МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 8

1. [4 балла] Решите уравнение

$$6\operatorname{tg} 2x - 1 + \operatorname{ctg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0.$$

2. [4 балла] Сколько существует троек целых чисел $(a; b; c)$ таких, что они образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию, а их произведение abc равно $13^{180} \cdot 17^{180}$?

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$\ln^2(x-1) - (x-2)\ln(3x-3) + (\ln 3)\ln(x-1) \geqslant 0.$$

4. [4 балла] На координатной плоскости нарисован квадрат, все вершины которого лежат на графике функции $y = -\frac{2x^3}{3} + ax$. Известно, что одна из диагоналей квадрата лежит на прямой $y = 3x$, а центр совпадает с началом координат. Найдите значение параметра a и площадь квадрата.

5. [6 баллов] Вокруг треугольника ABC описана окружность Ω. Точки D и E – середины сторон AC и AB соответственно, CF – биссектриса треугольника ABC. Лучи DE и CF пересекаются в точке G, принадлежащей Ω. Найдите углы треугольника ABC, если известно, что $\frac{CF}{DF} = \sqrt{\frac{2}{23}}$.

6. [5 баллов] Числа x, y и z не все равны между собой, и при этом

$$x^3 + \frac{11}{y^3} = y^3 + \frac{11}{z^3} = z^3 + \frac{11}{x^3}.$$

Найдите максимально возможное значение произведения xyz.

7. [6 баллов] В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит четырёхугольник $ABCD$, в котором $AB = BC = \sqrt{15}$, $AD = DC = \sqrt{6}$, $AC = 2\sqrt{3}$. Ребро SD – высота пирамиды. Известно, что $SA + SB = 2\sqrt{3} + \sqrt{15}$. Найдите:

а) объём пирамиды;

б) радиус шара, касающегося граней $ABCD$, SAB, SBC и ребра SD.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 [X] 2 [ ] 3 [ ] 4 [ ] 5 [ ] 6 [ ] 7 [ ]

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача 1

$$\frac{12\sin x\cos x}{\cos^2 x-\sin^2 x}-1+\frac{\cos x+\sin x}{\sin x-\cos x}=0$$

$$\frac{12\frac{\sin x}{\cos x}}{1-\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}-1+\frac{\cos x+\sin x}{\sin x-\cos x}=0$$

Пусть $\cos x+\sin x=a$, $\sin x-\cos x=b$

$\Rightarrow \sin x=\frac{a+b}{2}$ $\cos x=\frac{a-b}{2}$

$$\frac{12\frac{(a+b)}{a-b}}{1-\frac{(a+b)^2}{(a-b)^2}}-1+\frac{a}{b}=0 \qquad \frac{\frac{12(a+b)}{(a-b)}}{\frac{(a-b)^2-(a+b)^2}{(a-b)^2}}-1+\frac{a}{b}=0$$

$$\frac{12(a+b)(a-b)}{-4ab}-1+\frac{a}{b}=0 \qquad -3a^2+3b^2-ab+a^2=0$$

$$2a^2+ab-3b^2=0 \qquad D=b^2+24b^2=(5b)^2$$

$$\Rightarrow a=\frac{-b\pm 5b}{4} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a=b \\ a=-1,5b \end{array}\right.$$

1) $a=b \Rightarrow \cos x=0 \Rightarrow ctg(x-\frac{\pi}{4})=1 \Rightarrow tg 2x=0$

при $x=\frac{\pi}{2}+\pi n \Rightarrow tg(\pi+2\pi n)=0 \quad 0=0 \Rightarrow$

1 серия: $x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z$

2) $a=-1,5b \Rightarrow ctg(x-\frac{\pi}{4})=-\frac{1}{2} \Rightarrow 6 tg 2x=\frac{3}{2}$

$tg 2x=\frac{1}{4}$. т.к. $a=-1,5b$, то $\sin x=-\frac{b}{2}$ $\cos x=-2,5b$

$$\Rightarrow tg x=\frac{1}{5} \Rightarrow tg 2x=\frac{2tg x}{1-tg^2 x}=\frac{\frac{2}{5}}{1-\frac{1}{25}}=\frac{2}{5-\frac{1}{5}}=\frac{10}{24}\neq\frac{1}{4}$$

$\Rightarrow a=-1,5b$ п.с.

Ответ: $x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №2

Пусть q - знаменатель прогр. Очевидно $q \in \mathbb{Q}$ (т.к. если q - иррац., то $b = a \cdot q$ - ирр., т.к. целое умножить на ирр. - это ирр. число (если это целое не равно 0, а оно очев. не равно, иначе $a=b=c=0$.))

$\Rightarrow b = aq \quad c = aq^2 \quad \Rightarrow abc = a^3q^3 = 13^{180} \cdot 17^{180}$

$\Rightarrow aq = 13^{60} \cdot 17^{60}$. ($q > 0$ по определению геом. пр.)

