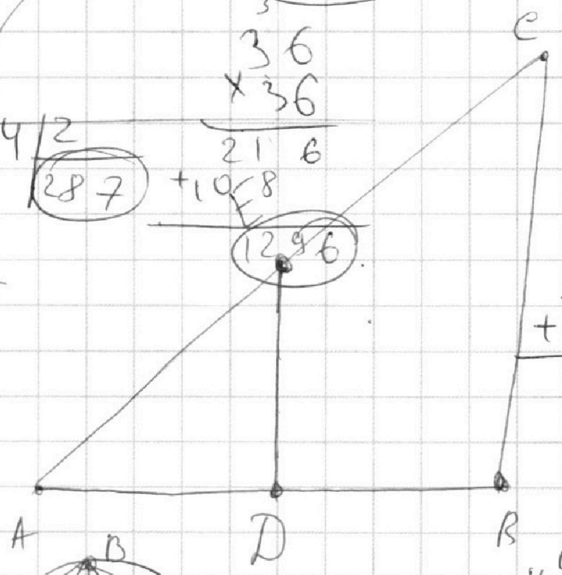
$287 =$

$574 / 2 = 287$

$17 \times 17 = 289$

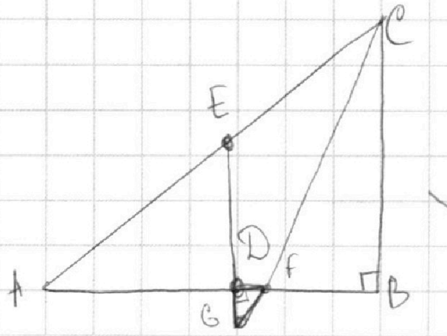
$36 \times 36 = 1296$

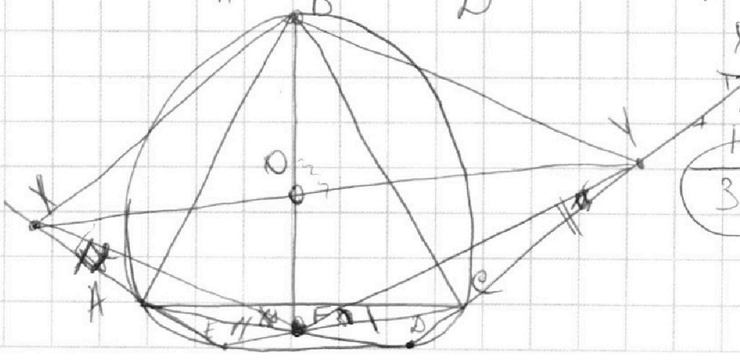




$361 + 287 = 648$

$19 \times 18 = 342$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$x_{1,2} = \frac{11t-1 \pm \sqrt{-7t^2-2t+1}}{2t}$$

$f(x+y) = f(x) + f(y)$.

$56 \times 28 = 448 + 112 = 1568$

$-7t^2 - 2t + 1 = -7(y-3)^2 - 2(y-3) + 1 = -7(y^2 - 6y + 9) - 2(y-3) + 1 = -7y^2 + 42y - 63 - 2y + 6 + 1 =$

$= -7y^2 + 40y - 56 \geq 0$.

$D = 1600 - 4 \cdot (-7) \cdot (-56) = 1600 - 28 \cdot 56 =$

$= 1600 - 1568 = 32$.

$$y_{1,2} = \frac{-40 \pm 4\sqrt{2}}{-14} = \frac{-20 \pm 2\sqrt{2}}{-7} =$$

$$= \frac{20 \pm 2\sqrt{2}}{7}$$

$\frac{20 + 2\sqrt{2}}{7} < 4$

$\frac{20 - 2\sqrt{2}}{7} > 2$.

$20 + 2\sqrt{2} < 28$.

$20 - 2\sqrt{2} > 14$.

$2\sqrt{2} < 8$

$6 > 2\sqrt{2}$.

$8 < 64$.

$3 > \sqrt{2}$.

$\cos x = \frac{5}{7}$

$abc(a+b+c) \neq 7ab + 7bc + 7ac$

$y = 3$, $\Rightarrow t = 0$.

$a^2bc + 7ac = ab^2c + 7ab =$

$= abc^2 + 7bc = k$.

