



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 11



1. [4 балла] Решите неравенство

$$|x^3 + 4| + |x^2 - 1| \leq |x^3 - x^2 + 5|.$$

2. [4 балла] Сколько существует троек натуральных чисел  $(a; b; c)$  таких, что они образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию, а их произведение  $abc$  равно  $2^{150} \cdot 3^{300}$ ?

3. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел  $(x; y)$ , удовлетворяющие уравнению

$$x^2(y - 2) - x(13y - 27) + 44y - 94 = 0.$$

4. [5 баллов] Вокруг треугольника  $ABC$  описана окружность  $\Omega$ . Точки  $D$  и  $E$  – середины сторон  $AB$  и  $AC$  соответственно,  $CF$  – биссектриса угла  $C$  треугольника  $ABC$ . Прямые  $ED$  и  $CF$  пересекаются в точке  $G$ , принадлежащей  $\Omega$ . Найдите углы треугольника  $ABC$ , если известно, что площадь треугольника  $BCF$  в 16 раз больше площади треугольника  $DGF$ .

5. [4 балла] На координатной плоскости нарисован квадрат, все вершины которого лежат на графике функции  $y = x^5 + ax$ . Известно, что одна из диагоналей квадрата лежит на прямой  $y = -3x$ , а центр совпадает с началом координат. Найдите значение параметра  $a$  и сторону квадрата.

6. [5 баллов] Числа  $a$ ,  $b$  и  $c$  не все равны между собой, и при этом

$$a + \frac{5}{b} = b + \frac{5}{c} = c + \frac{5}{a}.$$

Найдите минимально возможное значение произведения  $abc$ .

7. [6 баллов] Равнобедренный треугольник  $ABC$  ( $AB = BC$ ) вписан в окружность  $\omega$ , а на дуге  $AC$ , не содержащей точку  $B$ , взяты точки  $E$  и  $D$  так, что отрезки  $AD$  и  $CE$  пересекаются в точке  $F$ . На лучах  $EA$  и  $DC$  отметили точки  $X$  и  $Y$  соответственно таким образом, что  $AX = CF$  и  $CY = AF$ . Найдите площадь четырёхугольника  $BXFY$ , если  $BF = 17$ ,  $XY = 31$ .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



|                                     |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                                   | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1 (1)

$$|x^3 + 4| + |x^2 - 1| \leq |x^3 - x^2 + 5|$$

$$|x^3 + 4| + |1 - x^2| \leq |x^3 - x^2 + 5| \quad *$$

Мы знаем, что  $|a| + |b| \geq |a + b|$

(знак равенства если  $a$  и  $b$  одного знака) тогда

$$|x^3 + 4| + |1 - x^2| \geq |x^3 - x^2 + 5|$$

Но ~~по условию~~ из  $*$   $|x^3 + 4| + |1 - x^2| \leq |x^3 - x^2 + 5|$ ,

тогда тогда наше нерав-во име-  
ло решение нам тогда тогда

$$|x^3 + 4| + |1 - x^2| = |x^3 - x^2 + 5|, \text{ а это}$$

верно, как говорилось ранее, если

$$\begin{cases} x^3 + 4 \geq 0 \\ 1 - x^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 \geq -4 \\ (1-x)(1+x) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \sqrt[3]{-4} \\ (1-x)(1+x) \geq 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x^3 + 4 \leq 0 \\ 1 - x^2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 \leq -4 \\ (1-x)(1+x) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \sqrt[3]{-4} \\ (1-x)(1+x) \leq 0 \end{cases}$$

$$(x^3 \geq -4 \Leftrightarrow x \geq \sqrt[3]{-4}) \text{ (и.к. } \sqrt[3]{x} \text{ определен при всех } x)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                                     |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                                   | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1)  $\sqrt{1-x^2}$

$\begin{cases} x \geq -\sqrt[3]{4} \\ (1-x)(1+x) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [-1; 1]$

$-\sqrt[3]{4} < -1 \quad (\sqrt[3]{4} > 1, 4 > 1)$

$\begin{cases} x \leq -\sqrt[3]{4} \\ (1-x)(1+x) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-\infty; -\sqrt[3]{4}] \cup \emptyset$

и.е.  $\begin{cases} x \geq -\sqrt[3]{4} \\ (1-x)(1+x) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-\infty; -\sqrt[3]{4}] \cup [-1; 1]$

Ответ:  $\emptyset \quad (-\infty; -\sqrt[3]{4}] \cup [-1; 1]$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

|                          |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                                   | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 2 (1)

Мы знаем, что если  $a, b, c$  образуют в указанном порядке ариф. прогрессию, то  $ac = b^2$  т.е.

$$abc = 2^{150} \cdot 3^{300}$$

$$b^3 \text{ т.е. } b = 2^{50} \cdot 3^{100} \text{ тогда}$$

$$bc = 2^{100} \cdot 3^{200} \text{ и мы знаем}$$

$$\text{что } c = d^2 a \text{ т.е. } d^2 a^2 = 2^{100} \cdot 3^{200} \text{ или}$$

$$da = 2^{50} \cdot 3^{100} \text{ т.е. } c = d \cdot 2^{50} \cdot 3^{100} \text{ и}$$

$$a = \frac{2^{50} \cdot 3^{100}}{d} \Rightarrow 1. \text{ тогда } c \text{ было}$$

натуральным  $d$  должно быть

натуральным или  $d = k^2 \cdot 2^x \cdot 3^y$  где  $(k, 2) = 1, (k, 3) = 1$  ( $x \geq -50, y \geq -100$ )