т.к. $a \in \mathbb{Z}$, и $b \in \mathbb{Z}$ и $c \in \mathbb{Z}$, и $abc \in \mathbb{Z}$, то

$a = 13^x \cdot 17^y \quad c = 13^t \cdot 17^m \quad x, y, t, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$\Rightarrow q = \frac{b}{a} = \frac{13^{60} \cdot 17^{60}}{13^x \cdot 17^y} = 13^{60-x} \cdot 17^{60-y}$

$\Rightarrow c = bq = 13^{120-x} \cdot 17^{120-y}$ т.к. $a \in \mathbb{Z}$, то $x \geq 0$ и $y \geq 0$, а т.к. $c \in \mathbb{Z}$, то $120 - x \geq 0$ и $120 - y \geq 0$

$\Rightarrow$ $0 \leq x \leq 120 \quad 0 \leq y \leq 120$

$\Rightarrow$ вар-в выбрать пару (x, y) - 121^2.

Очевидно при любой такой паре $abc = 13^{180} \cdot 17^{180}$ и $a \in \mathbb{Z}$, т.к. $x \in \mathbb{N} \cup \{0\} \Rightarrow 13^x \in \mathbb{N}$ и аналог. $17^y \in \mathbb{N}$. Также $13^{120-x} \in \mathbb{N}$, т.к. $0 \leq x \leq 120$ и $17^{120-y} \in \mathbb{N}$, т.к. $0 \leq y \leq 120$.

~~Ответ~~ (Если бы q могло быть отриц., то очев. ответ был бы в 2 раза больше, т.е. $2 \cdot 121^2$)

Ответ: 121^2

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача 3

$$\ln^2(x-1)-(x-2)[\ln 3+\ln(x-1)]+\ln 3\cdot\ln(x-1)\geq 0$$

$$\ln^2(x-1)+\ln(x-1)[\ln 3-(x-2)]-(x-2)\ln 3\geq 0$$

~~Пусть $\ln(x-1)=t \Rightarrow t^2$~~ Рассм. данное н-во как квадратное от-но $\ln(x-1)$. Найдем нули:

$$\ln^2(x-1)+\ln(x-1)[\ln 3-(x-2)]-(x-2)\ln 3=0$$

$$D=[\ln 3-(x-2)]^2+4(x-2)\ln 3=[\ln 3+(x-2)]^2 \Rightarrow$$

$$\ln(x-1)=\frac{-[\ln 3-(x-2)]\pm(\ln 3+(x-2))}{2}$$

$$\left[\begin{array}{l}\ln(x-1)=x-2\\ \ln(x-1)=-\ln 3=\ln\frac{1}{3}\end{array}\right.\qquad \left[\begin{array}{ll}e^{x-2}=x-1 & (1)\\ x-1=\frac{1}{3} & (2)\end{array}\right.\qquad (2):\ x=\frac{4}{3}$$

(1): $e^{x-2}-x+1=0 \qquad (e^{x-2}-x+1)'=e^{x-2}-1 \Rightarrow$ найдем крит. т.: $e^{x-2}=1 \quad x=2$. Заметим, что при $x=2$ $\ln(x-1)=0=x-2 \Rightarrow$ это единств. реш. (т.к. оно находится в единств. крит. т. $\Rightarrow$ либо это экстремум, либо ф-ция монотонна). $\Rightarrow \left[\begin{array}{l}x=2\\ x=\frac{4}{3}\end{array}\right.$

$\Rightarrow$ чтоб в н-ве был знак ≥ 0 имеем:

$$x\in\left(-\infty;\frac{4}{3}\right]\cup[2;+\infty) \qquad ОДЗ:\ x>1 \Rightarrow$$

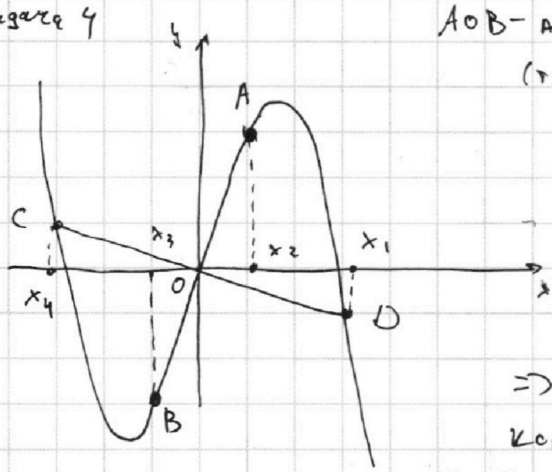
Ответ: $x\in\left(1;\frac{4}{3}\right]\cup[2;+\infty)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

задача 4



AOB- ~~произв~~ диагональ квадрата (т.е. т. $A \in y=3x$ и т. $B \in y=3x$)

$\Rightarrow -\frac{2}{3}x^3+ax=3x$

(считаем, что $x \neq 0$)

$\Rightarrow -\frac{2}{3}x^2+a=3 \quad x^2=\frac{3a-9}{2}$

$\Rightarrow$ это ур-ние имеет ≤ 2 корня $\Rightarrow$ прямая $y=3x$ пересекает график $y=-\frac{2}{3}x^3+ax$ в ≤ 2 т. (не считая т. O) $\Rightarrow$ AB и есть диагональ квадрата.