$abc(a-b) = 7ab - 7ac$

$7c(a-b)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$|x^3-9|+|x^2-1| \le |x^3-x^2-8|$

~~1) $x^3>9 \Rightarrow x^2>1$~~

$x^3-9=a$, $x^2-1=b$

$|a|+|b| \le |a-b|$

1) $a\ge 0$, $b\ge 0$, $a\ge b$

$a+b\le a-b$

$b\le -b$

$2b\le 0 \Rightarrow b=0$

2) $a\ge 0$, $b\ge 0$, $a\le b$

$a+b\le b-a$

$a\le -a$ $2a\le 0 \Rightarrow a=0$

3) $a\ge 0$, $b<0$ $(-1;1)$

$a-b\le a-b$ (V)

4) $a<0$, $b\ge 0$

$-a+b\le b-a$ (V)

5) $a<0$, $b<0$, $a<b$

$-a-b\le b-a$

$-2b\le 0$ (X)

$b=0$

$x=\pm 1$, но $a<0$ (X)

$a=0$

$x=\sqrt[3]{9}$

$b=(\sqrt[3]{9})^2-1$

$(\sqrt[3]{9})^2-1\ge 0$

$(\sqrt[3]{9})^2\ge 1$ (V)

$a\ge 0$, $b<0$

$\Downarrow$

$-1<x<1$

$\Downarrow$

$a<0$

$a<0$, $b\ge 0$

$\Downarrow$ $x^3<9$ $\Downarrow$ $x\in(-\infty;\sqrt[3]{9})$

$\Downarrow$ $x\in(-\infty;-1]\cup[1;\infty)$

$\sqrt[3]{81}-1$

134+24

125-25-8

$\begin{array}{r} 241 \\ \times\ 61 \\ \hline 241 \\ 1446\ \ \\ \hline 14701 \end{array}$

$\frac{c}{b} = \frac{b}{a}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

(a, b, c) $abc = 5^{360} \cdot 7^{90}$

$d = \frac{b}{a}$

$a,\ b,\ \frac{b^2}{a}$

$abc = a \cdot b \cdot \frac{b^2}{a} = b^3 = 5^{360} \cdot 7^{90}$

$b = 5^{120} \cdot 7^{30}$

$\frac{b^2}{a}$ - натур, a - натур

$\frac{b^2}{a} = \frac{5^{240} \cdot 7^{60}}{a} \Rightarrow a = 5^p 7^q,\ 0 \le p \le 240,\ 0 \le q \le 60$

$\frac{b^2}{a} = \frac{5^2 \cdot 7}{a}$ $0, 1, 2$

$a = 5^p \cdot 7^q$ $0 \le p \le 2$

$a = 7 \cdot 5,\ 7 \cdot 5^2$ $0 \le q \le 1$

$a = 5,\ 5^2$ $a = 1$

(x, y)

$x^2(y-3) - x(11y-34) + 32y - 101 = 0$

$t = y - 3,\ t \ne 0.$

$x^2 t - x(11t - 1) + (32t - 5) = 0$

$D = (11t-1)^2 - 4t(32t-5) =$

$= 121t^2 - 22t + 1 - 128t^2 + 20t =$

$= -7t^2 - 2t + 1 \ge 0$

$7t^2 + 2t - 1 \le 0$

$D = 4 - 4 \cdot 7 \cdot (-1) = 32$

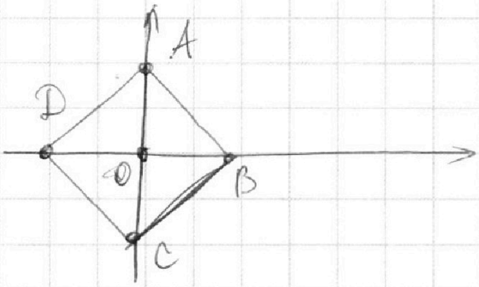
$t_{1,2} = \frac{-2 \pm 4\sqrt{2}}{14} = \frac{-1 \pm 2\sqrt{2}}{7}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



