МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 6

1. [4 балла] Решите уравнение
$$4\operatorname{tg} 2x + 1 + \operatorname{ctg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0.$$

2. [4 балла] Сколько существует троек целых чисел $(a; b; c)$ таких, что они образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию, а их произведение abc равно $3^{240} \cdot 7^{240}$?

3. [5 баллов] Решите неравенство
$$\ln^2(x+2) - (x+1)\ln(4x+8) + (\ln 4)\ln(x+2) \geqslant 0.$$

4. [4 балла] На координатной плоскости нарисован квадрат, все вершины которого лежат на графике функции $y = -2x^3 - ax$. Известно, что одна из диагоналей квадрата лежит на прямой $y = 5x$, а центр совпадает с началом координат. Найдите значение параметра a и площадь квадрата.

5. [6 баллов] Вокруг треугольника ABC описана окружность Ω. Точки D и E – середины сторон AC и AB соответственно, CF – биссектриса треугольника ABC. Лучи DE и CF пересекаются в точке G, принадлежащей Ω. Найдите углы треугольника ABC, если известно, что $\frac{CF}{DF} = \sqrt{\frac{2}{11}}$.

6. [5 баллов] Числа x, y и z не все равны между собой, и при этом
$$x^3 + \frac{10}{y^3} = y^3 + \frac{10}{z^3} = z^3 + \frac{10}{x^3}.$$
Найдите максимально возможное значение произведения xyz.

7. [6 баллов] В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит четырёхугольник $ABCD$, в котором $AB = BC = \sqrt{10}$, $AD = DC = 2$, $AC = 2\sqrt{2}$. Ребро SD – высота пирамиды. Известно, что $SA + SB = 2\sqrt{2} + \sqrt{10}$. Найдите:

а) объём пирамиды;

б) радиус шара, касающегося граней $ABCD$, SAB, SBC и ребра SD.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

ОДЗ:

$$\begin{cases} 2x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x + \frac{\pi}{4} \neq 2\pi m, m \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

№1: $4\,tg 2x + 1 + ctg\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$

$$\frac{8\,tg x}{1 - tg^2 x} + 1 + \frac{\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)} = 0$$

$$\frac{8\,tg x}{1 - tg^2 x} + 1 + \frac{\cos x \cos\frac{\pi}{4} - \sin x \sin\frac{\pi}{4}}{\sin x \cos\frac{\pi}{4} + \cos x \sin\frac{\pi}{4}} = 0$$

$$\frac{8\,tg x}{1 - tg^2 x} + 1 + \frac{1 - tg x}{1 + tg x} = 0; \quad t = tg x;$$

$$\frac{8t}{(1-t)(1+t)} + 1 + \frac{(1-t)^2}{(1-t)(1+t)} = 0;$$

$$\frac{8t + 1 - t^2 + 1 - 2t + t^2}{(1-t)(1+t)} = 0; \quad t \neq \pm 1$$

$2 - 6t = 0$

$t = \frac{1}{3};$

$tg x = \frac{1}{3}; \quad x = arctg\frac{1}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$

Ответ: $x = arctg\frac{1}{3} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№2: Пусть $a = 3^{\alpha} \cdot 7^{\beta} \cdot k$, $k \not\vdots 7$, $k \not\vdots 3$, ~~[illegible]~~
$\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$

Предположим, что $k \neq 1$;
Тогда $3^{240} \cdot 7^{240} \not\vdots k$ т.к. $k \not\vdots 3$; $k \not\vdots 7$
Но т.к. $b, c \in \mathbb{Z}$ ~~[illegible]~~ $abc \vdots k$
Но $abc = 3^{240} \cdot 7^{240}$ – противоречие.
Значит $k = 1$; ~~[illegible]~~
~~[illegible]~~

Пусть q – знаменатель прогрессии, образованной числами a, b, c;
$q = \frac{b}{a} = \frac{c}{b}$; т.к. $b, a \in \mathbb{Z}$ $q \in \mathbb{Q}$