Понятно, что вторая диагональ квадрата ~~м~~ $\perp$ первой $\Rightarrow$ лежит на прямой $\perp$ $y=3x$ $\Rightarrow$ на $y=-\frac{x}{3}$

Аналогично пусть C и D - точки пересеч. $y=-\frac{x}{3}$ и $y=-\frac{2}{3}x^3+ax$ $\Rightarrow$ ABCD - квадрат с ц. в т. O $\Rightarrow$ OC=OD=OA=OB.

Пусть точки D, A, B, C ~~соотв.~~ имеют абсциссы x_1, x_2, x_3 и x_4 соотв. Понятно, что $x_4=-x_1$ и $x_2=-x_3$ ($\triangle BX_3O=\triangle AX_2O$ т.к. $AO=OB$ и $\angle BX_3O=\angle AX_2O=90°$ и $\angle BOX_3=\angle AOX$. Аналогично $\triangle CX_4O=\triangle DOX_1$)

При чем ещё $\triangle CX_4O=\triangle BOX_3$ ($CO=OB$ $\angle COX_4=90°-\angle BOX_4=\angle X_3BO$ и $\triangle$ прямоуг.) $\Rightarrow CX_4=OX_3$. CX_4 - знач. $y=-\frac{x}{3}$ в ~~т.~~ абсциссе x_4, а OX_3 имеет длину $|x_3|$, т.е. $-x_3$

$\Rightarrow$ найдём x_4: $-\frac{2}{3}x^3+ax=-\frac{x}{3}$ $\quad \frac{2}{3}x^2=a+\frac{1}{3}$ $\quad x^2=\frac{3a+1}{2}$

$\Rightarrow x_4=-\sqrt{\left|\frac{3a+1}{2}\right|}$, ~~либо $x_4=$~~. Из равенства $\triangle$ мы

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 4 (продолж.)

знаем, что $OX_4 = BX_3$ $\Rightarrow BX_3 = |X_4|$, а BX_3 - значение $y = 3x$ в т. x_3 (со знаком „−")

$\Rightarrow -3\sqrt{\left|\frac{3a-9}{2}\right|} = -\sqrt{\left|\frac{3a+1}{2}\right|} \Rightarrow$ ~~$9 \cdot 9(a-3)^2 = (3a+1)^2$~~

~~$81a^2 - 6\cdot 81a + 81\cdot 9 = 9a^2 + 6a + 1$~~ $9\left|\frac{3a-9}{2}\right| = \left|\frac{3a+1}{2}\right|$

$|27a - 81| = |3a+1| \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a = 11\frac{1}{4} \\ a = \frac{8}{3} \end{array}\right.$

Проверим эти a подставляя в $-\frac{2}{3}x^3 + ax = 3x$

1) $a = \frac{8}{3} \Rightarrow -\frac{2}{3}x^3 + \frac{8}{3}x = 3x$ ($x=0$ считаем разобр.)

$\Rightarrow -\frac{2}{3}x^2 + \frac{8}{3} = 3 \Rightarrow -2x^2 + 8 = 9$ $x^2 = -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow a = \frac{8}{3}$ – п. с.

2) $a = 11\frac{1}{4}$ $-2x^2 + 33\frac{3}{4} = 9$ $x^2 = 12\frac{3}{8}$

$\Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{99}{8}} \Rightarrow x_3 = -\sqrt{\frac{99}{8}} \Rightarrow$ т. B: $-3\sqrt{\frac{99}{8}}$ - ордината

$\Rightarrow B\left(-\sqrt{\frac{99}{8}}; -3\sqrt{\frac{99}{8}}\right) \Rightarrow x_4 = -3\sqrt{\frac{99}{8}} \Rightarrow$

т. C: $-\left(\frac{-3\sqrt{\frac{99}{8}}}{3}\right) = \sqrt{\frac{99}{8}} \Rightarrow C\left(-3\sqrt{\frac{99}{8}}; \sqrt{\frac{99}{8}}\right)$

$\Rightarrow OC^2$ по т. Пифагора: $\frac{99}{8} + 9\cdot\frac{99}{8} = 10\cdot\frac{99}{8}$

$\Rightarrow OC = \sqrt{55}\cdot\frac{3}{2} \Rightarrow$ Площадь квадрата: $\frac{(2\cdot OC)^2}{2} =$

$= 2OC^2 = \frac{10\cdot 99}{4} = \frac{990}{4}$

Ответ: $a = 11\frac{1}{4}$; Площадь: $\frac{990}{4}$

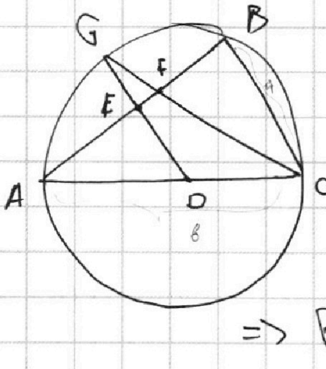
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача № 5



Мы знаем, что Γ – точка пересеч. бисс. $\angle C$ с окр. $\Omega \Rightarrow \Gamma$ – середина дуги AB. т.к. E – середина AB, то $\Gamma E \perp AB$ ($\triangle A\Gamma B$ – р/б, т.к. Γ – сер. дуги т.е. $A\Gamma = \Gamma B \Rightarrow \Gamma E$ – медиана $\Rightarrow$ высота) ΓED – одна прямая по усл. и т.к. $AE = EB$ и $AD = DC$, то DE – ср. линия $\Rightarrow \Gamma D \parallel BC \Rightarrow \angle ABC = \angle AED = 90^\circ$.