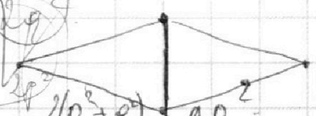
$O(0;0)$

$A(-p;q)$ $B(p,q)$

$C(p;-q)$ $D(-p;-q)$

$AC^2 = 2 \cdot AB^2$

$AC: y = -\frac{2q}{-2p} = \frac{-q}{p}$



$2(p^2+q^2) = AB^2$

1) AC на $y=2x$

$AC^2 = 4p^2+4q^2$

$q=-2p \Rightarrow A(-p;-2p)$ $B(p;-2p)$

$C(p;2p)$ $D(-p;2p)$

$b_x = p(1-\sqrt{2})$

$b_y = q(1-\sqrt{2})$

$B(b_x; b_y)$

$= AB^2 = BC^2$ $(b_x+p)^2+(b_y-q)^2 = (b_x-p)^2+(b_y+q)^2$

$y=-x^5+ax$

$2b_xp+2b_yq = -2b_xp+2b_yq$

$A(-p;q)$ $C(p;-q)$

$b_x = p(\sqrt{2}-1)$

$b_y = q(1-\sqrt{2})$ $4b_xp = 4b_yq$

$b_xp = b_yq$

$b_x^2+2b_xp+p^2+b_y^2+2b_yq+q^2 = q^2+4q^2$ $b_x = b_y\frac{q}{p}$

$b_x^2+b_y^2+2b_xp+2b_yq = p^2+q^2$.

$\frac{q^2}{p^2}b_y^2+b_y^2+4b_yq = p^2+q^2$.

$b_y^2 \cdot \frac{q^2+p^2}{p^2}+4b_yq-(p^2+q^2)=0$

$D = 16q^2+4\cdot\frac{q^2+p^2}{p^2}(p^2+q^2)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

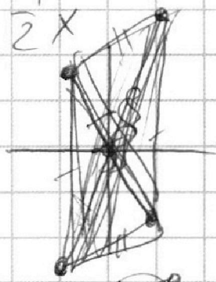
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

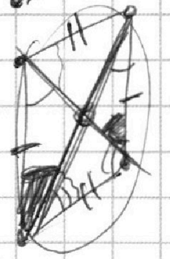
МФТИ

$A(p; q)$ $C(-p; -q)$ $B(k; l)$, $D(-k; -l)$

1) AC на $y = 2x$ $\Rightarrow$ BD на $y = -\frac{1}{2}x$

$q = 2p$; $l = -\frac{1}{2}k$. $l^2 = \frac{1}{4}k^2$





$y = -x^5 + ax$

$q = -p^5 + ap$

$2p = -p^5 + ap$

$2 = -p^4 + a$

$p^4 = a - 2$

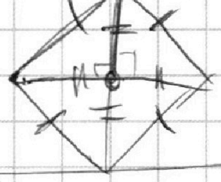
$y = -x^5 + ax$

$l = -k^5 + ak$

$-\frac{1}{2}k = -k^5 + ak$

$-\frac{1}{2} = -k^4 + a$

$k^4 = a + \frac{1}{2}$



$AB^2 = BC^2$.

$p^4 = 16k^4$

$a - 2 = 16a + 8$

$-15a = 10$

$\cancel{k^2 + 2pk + p^2 + q^2}$

$\boxed{k^2} - 2pk + \cancel{p^2} + \cancel{q^2} - 2ql + \cancel{l^2} = \boxed{k^2} + 2pk + \cancel{p^2} + \cancel{q^2} + 2ql + \cancel{l^2}$

$0 = 4pk + 4ql$

$\frac{13}{6} + \frac{1}{2} = \frac{16}{6}$

$pk + ql = 0$

$16(a - 2) = a + \frac{1}{2}$

$AC^2 = 4p^2 + 4q^2 = 4p^2 + 16p^2 = 20p^2$

$16a - 32 = a + \frac{1}{2}$

$BD^2 = 4(k^2 + l^2) = 4k^2 + k^2 = 5k^2$

$15a = 32 + \frac{1}{2}$

$4p^2 = k^2$ $16p^4 = k^4$

$30a = 65$

$a = \frac{13}{6}$

$15a = \frac{65}{2}$

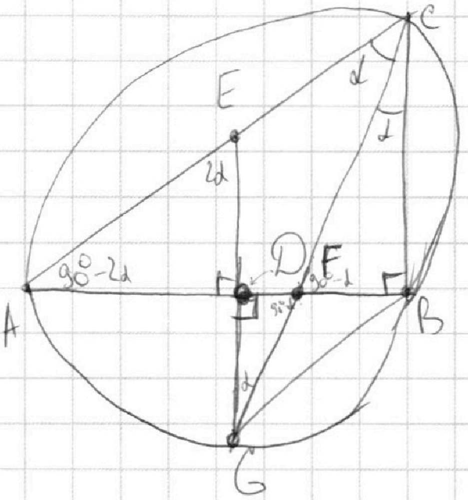
$p^2 = \frac{1}{16}$; $k^2 = \frac{4}{16}$ $p^4 = \frac{1}{6}$; $k^4 = \frac{16}{6}$.