Предположим, что у одного из чисел a, b, c есть простой делитель $p \neq 2$; $p \neq 3$; $p \neq 7$;
Тогда $abc \vdots p$, но $abc = (3 \cdot 7)^{240} \not\vdots p$
Значит ~~[illegible]~~ у a, b, c нет простых делителей кроме 3 и 7.
Но тогда $q = 3^x 7^y$, $x, y \in \mathbb{Z}$ т.к. иначе у числа $b = aq$ либо появятся новые простые делители, отличные от 3 и 7, либо оно станет не целым.
Тогда $a = 3^{\alpha} \cdot 7^{\beta}$; $b = aq = 3^{\alpha + x} \cdot 7^{\beta + y}$;
$c = bq = 3^{\alpha + 2x} \cdot 7^{\beta + 2y}$; ~~[illegible]~~

$$abc = 3^{3\alpha + 3x} \cdot 7^{3\beta + 3y} = 3^{240} \cdot 7^{240}$$

$$\begin{cases} 3\alpha + 3x = 240 \\ 3\beta + 3y = 240 \end{cases}; \quad \begin{cases} \alpha + x = 80 \\ \beta + y = 80 \end{cases}; \quad \begin{cases} x = 80 - \alpha \\ y = 80 - \beta \end{cases} \quad (1)$$

Числа α, β, x, y однозначно задают a и q, а значит задают прогрессию.
т.е. каждой 4-ке (α, β, x, y) соответствует единственная 3-йка $(a; b; c)$, причем каждой 3-йке (a, b, c) соответствует какая-то ~~[illegible]~~ 4ка $(\alpha; \beta; x; y)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Таким образом кол-во подходящих троек равно кол-ву ~~ч~~ четверок, при которых числа $a, b, c \in \mathbb{Z}$

т.е. $\begin{cases} \alpha \geq 0 \\ \alpha + x \geq 0 \\ \alpha + 2x \geq 0 \end{cases}$ и $\begin{cases} \beta \geq 0 \\ \beta + y \geq 0 \\ \beta + 2y \geq 0 \end{cases}$

Подставим значения x и y из сист. (1):

$\begin{cases} \alpha \geq 0 \\ \alpha + 80 - \alpha \geq 0 \\ \alpha + 160 - 2\alpha \geq 0 \end{cases}$ $\quad$ $\begin{cases} \beta \geq 0 \\ \beta + 80 - \beta \geq 0 \\ \beta + 160 - 2\beta \geq 0 \end{cases}$

$0 \leq \alpha \leq 160$ $\quad$ $0 \leq \beta \leq 160$

каждое из чисел α, β может принимать одно из 161 значений значит всего ~~пар~~ существует 161^2 пар $(\alpha; \beta)$

При этом из системы (1) по ~~однозначно~~ α и β однозначно устанавливается x и y т.е. всего существует 161^2 четверок $(\alpha; \beta; x; y)$, ~~из~~ при которых $a, b, c \in \mathbb{Z}$, а значит существует 161^2 троек $(a; b; c)$ подходящих под условие

Ответ: 161^2

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№3: $\ln^2(x+2)-(x+1)\ln(4x+8)+(\ln 4)\ln(x+2)\geq 0$

$y=x+2;\quad y>0\quad;\quad x=y-2$

ОДЗ:
$\begin{cases} x+2>0 \\ 4x+8>0 \end{cases}$
$x>-2$

$\ln^2 y-(y-1)\ln 4y+(\ln 4)\ln y\geq 0;$

$\ln y(\ln y+\ln 4)-(y-1)\ln 4y\geq 0$

$\ln y\cdot\ln 4y-(y-1)\ln 4y\geq 0$

$\ln 4y(\ln y-y+1)\geq 0$

Рассмотрим функцию $f(y)=\ln y-y+1;$

$f'(y)=\frac{1}{y}-1;\qquad f'(y)=0:\ \frac{1}{y}-1=0;\ y=1$

$+\quad 1\quad -\quad f'(y),\ y$ $\quad y=1$ – точка максимума

Т.к $f(y)$ непрерывна на области определения

$f(y)\leq f(1)=\ln 1-1+1=0$;

Таким образом $f(y)$ всегда неположительна, причем равна 0 только при $y=1$ т.к. при $y>1$ ф-я убывает, а при $y<1$ - возрастает.

Тогда $y=1\ (x=-1)$ – решение.