Пусть $AC = b$, $BC = a$. $AB = \sqrt{b^2 - a^2}$ (по т. Пифагора)

т.к. CF – бисс., то $BF = \dfrac{a\sqrt{b^2-a^2}}{a+b} = \dfrac{a\sqrt{b-a}}{\sqrt{b+a}}$

$\Rightarrow CF^2$ по т. Пифагора: $BF^2 + BC^2 =$

$= \dfrac{a^2(b-a)}{b+a} + a^2 = \dfrac{a^2b - a^3 + a^2b + a^3}{a+b} = \dfrac{2a^2b}{a+b}$

аналогично $AF = \dfrac{b\sqrt{b^2-a^2}}{a+b} = \dfrac{b\sqrt{b-a}}{\sqrt{b+a}}$ $\quad AE = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{\sqrt{b^2-a^2}}{2}$

$\Rightarrow EF = AF - AE = \dfrac{b\sqrt{b-a}}{\sqrt{b+a}} - \dfrac{\sqrt{b-a}\sqrt{b+a}}{2} = \dfrac{2b\sqrt{b-a} - (a+b)\sqrt{b-a}}{2\sqrt{b+a}} =$

$= \dfrac{(b-a)\sqrt{b-a}}{2\sqrt{b+a}}$ $\quad ED$ – ср. л. $\Rightarrow ED = \dfrac{a}{2} \Rightarrow DF^2 = EF^2 + ED^2 =$

$= \dfrac{(b-a)^3}{4(b+a)} + \dfrac{a^2}{4} = \cancel{\dfrac{CF^2}{DF^2} = \dfrac{2}{23} = \dfrac{\frac{2a^2b}{(a+b)}}{\frac{(b-a)^3}{4(a+b)}} = \dfrac{8a^2b}{(b-a)^3}}$

$= \dfrac{(b-a)^3 + a^2(a+b)}{4(a+b)}$ $\Rightarrow \dfrac{CF^2}{DF^2} = \dfrac{2}{23} \Rightarrow \dfrac{\frac{2a^2b}{a+b}}{\frac{(b-a)^3 + a^2(a+b)}{4(a+b)}} =$

$= \dfrac{8a^2b}{b^3 - 3b^2a + 4a^2b} = \dfrac{8a^2}{b^2 - 3ab + 4a^2} \Rightarrow 184a^2 = 2b^2 - 6ab + 8a^2$

$b^2 - 3ab + 4a^2 - 92a^2 = 0 \quad b^2 - 3ab - 88a^2 = 0$

$D = 9a^2 + 4\cdot 88\cdot a^2 = a^2\cdot 361 = (19a)^2 \Rightarrow b = \dfrac{3a \pm 19a}{2}$

$\Rightarrow b = 11a$ ($-8a$ – посл. сл.) $\Rightarrow \angle C = \arccos\frac{1}{11}$. $\angle A = \arcsin\frac{1}{11}$

Ответ: $\angle B = 90^\circ$. $\angle A = \arcsin\frac{1}{11}$. ~~$\angle C$~~ $\angle C = \arccos\frac{1}{11}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача 6

Пусть $x^3=a$, $y^3=b$, $z^3=c$ $\Rightarrow$ $a+\frac{11}{b}=b+\frac{11}{c}=c+\frac{11}{a}$

Перемножим три слагаемых: $abc+\frac{11^3}{abc}+11a+\frac{121}{a}+$

$+11b+\frac{121}{b}+11c+\frac{121}{c}$. ~~Понятно, что $a, b, c > 0$ (т.к. если равно 1 меньше 0, то $xyz<0$, а у нас будет пример, где >0, если равно 3, то аналог умножим все~~ Пусть 1) $a, b, c > 0$. Тогда по нер-ву о средн.

~~$abc+\frac{11^3}{abc} \geq 2\sqrt{11^3}$ $11a+\frac{121}{a} \geq 2\sqrt{11^3}$ ... $11c+\frac{121}{c} \geq 2\sqrt{11^3}$~~

~~$\Rightarrow$ произв. трех слаг.~~

По нер-ву о средн. $xyz < \frac{x^3+y^3+z^3}{3}$ (рав-во не достигается, т.к. они не все $=$)

Пусть ~~[illegible]~~ $a, b, c > 0$. Если a – наиб из них (без огр. общности), то c – наим., т.к. если b – наим., то $a+\frac{11}{b} > c+\frac{11}{a}$ (т.к. $a>c$ и $b<a$)

$\Rightarrow$ среди них равно 2 отриц. (если 1, то домножим на (-1) все числа, ~~[illegible]~~ получим те же рав-ва, но xyz ~~[illegible]~~ увеличится (т.к. станет полож., а все 3 числа отр. быть не могут потому же почему и все полож. не могут).