$AB^2 = (k - p)^2 + (q - l)^2$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



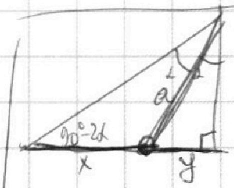
~~$S_{\triangle DGF}$~~

$\triangle DGF \sim \triangle BCF$.

коэффициент подобия

$$\frac{S_{\triangle DGF}}{S_{\triangle BCF}} = k^2 = 25.$$

$k = 5$.



$x = \frac{a\cdot\sin\alpha}{\cos 2\alpha}$

$y = a\cdot\sin\alpha$.

$BC = 5DG$, $BD = 5DF$.

Теорема синусов для $\triangle ACF$ и $\triangle BCF$

$$AF = \frac{CF\cdot\sin\alpha}{\cos 2\alpha}$$

$$BF = CF\cdot\sin\alpha.$$

$AF = AD + DF = BD + DF = 6DF$

$BF = BD - DF = 4DF$.

$$\frac{AF}{BF} = \frac{3}{2} = \frac{1}{\cos 2\alpha} \Rightarrow \cos 2\alpha = \frac{2}{3} \Rightarrow 1 - 2\sin^2\alpha = \frac{2}{3}.$$

$\sin^2\alpha = t$.

$$1 - 2t^2 = \frac{2}{3} \Rightarrow 2t^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow t^2 = \frac{1}{6} \xRightarrow{\alpha<90^\circ} t = \sqrt{\frac{1}{6}}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\cos 2\alpha = \frac{2}{3}$

$\cos^2 2\alpha = 1 - \sin^2 2\alpha$

$\cos^2 2\alpha = \frac{4}{9}$

$1 - \sin^2 2\alpha = \frac{4}{9}$

$\sin^2 2\alpha = \frac{5}{9} \Rightarrow \cancel{2\alpha}\ 2\alpha = \arcsin\sqrt{\frac{5}{9}}$

$c = \frac{a+\sqrt{7}}{2}$ $\quad b = \sqrt{7}$

$\sqrt{7} \cdot \left(\frac{a+\sqrt{7}}{2}\right) a = \sqrt{343}$

$\frac{a+\sqrt{7}}{2} a = 7.$ $\quad a(a+\sqrt{7}) = 14.$

$a^2 + a\sqrt{7} - 14 = 0.$

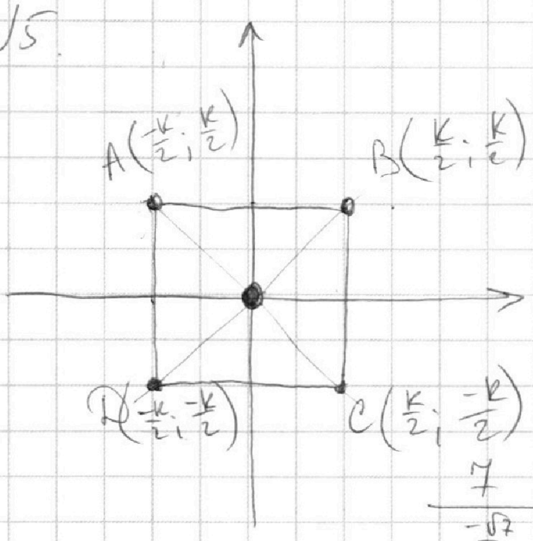
$D = 7 - 4\cdot(-14) = 7 + 4\cdot 14 = 9\cdot 7$

$a_{1,2} = \frac{-\sqrt{7} \pm 3\sqrt{7}}{2}$ $\quad \cancel{\frac{-4\sqrt{7}}{2}}$

$a = -2\sqrt{7}$

$c = \frac{-\sqrt{7}}{2}$

N5.