При $y\neq 1$:

$\ln 4y(\ln y-y+1)\geq 0$

$\ln 4y\leq 0$

$0<4y\leq 1\ ;\ 0<y\leq\frac{1}{4}\ ;\ -2<x\leq -\frac{7}{8}$

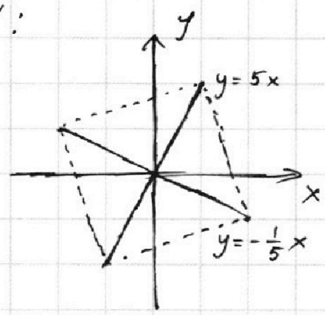
Ответ: $x\in(-2;-\frac{7}{8}]\cup\{2\}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№4:



~~Если центр квадрата лежит на прямой...~~

Если центр квадрата - точка (0;0), а одна из диагоналей лежит на прямой $y=5x$, другая диагональ лежит на прямой, перпендикулярной данной, и пересекающей ее в точке (0;0) т.е. на прямой $y=-\frac{1}{5}x$.

Данные прямые перпендикулярны т.к. произведение их угловых коэфициентов $5\cdot(-\frac{1}{5})=-1$; и они пересекаются в точке (0;0): $-\frac{1}{5}\cdot 0=5\cdot 0=0$;

Пусть $(\alpha;5\alpha)$ - одна из вершин квадрата, лежащих на прямой $y=5x$;

Расстояние от этой точки до центра квадрата $d=\sqrt{\alpha^2+5^2\alpha^2}=|\alpha|\sqrt{26}$.

Заметим, что точка $(5\alpha;-\alpha)$ лежит на прямой $y=-\frac{1}{5}x$ и расстояние от этой точке до центра квадрата $\sqrt{\alpha^2+5^2\alpha^2}=d$ значит $(5\alpha;-\alpha)$ - вершина квадрата

Т.к. обе вершины лежат на графике функции $y=-2x^3-ax$ выполняются равенства:

$$\begin{cases}-2\alpha^3-\alpha a=5\alpha\\-2\cdot5^3\alpha^3-5a\alpha=-\alpha\end{cases};\quad\begin{cases}2\alpha^3+a\alpha+5\alpha=0\\+2\cdot5^3\alpha^3+5a\alpha-\alpha=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}10\alpha^3+5\alpha a+25\alpha=0\\2\cdot5^3\alpha^3+5\alpha a-\alpha=0\end{cases};\quad(2\cdot5^3-10)\alpha^3=26\alpha$$

При $\alpha=0$ все вершины квадрата совпадают с точкой (0;0) значит $\alpha\neq0$.

$240\alpha^2=26$ $\quad\alpha=\pm\frac{\sqrt{26}}{4\sqrt{15}}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$2\alpha^3 + a\alpha + 5\alpha = 0; \quad a\alpha = -2\alpha^3 - 5\alpha$

$a = -2\alpha^2 - 5 = -\frac{2\cdot 26}{240} - 5 =$

$= -\frac{52 + 240\cdot 5}{240} = -\frac{1252}{240} = -\frac{626}{120} = -\frac{313}{60}$

$a = -\frac{313}{60}$

При этом $d = |\alpha|\sqrt{26}$ – расстояние от центра квадрата до его вершин т.е. половина диагонали; тогда диагональ квадрата $D = 2d$; Сторона квадрат $b = \frac{D}{\sqrt{2}}$

Площадь квадрата $S = b^2 = \frac{D^2}{2} = \frac{4d^2}{2} = 2d^2$;

$S = 2\alpha^2\cdot 26 = \frac{26^2\cdot 2}{240} = \frac{13^2\cdot 3\cdot 8}{240} = \frac{13^2}{30} = \frac{169}{30}$

Ответ: $a = -\frac{313}{60}$; $S = \frac{169}{30}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

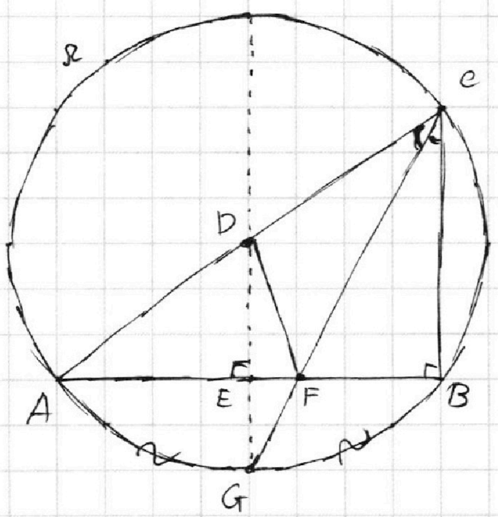
1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№5:



Биссектриса CF пересекает описанную окр. $\triangle ABC$ в точке G значит G - середина дуги AB

GE проходит через середину отрезка AB и через середину хорды AB описанной окр $\triangle ABC$ значит EG - серединный перпендикуляр к AB. $\Rightarrow \angle AED = 90°$

В $\triangle ABC$ DE - средняя линия значит $\triangle ABC \sim \triangle AED \Rightarrow \angle ABC = \angle AED = 90°$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

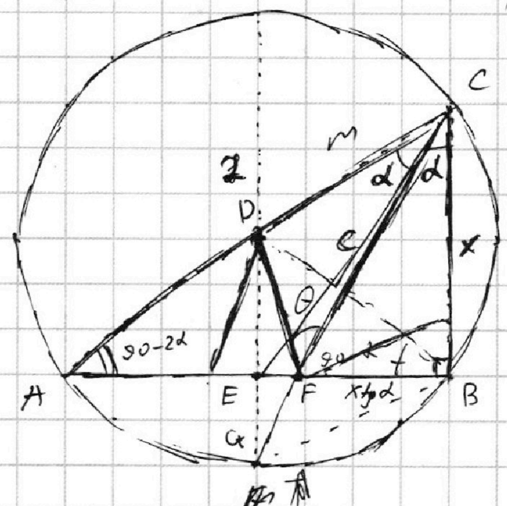
1 ☒ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$\frac{x}{2} = \frac{FB}{AF}$ $\quad \frac{2^2 + x^2 - (2^2 - x^2)}{4}$ $\quad CA = 2$

$\frac{CF}{DF}$ $\quad CF = \frac{x}{\cos\alpha}$



$DF^2 = DC^2 + CF^2 - 2CF \cdot DC \cdot \cos\alpha$

$\frac{DF^2}{CF^2} = \frac{DC^2}{CF} + 1 - 2\frac{DC}{CF}\cos\alpha$

$\frac{x}{1} = \frac{FB}{}$ $\quad FB = x\,tg\alpha$

$DF = d$; $CF = c$

$d = qc$

$d^2 = 1 + c^2 - 2c\cos\alpha$ $\quad \cos\alpha = \frac{CF}{x}$

$q^2c^2 = 1 + c^2 - 2c\cos\alpha$

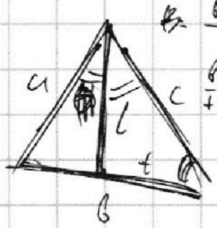
$(q^2-1)c^2 = 1 - 2\cos\alpha$ $\quad CF =$

$\frac{x}{2} = \frac{BF}{AF}$ $\quad \begin{cases} \cos\alpha = \frac{x}{c} \\ \cos 2\alpha = \frac{x}{2} \end{cases}$ $\quad \cos 2\alpha = \frac{2}{x}$ $\quad \frac{\cos\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{c}{2}$

$2c\cos\alpha = 4\cos\alpha\left(\frac{c}{2}\right) = \frac{4\cos^2\alpha}{\cos 2\alpha} = 4$

$1 = c^2 + d^2 - 2dc\cos\theta = q^2c^2 + c^2 - 2qc^2\cos\theta$

$2 = \frac{x}{\sin(90-2\alpha)} = \frac{x}{\cos 2\alpha}$



$\frac{b-t}{t} = \frac{a}{c}$

$\frac{b}{t} = \frac{a}{c} + 1$

$t =$

$\frac{x}{2} = 1\cos(180 - 2\alpha)$ $\quad x = 2\cos 2\alpha = 4\cos^2\alpha - 2 = x$