Пусть $a>0$, а $b, c<0$ $\Rightarrow$ ~~[illegible]~~

~~[illegible]~~ $\Rightarrow$ ~~$a+\frac{11}{b} > b+\frac{11}{c} \Rightarrow b>c$~~ ~~[illegible]~~

Примечание: $a \neq b$, т.к. если $a=b$, то $\frac{11}{b}=\frac{11}{c} \Rightarrow b=c \Rightarrow a=b=c$, а по усл. это не так.

$b>c$, т.к. если нет, то $c>b \Rightarrow \frac{11}{c} < \frac{11}{a} \Rightarrow b+\frac{11}{c} < c+\frac{11}{a} \Rightarrow$

$a>0>b>c$

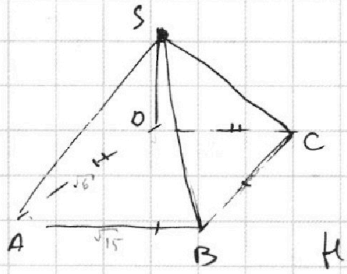
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

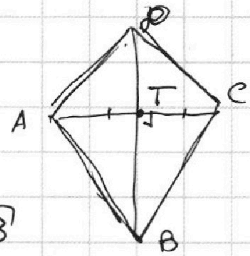
Задача № 7



$\angle ADC = 90^\circ$, т.к. в $\triangle ADC$: $AD^2 + DC^2 = 12 = AC^2$

Пусть $SD = x \Rightarrow$ по т. Пифагора
для $\triangle ADS$: $AS = \sqrt{6 + x^2}$

Найдём BD:



$T = DB \cap AC$

т.к. $AD = DC$, а $AB = CB$, то
BD – сер. пер. к AC
$\Rightarrow BT = \sqrt{AB^2 - AT^2} = \sqrt{15 - 3} = 2\sqrt{3}$

$DT = \sqrt{AD^2 - AT^2} = \sqrt{6 - 3} = \sqrt{3} \Rightarrow BD = 3\sqrt{3} \Rightarrow$

для $\triangle DSB$ по т. Пифагора: $BS = \sqrt{SD^2 + BD^2} = \sqrt{x^2 + 27}$

$\Rightarrow AS + BS = \sqrt{x^2 + 6} + \sqrt{x^2 + 27} = 2\sqrt{3} + \sqrt{15}$

$\Rightarrow \cancel{x^2} + 6 = \cancel{x^2} + 27 + 12 + 15 + 12\sqrt{5} - 2\sqrt{x^2 + 27}\,(2\sqrt{3} + \sqrt{15})$

$\Rightarrow 2\sqrt{x^2 + 27}\,\sqrt{3}\,(2 + \sqrt{5}) = 48 + 12\sqrt{5} \Rightarrow$

$\sqrt{x^2 + 27} = \dfrac{24 + 6\sqrt{5}}{2\sqrt{3} + \sqrt{15}} = \dfrac{24 + 6\sqrt{5}}{\sqrt{12} + \sqrt{15}} = \dfrac{(\sqrt{15} - \sqrt{12})(24 + 6\sqrt{5})}{3}$

$\Rightarrow x^2 + 27 = \dfrac{(27 - 2 \cdot 3 \cdot 2\sqrt{5}) \cdot 36 (16 + 5 + 8\sqrt{5})}{9}$

$x^2 = 4(27 - 12\sqrt{5})(21 - 8\sqrt{5}) - 27 = 4(567 - 216\sqrt{5} - 252\sqrt{5} +$

$+ 480) - 27 = 4(1047 - 468\sqrt{5}) - 27 = 4161 - 1872\sqrt{5}$

$\Rightarrow x = \sqrt{4161 - 1872\sqrt{5}}$ $\quad S_{ADCB} = \dfrac{AC \cdot BD \cdot \sin 90^\circ}{2} = \dfrac{2\sqrt{3} \cdot 3\sqrt{3}}{2} = 9$

$\Rightarrow V_{SABCD} = \dfrac{1}{3}\sqrt{4161 - 1872\sqrt{5}} \cdot 9$

б): шар тоже симм. отн-но $SOB \Rightarrow$ его центр. лежит в SDB, при том он касается SD и $DB \Rightarrow$ он лежит на бисс. $\angle SDB$

Ответ: а) $3\sqrt{4161 - 1872\sqrt{5}}$.

Очевидно, что пирамида симм. от-но пл-ти SDB

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача 1 продолж.

6. $\frac{\sin 2x}{\cos 2x} - 1 + \frac{\cos(x-\frac{\pi}{4})}{\sin(x-\frac{\pi}{4})} = 0$

$\frac{12\sin x\cos x}{\cos^2 x - \sin^2 x} - 1 + \frac{\cos x + \sin x}{-\cos x + \sin x} = 0$

Пусть $\cos x + \sin x = a$
$-\cos x + \sin x = b$

$\Rightarrow 12\frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{1-\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} + \frac{\cos x + \sin x}{-\cos x + \sin x} - 1 = 0$

$\Rightarrow \sin x = \frac{a+b}{2}$

$\cos x = \frac{a-b}{2}$

$\frac{12\frac{(a-b)}{a+b}}{1-\frac{(a-b)^2}{(a+b)^2}} + \frac{a}{b} - 1 = 0$ $\quad \frac{12\frac{(a-b)}{a+b}}{\frac{(a+b)^2-(a-b)^2}{(a+b)^2}} + \frac{a}{b} - 1 = 0$