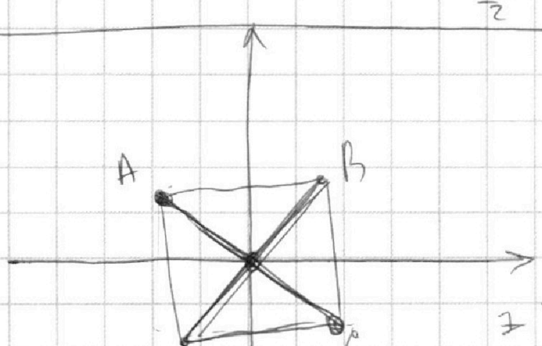
1) $\vec{BD}\ \cancel{\parallel}\ y = 2x.$

$\frac{k}{2} = 2\cdot\frac{k}{2} \Rightarrow k = 0$

2) $AC \to y = 2x.$

$\cancel{\parallel}$ $\frac{k}{2} = -k.$

$\frac{7}{\frac{-\sqrt{7}}{2}} = \frac{2\cdot 7}{-\sqrt{7}} = -2\sqrt{7}$ $\quad 3k = 0,\ \underline{k = 0}$



$\frac{7}{-2\sqrt{7}}$

$\cancel{A(l; k)}$ $\quad A(-l; -k)$

$\cancel{C(-l;}$ $\quad C(l; k)$

$\cancel{B(-l; k)}\ \cancel{D(-l; -k)}$

$A(-l; k)\quad B(l; k)\quad C(l; -k)$

$D(-l; -k).$

$a + \frac{7}{b} = -2\sqrt{7} + \sqrt{7} = -\sqrt{7}$

$b + \frac{7}{c} = \sqrt{7} - 2\sqrt{7} = -\sqrt{7}$

$c + \frac{7}{a} = \frac{-\sqrt{7}}{2} - \frac{\sqrt{7}}{2} = -\sqrt{7}.$

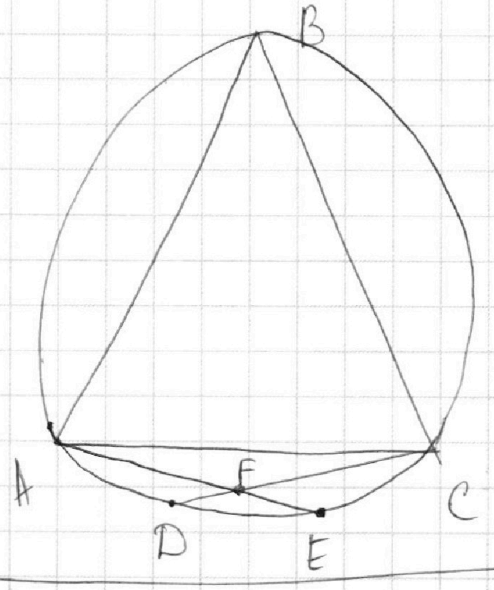
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

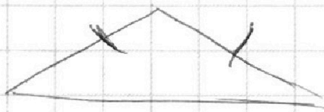
1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

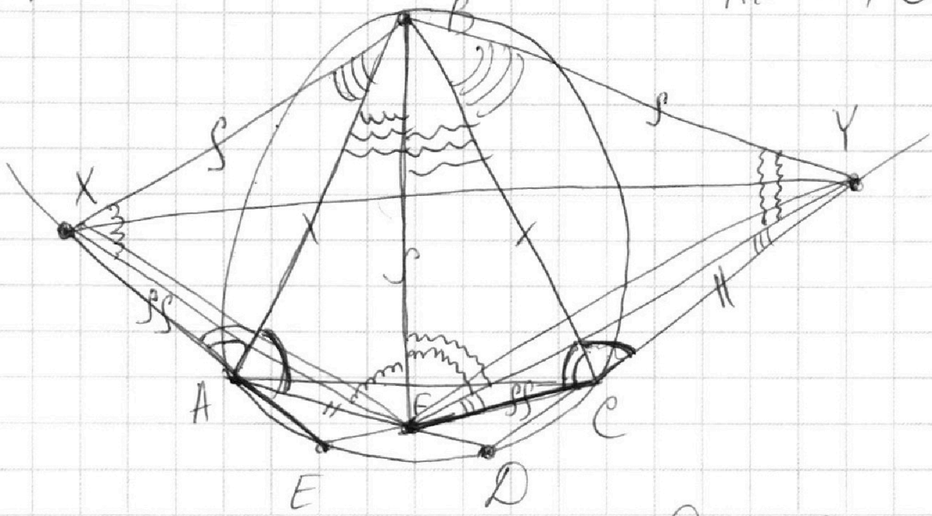
№7





№7

$AX=CF;\ CY=AF$.



$\angle BCY = 180^\circ - \angle DCB = 180^\circ - (180^\circ - \angle BAD) =$
$= \angle BAD$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!