$4\cos^2\alpha - 2 = x$

$4\frac{x^2}{c^2} - 2 = x$; $\quad 4x^2 = (x+2)c^2$

$1 = d^2 + c^2 + 2$ $\quad \cos\alpha = x$ $\quad \cos 2\alpha = \frac{1}{c}$

$x = 1$

$d^2 = m^2 + c^2 - 2mc\cos\alpha$

$d^2 = m^2 + c^2 - 2m$

$c^2 = x^2 + x^2tg^2\alpha = \frac{1}{q}\left(\frac{x^2}{\cos 2\alpha} + \right.$ $\quad (q^2-1)c^2 = m^2 - 2m$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

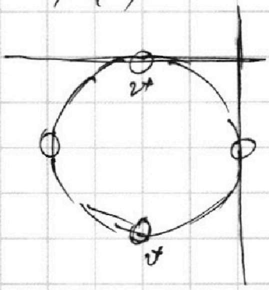
№1 $4\operatorname{tg}2x+1+\operatorname{ctg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0$ (!) ОДЗ

$\operatorname{tg}2x=\frac{\sin 2x}{\cos 2x}=\frac{2\sin x\cos x}{\cos^2 x-\sin^2 x}=\frac{2\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}^2 x}$

$\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{\sin x\cancel{\cos\frac{\pi}{4}}+\cos x\cancel{\sin\frac{\pi}{4}}}{\cos x\cancel{\cos\frac{\pi}{4}}-\sin x\cancel{\sin\frac{\pi}{4}}}=\frac{\sin x+\cos x}{\cos x-\sin x}=$

$=\frac{\operatorname{tg}x+1}{1-\operatorname{tg}x}$ $\operatorname{tg}x=t$

$4\frac{2t}{1-t^2}+1+\frac{t+1}{1-t}=0$ $4\frac{2t}{1-t^2}+1+\frac{1-t}{1+t}=0$



$\frac{8t}{1-t^2}+\frac{1-t^2}{1-t^2}+\frac{(1-t)^2}{(1+t)(1-t)}=0$

$8t+1\cancel{-t^2}+1-2t\cancel{+t^2}=0$

$a;\ b;\ c$ $a;\ aq;\ aq^2$

$abc=a^3q^3=3^{240}\cdot7^{240}$; $aq=3^{80}\cdot7^{80}$ $8\cdot3=24$

(!) $q\in\mathbb{Z}$

$aq=3^{80}\cdot7^{80}$ $q=\frac{x}{y}$ $aq\in\mathbb{Z}$

$b;\ bq;\ b/q\in\mathbb{Z}$;

$3^{\alpha}7^{\beta}$ $3^{\alpha+x}7^{\beta+y}$ $3^{\alpha+2x}\cdot7^{\alpha+2y}$

$\alpha+\alpha+2x+\alpha+x=240$

$\begin{cases}\alpha+x=80\\ \beta+y=80\\ \alpha+2x\geq0\end{cases}$ $\alpha=80-x$ $x=80-\alpha$

$\frac{b}{a}\cdot a$

$\ln^2(x+2)-(x+1)\ln(4x+8)+\ln4\ln(x+2)\geq0$

$\ln^2(x+2)-x\ln(4x+8)-\ln(4x+8)+\ln4\ln(x+2)\geq0$

$\ln^2(x+2)-x\ln4-x\ln(x+2)\cancel{-\ln4\ln(x+2)}\cancel{+\ln4\ln(x+2)}\geq0$

$\ln^2(x+2)-x\ln4-\ln(x+2)x\geq0$

$\ln^2(x+2)-x\ln(4x+8)\geq0$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$\ln^2(x+2) \geq - x\ln(4x+8) \geq 0$

$\ln(x+2)=t$
$x+2=e^t$
$x=e^t-2$

$t^2 \geq (e^t-2)($

$\ln^2(x+2) \geq x(\ln 4+\ln(x+2))$

$\ln^2(x+2) - x\ln(4x+8) - \ln(4x+8)+\ln 4\ln(x+2) \geq 0$

$y=x+2 \quad y>0$

ОДЗ: $\boxed{x>-2}$

$\ln^2 y-(y-1)\ln 4y - \ln 4\ln y \geq 0$

$y=1$ - корень.