$\frac{12(a-b)(a+b)}{4ab} + \frac{a}{b} - 1 = 0$ $\quad 3a^2 - 3b^2 + a^2 - ab = 0$

$4a^2 - 3b^2 - ab = 0$ $\quad 4a^2 - ab - 3b^2 = 0$ $\quad D = b^2 + 48b^2 = (7b)^2$

$\Rightarrow a = \frac{b \pm 7b}{8} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a = b \\ a = -\frac{3}{4}b \end{array}\right.$

1) $a = b \Rightarrow \cos x - \sin x = \cos x + \sin x \Rightarrow \sin x = 0$

$\Rightarrow \operatorname{tg} 2x = 0 \rightarrow \operatorname{ctg}(x - \frac{\pi}{4}) = 1$ но т.к. $\sin x = 0 \Rightarrow$

$x = \pi n$

$\cos + \sin = -1,5(\sin - \cos)$

$\cos + \sin = -1,5\sin + 1,5\cos \Rightarrow \cos - 2\sin = 0$

$\sqrt{5}(\cos\varphi\cos x - \sin\varphi\sin x) = \sqrt{5}\cos(x + \arccos\frac{1}{\sqrt{5}}) = 0$

$\Rightarrow x + \arccos\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\pi}{2} + \pi n$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

2

$$\frac{2\sin x\cos x}{\cos^2-\sin^2} = \frac{2tgx}{1-tg^2x} = \frac{2\frac{\sin}{\cos}}{1-\frac{\sin}{\cos}} = \frac{2\sin}{\cos-\sin}$$

$$\frac{\cos x-\frac{\pi}{4}}{\sin x-\frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{\sqrt2}{2}\cos x+\frac{\sqrt2}{2}\sin x}{\cos x\frac{\sqrt2}{2}-\sin x\frac{\sqrt2}{2}}$$

a

$$\frac{\sqrt2\frac{\sin}{\cos}}{1-\frac{\sin^2}{\cos^2}} - 1 + \frac{\cos x+\sin x}{\cos x-\sin x} = 0$$

b

$$\frac{12\frac{a-b}{a+b}}{1-\frac{(a-b)^2}{(a+b)^2}} - 1 + \frac{a}{b} = 0 \qquad \frac{12\frac{a-b}{\cancel{a+b}}}{\frac{-(a-b)^2+(a+b)^2}{(a+b)^2}} - 1 + \frac{a}{b}$$

$6\ tg2x =$

$$\frac{12(a-b)}{4ab} - 1 + \frac{a}{b} = 0 \qquad \frac{3(a-b)}{a} - b + a = 0$$

$3(a-b)-ab+a^2=0$ $\quad a^2 \quad \sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right) =$

$a^2=\sin2x+1 \qquad \cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right) = \boxed{\cos x+\sin x} = \frac{\sqrt2}{2} - \frac{\sqrt2}{2}$

$3\sin x - \cos^2x+\sin^2x + \sin2x+1 = 0$

~~$\sin2x-\cos2x$~~ $\quad 1 \quad -\frac{\sqrt2}{2}(\cos x-\sin x)$

$D=b^2+$

$\cos \ + \ \sin$

$0 \quad -1 \quad \sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt2}{2}$

~~$\sin x\cos x = \cos x\sin x$~~

$6\ tg2x=\frac{3}{2}$

$ctg\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$

$D = \frac{-\frac{b}{2}}{b} = -\frac{1}{2} \quad tg2x=\frac14$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

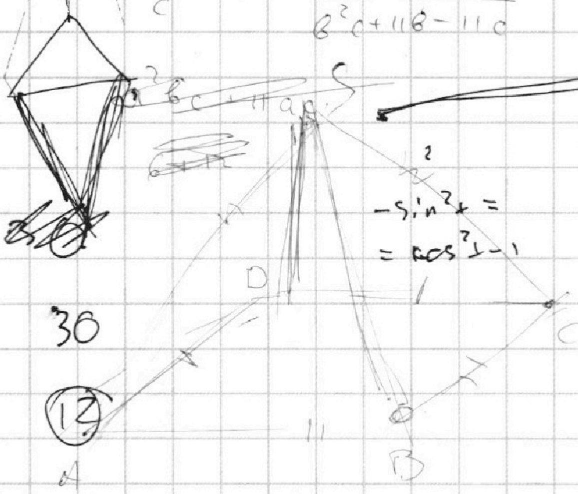
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$a + \frac{11}{b} = b + \frac{11}{c} = c + \frac{11}{a}$

$a = b + \frac{11}{c} - \frac{11}{b} = \frac{bc + 11b - 11c}{bc}$

$b + \frac{11}{c} = c + \frac{11bc}{b^2c + 11b - 11c}$



$tg\,2x = \frac{\sin 2x}{\cos 2x} = \frac{2\sin x \cos x}{\cos^2 x - \sin^2 x} =$

$-\sin^2 x = \cos^2 x - 1$

$= \frac{2\,tg x}{1 - tg x}$

30

12

$ctg\left(x - \frac{\pi}{4}\right) =$

$= \frac{\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{\cos x \frac{\sqrt{2}}{2} + \sin x \frac{\sqrt{2}}{2}}{\cos \frac{\sqrt{2}}{2} - \sin \frac{\sqrt{2}}{2}} =$

$\ln e = \frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x}$

$\sqrt{1 - a^2}$

$x < 2,60$

$\frac{12 \sin x \cos x}{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)} + \frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x} - 1 = 0$

$12\frac{(a+b)(a-b)}{ab} = 1 \qquad 12a^2 - 12b^2 = ab \qquad 12a^2 - ab - 12b^2 = 0$

$D = b^2 + 4 \cdot 12^2 \cdot b^2 = b^2(1 + 24^2)$

$\frac{-b \pm b\sqrt{24^2 + 1}}{24} = a$

ОДЗ: $x > 1$

$\ln^2(x-1) - (x-2)(\ln 3 + \ln(x-1)) + \ln 3 \cdot \ln(x-1) \geq 0$

$a^2 - (x-2) \cdot b - (x-2)a + ab$

1600
240
32

$4188 - 27$ 4161

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$-2x^2+3a=9$ $\quad -2x^2+8=9$ $\quad -2x^2$

$2x^2=-1$

$\frac{156}{6}=16$

$936=6\cdot(6+150)=36\cdot16=3^2\cdot2^6$

$a>b>c$

$\frac{11}{a}<\frac{11}{b}$

$a>b>c$

$-\frac{2}{3}x^3+ax=3x$

$27a-81=-3a-1$

$-\frac{2}{3}x^2+a=3$

$30a=80$

$x^2=\frac{3a+1}{2}$

$a>0>c>b$

$\frac{2}{3}x^2=a-3$

$a=\frac{8}{3}$

$a>c>b$

$-\frac{2}{3}x^3+ax=-\frac{x}{3}$

$a>3$

$\frac{11}{c}<\frac{11}{b}$

$x=\sqrt{\frac{3a-9}{2}}$

$a=\frac{82}{24}=\frac{41}{12}$

$-\frac{2}{3}x^2+a=-\frac{1}{3}$

$\frac{2}{3}x^2=a+\frac{1}{3}$

$b+\frac{11}{c}$ $\quad c+\frac{11}{a}$

$24a=82$

$\frac{41}{4}+1=$

$a>b>c$

$(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$

$f(f(x))=x$

$=11,25$

$-7>-8$

x_1x_2

27
41
27

$a>0>b>c$

$-\frac{11}{7}$ $\quad -\frac{11}{b}$

108

1107

$a>0>c>b$

$a+\frac{11}{b}$ $\quad b+\frac{11}{c}$

$a+\frac{11}{b}$

$a+\frac{11}{b}=b+\frac{11}{c}=c+\frac{11}{a}$

$c+\frac{11}{a}<a+\frac{11}{b}$

$c+\frac{11}{a}$

81
12
16 2
81 2
97

$\frac{135}{12}=\frac{45}{4}$

$a+\frac{11}{b}$ $\quad c$

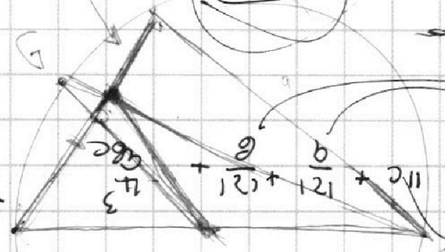
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\frac{a\sqrt{b^2-a^2}}{a+b} = a(b-a)\ldots$ $\quad \frac{a\cdot\sqrt{b-a}}{\sqrt{b+a}}$



$\frac{b\sqrt{b^2-a^2}}{a+b} = \frac{b\sqrt{b-a}}{\sqrt{b+a}}$

$\left(\frac{b\sqrt{b-a}}{\sqrt{b+a}} - \frac{\sqrt{b^2-a^2}}{2}\right)^2 +$

$\left(b^2-2ab+a^2\right)(b-a) =$

$= b^3 - b^2a - 2ab^2 + 2a^2b + a^2b - a^3$

$a^2 + \frac{a^2(b^2-a^2)}{(a+b)^2} = \frac{(a^2+ab)^2 + a^2b^2 - a^4}{(a+b)^2} = \frac{2a^3b + 2a^2b^2}{(a+b)^2} =$

$b^3 - a^3 - 3b^2a + 3a^2b + a^3 + a^2b$

$\frac{b^2(b-a)}{a+b} + \frac{b^2 - a^2}{4} - \frac{b\sqrt{b-a}\,\sqrt{b+a}\,\sqrt{b-a}}{\sqrt{b+a}} + \frac{a^2}{4} =$

$b^3 - 3b^2a + 4a^2b$

$= \frac{b^2(b-a)}{a+b} + \frac{b^2}{4} - b(b-a) = \frac{b^2(b-a) - b(b^2-a^2)}{a+b}$

$+ \frac{b^2}{4} = \frac{a^2b - b^2a}{a+b} + \frac{b^2}{4} = \frac{4(a^2b - b^2a) + b^2(a+b)}{4(a+b)}$