$f(y)=\ln^2 y-(y-1)\ln 4y-\ln 4\ln y$

$(\ln^2 y)' = \frac{2\ln y}{y}$

$\ln^2 y \geq (y-1)\ln 4y+\ln 4\ln y =$

$=(y-1)\ln 4+(y-1)\ln y+\ln 4\ln y=$

$\ln y>y$
$e^y>y$
$f(y)=e^y-y$
$f'(y)=e^y-1$

$\ln^2 y \geq (y-1+\ln 4)\ln y+(y-1)\ln 4$

$\ln^2 y-(y-1)\ln 4y+(\ln 4)\ln y \geq 0$

$f' = \frac{2\ln y}{y}$

$\ln^2 y - y\ln 4y+\ln 4y+\ln 4\cdot\ln y \geq 0$
$\ln^2 y - y\ln 4-y\ln y+\ln 4+\ln y \geq 0$

$t=\ln y$

$\ln^2 y+\ln y+\ln 4 \geq y(\ln 4+\ln y)$

$(te^t)' = te^t+e^t=(t+1)e^t$

$t^2+\ln(4)\cdot t \geq e^t(\ln 4+t)$
$f(t)=t^2+t\ln 4-e^t\ln 4-te^t$
$f'(t)=2t+\ln 4-e^t\ln 4-(t+1)e^t$
f'

$\ln^2 y-(y-1)\ln 4y+\ln 4\cdot\ln y \geq 0$

$y\leq 1/4$ $+$ $-$ $+$ $-$ $-$
$y\geq 1/4$ $+$

$x^3+\frac{10}{y^3}=\alpha$ $\qquad 3\alpha = x^3+y^3+z^3+\frac{10}{x^3}+\frac{10}{y^3}+\frac{10}{z^3}$

$y^3+\frac{10}{z^3}=\alpha$ $\qquad x^3+\frac{10}{x^3}$

$z^3+\frac{10}{x^3}=\alpha$ $\qquad a+\frac{10}{b}=b+\frac{10}{c}=c+\frac{10}{a}$

$x^6y^3z^3+10x^3z^3=$ $\qquad a^2bc+ac\cdot 10=b^2ac+10ab=c^2ab+10bc$

y^6x^3z

$\left(x+\frac{1}{x}\right)^3=x^3+3x\cdot\frac{1}{x}\left(x+\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x^3}$ $\qquad x^3+\frac{10}{y^3}=y^3+\frac{10}{z^3}$

$x^3y^3z^3\neq 10$

$\frac{z^3x^3y^3+10z^3}{z^3y^3}$ $\qquad x=y$

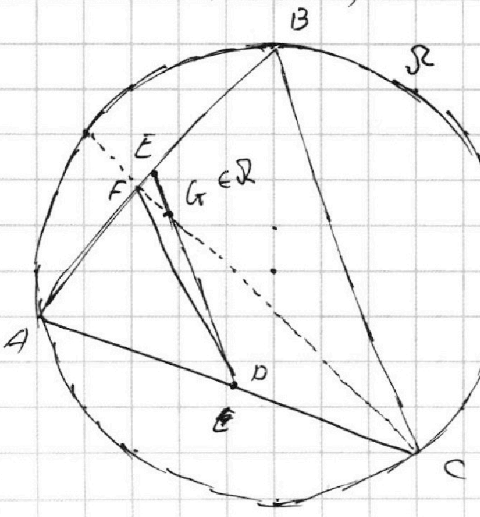
$$\begin{cases} a+\frac{10}{b}=\alpha \\ b+\frac{10}{c}=\alpha \\ c+\frac{10}{a}=\alpha \end{cases} \qquad \begin{cases} abc+10c=\alpha bc \\ abc+10a=\alpha ac \\ abc+10b=\alpha ab \end{cases} \qquad f=abc$$

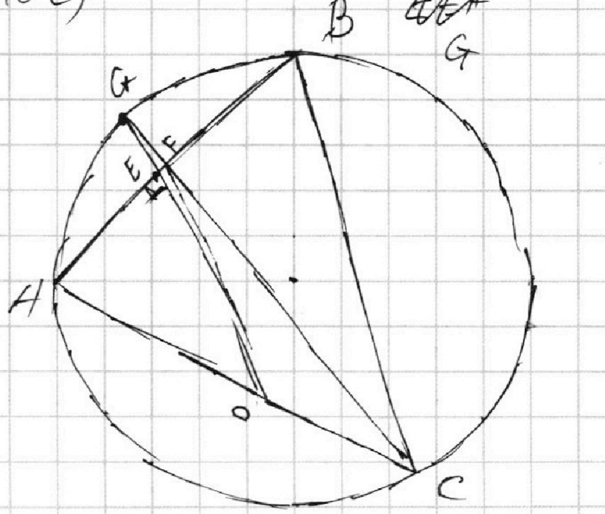
$\alpha bc-10c=\alpha ac-10a=\alpha ab-10b=abc$