$\frac{\frac{2ab(a^2+ab)}{a+b}}{\frac{4a^2b - 3b^2a + b^3}{4}} = \frac{8a^2b(a+b)}{4a^2b - 3b^2a + b^3} = \frac{2a^2b(a+b)}{(a+b)(b^2-4ab)} = \frac{2a^2}{b^2-4a}$

$\frac{b^3 - 3b^2a + 4a^2b}{b^3 + b^2a} \qquad \frac{b+b}{b^2-4ab}$

$\frac{2}{23} \qquad 46a^2$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$a \quad aq \quad aq^2 \qquad a^3q^3 = 13^{180}\cdot 17^{180} \qquad aq = 13^{60}\cdot 17^{60}$

$13^{59}\cdot 17^{60},\ \boxed{13^{60}\cdot 17^{60}},\ 13^{61}\cdot 17^{60} \qquad 120^2 \quad 61^2 \quad \cancel{60\cdot 60} \quad 0 \to 60 \to 61$

$\cancel{x>y>z}$ нет.

$x \quad 1 \quad -3 \quad 9 \qquad \frac{1\,(1-(-3)^3)}{4} = 7$

$x>z>y$
88

$\ln^2(x-1) - (x-2)(\ln 3 + \ln(x-1))$

$(\ln 3)^2 + 4(x-2)(\ln 3 + \ln(x-1)) \qquad 0 \to 120 \qquad \ln^2(x-1) + \ln(x-1)(\ln 3 - x + 2)$

$y' = -\frac{2}{3}\cdot 3x^2 + a =$

$9a^2 + 4\cdot 88^2 a^2 = a \qquad -2x^2 + a = \quad x^2 = \frac{a}{2}$

$(\ln 3 - (x-2))^2 + 4(x-2)\ln 3$

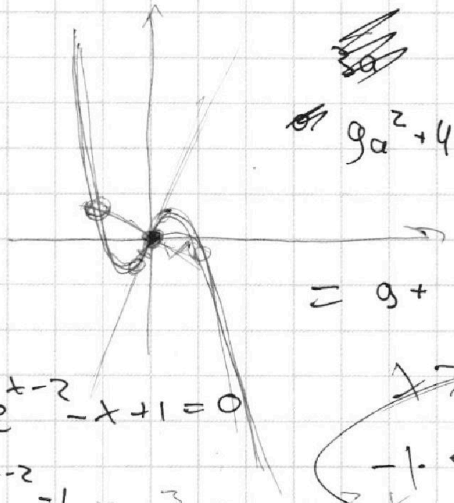
$= 9 + \qquad e^{x-2} = x-1$

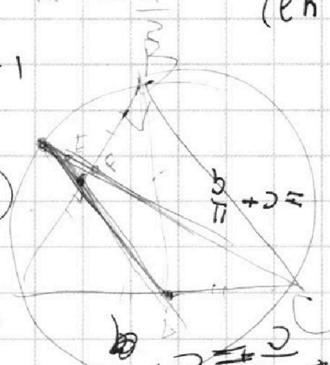
$e^{x-2} - x + 1 = 0$

$x > 1 \qquad -1 \qquad -2$

$e^{x-2} - 1 \qquad -\frac{2}{3}x^3 + ax = 3x$

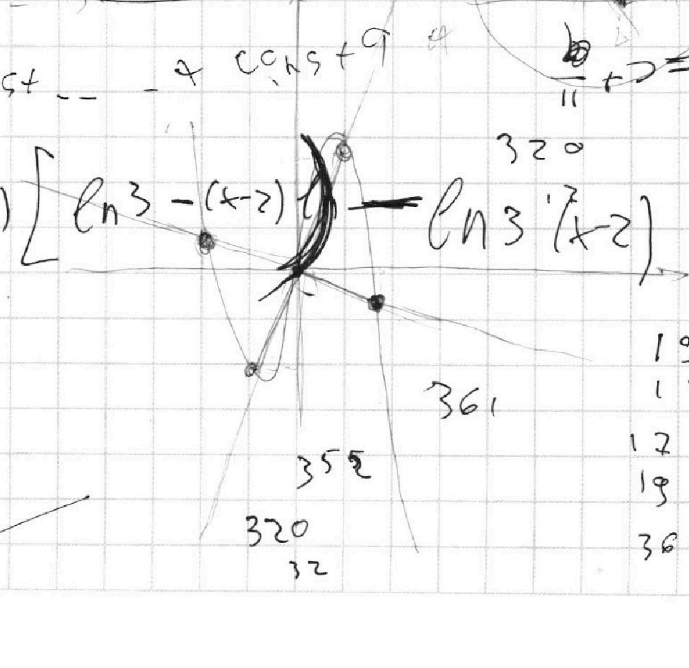
$a^2 - const \quad + const + 9$





320 332

$\ln^2(x-1) + \ln(x-1)\left[\ln 3 - (x-2)\right] - \ln 3\,(x-2)$ 341



$y>z>x$

$z>x>y$

361 $\quad 19^2 \quad 19 \quad 171 \quad 19 \quad 361$

352 $\quad 320 \quad 32$