$(\alpha b-10)c=(\alpha c-10)a=(\alpha a-10)b=abc$

$GD\perp AB$

$\alpha^3f^2=(f+10a)(f+10b)(f+10c)$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$\ln^2 y - (y-1)\ln 4y + \ln 4 \ln y =$

$= \ln y(\ln y + \ln 4) - (y-1)\ln 4y \geq 0$

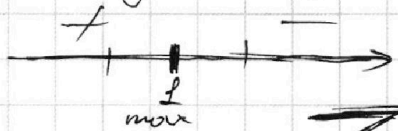
$\ln y \ln 4y - (y-1)\ln 4y \geq 0$

$\ln 4y(\ln y - y + 1) \geq 0$

$\ln ey \geq y$ $\quad f(y) = \ln ey - y$

$f(y) \leq 0$ $\quad f' = \frac{e}{ey} - 1 = \frac{1}{y} - 1;$

$\ln ey' = \frac{e}{ey} = \frac{1}{y}$



$\{1\} \cup$ $\quad \ln 4y < 0$

$4y < 1$

$y < \frac{1}{4}$ $\quad x + 2 < \frac{1}{4}$ $\quad x < \frac{1}{4} - 2 = \frac{1-8}{4} =$

$x = y - 2$ $\quad \left(-2; -\frac{7}{4}\right) \cup \{1\}$

$626 \,|\, 2$, 6, 3

$4+4+5+4+6+5+6 =$ $\quad 13$

$12+10+12 = 34$

$13 \cdot 13 = 39$, 13, 169

$y = -2x^3 - ax$ $\quad y = 5x$ $\quad y = -\frac{1}{5}x$

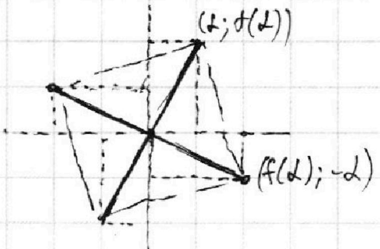
$2x^3 + ax = -5x$

$2x^3 + ax + 5x = 0$ $\quad x(2x^2 + a + 5) = 0$

$x = \pm\sqrt{\frac{a+5}{2}} = \alpha$

$y = 5\alpha$

$(5\alpha; -\alpha)$



$\alpha = 2\sqrt{26}\alpha^2 = 2\alpha\sqrt{26}$

$\begin{cases} -2\alpha^3 - a\alpha = +5\alpha \\ -2\cdot 5^3\alpha^3 - 5\alpha = -\alpha \end{cases}$; $\begin{cases} 2\alpha^3 + a\alpha + 5\alpha = 0 \\ 2\cdot 5^3\alpha^3 + 5\alpha a - \alpha = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} 10\alpha^3 + 5\alpha a + 25\alpha = 0 \\ 2\cdot 5^3\alpha^3 + 5\alpha a - \alpha = 0 \end{cases}$; $(2\cdot 5^3 - 10)\alpha^3 = +26\alpha$

$\alpha^2 = \frac{\sqrt{2\cdot 5^3 - 10}}{\sqrt{26}}$; $\quad \alpha = \left(\frac{4\sqrt{15}}{\sqrt{26}}\right)^{-1}$

$a\alpha = -(2\alpha^3 + 5\alpha)$; $\quad a = -2\alpha^2 + 5$

$240 =$

$24 \cdot 10 =$

$8 \cdot 3 \cdot 10 = 16 \cdot 3 \cdot 5$

$4\sqrt{15}$

$240 \cdot 5 = 1200$ $\quad 40 \cdot 5 = 200$

$\frac{1}{y} = 1$

$y = 1$

$1252 \,|\, 2$, 626