2. тогда  $a$  было натуральным

$$2^{50} \cdot 3^{100} : d \text{ или } d = k^2 \cdot 2^x \cdot 3^y \text{ где } x \leq 50$$

$$y \leq 100, \quad (k, 2) = 1, (k, 3) = 1 \quad (x \geq 0, y \geq 0) \text{ знаем}$$

мы выяснили, что

$$(a, b, c) = (2^{50-x} \cdot 3^{100-y}, 2^{50} \cdot 3^{100}, 2^{50+x} \cdot 3^{100+y})$$

~~и знаем максимум  $54 \cdot 10^4$~~   
(если  $k \neq \pm 1$ , то или  $a$  или  $c \notin \mathbb{N}$ )

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                                   | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 2(2)

т. к.  $x \in \{0, 1, \dots, 50\}$   $y \in \{0, \dots, 100\}$

51 вариант выбора  $x$ , 101 вариант

$y$

Заметим, что среди

наших троек будут и тройки -

(если  $k = -1$ , то ~~это~~ хотя бы

одно число из тройки не  $\in \mathbb{N}$ )

значит  $d = 2^x \cdot 3^y$ , где  $x \in \{-50, \dots, 50\}$

$y \in \{-100, -99, \dots, 99, 100\}$  т. е.

всего чисел  $101 \cdot 201 = 20301$

Заметим, что среди наших

прогрессий будут, как и

возрастающие так и убыва-

ющие, так и равные числа,

когда  $d = 1$

Ответ:  $101 \cdot 201 = 20301$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



|                          |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                                   | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№3(1)

$$x^2(y-2) - x(13y-27) + 44y - 94 = 0$$

$$x^2(y-2) - x(13y-26) + 44(y-2) + x - 6 = 0$$

$$x^2(y-2) - 13x(y-2) + 44(y-2) = 6 - x$$

$$(y-2)(x^2 - 13x + 44) = 6 - x \quad (*) \quad (\text{По алгоритму Евклида})$$

Применяем ЭВЭД  $x^2 - 13x + 44$  и  $6 - x$

$$(x^2 - 13x + 44; 6 - x) = (-7x + 44; 6 - x) =$$

$$= (-7x + 44; x - 6) = (2; x - 6), \text{ но}$$

мы знаем, что из  $(*)$   $6 - x \mid x^2 - 13x + 44$ ,

но мы выясним, что из

обидных делителей это  $\pm 1, \pm 2$ ,

$$\text{тогда } x^2 - 13x + 44 = \pm 1, \pm 2$$

$$1) x^2 - 13x + 44 = 1$$

$$x^2 - 13x + 43 = 0 \quad \text{т.к. квадратный трёхчлен унитарный,}$$

$$43 \equiv \pm 1 \pm 43$$

из этих чисел или два корня  $\in \mathbb{Z}$ ,  
либо не получим значений в этом и во  
всех остальных случаях

(т.в.в.в.)  $\Rightarrow$

нет решений в  $\mathbb{Z}$

всех следующих  
случаях (2, 3, 4) мы  
имеем корни среди  
делителей свободного  
члена

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                                   | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№3621

$$2) x^2 - 13x + 44 = -1$$

$$x^2 - 13x + 45 = 0$$

$$45 \div: \pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 9, \pm 15, \pm 45$$

но никакие 2 числа не дают

в сумме 13 (все они нечетные  $\Rightarrow$

сумма четная)  $\Rightarrow$  нет решений в  $\mathbb{Z}$

$$3) x^2 - 13x + 44 = 2$$

$$x^2 - 13x + 42 = 0$$

$$x = 6, x = 7 \Rightarrow 6 - x = 0, 6 - x = -1$$

$$y - 2 = 0 \quad \downarrow \quad (y - 2) \cdot 2 = -1$$

$$x = 6, y = 2, \quad \downarrow \quad \emptyset$$

$$4) x^2 - 13x + 44 = -2$$

$$x^2 - 13x + 46 = 0$$

$$46 \div: \pm 1, \pm 2, \pm 23, \pm 46$$

никакие 2 числа не равны 13  $\Rightarrow$

в  $\mathbb{Z}$  нет решений

ответ (6; 2)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

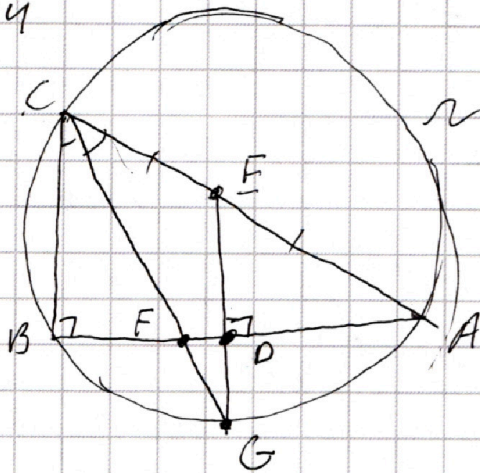
Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

24



1. т.к.  $GE \perp AC$  и  $GE \perp CF$   
то  $G$  — середина  $AC$   
т.к.  $AB$  не содержит  
углов  $\angle \neq (\angle ABG \text{ и } \angle A)$

2. т.к.  $D$  — с.р.  $AB$ , то  
 $DG \perp AB$  ( $ABG$  — п.о.  $\Delta$ )

3 т.к.  $E, D, G$  — одна линия,  
то  $ED \perp AB$

и т.к.  $ED \parallel BC$ , то  
~~то~~  $AB \perp BC$  т.е.

$\angle B = 90^\circ$ .

4. т.к.  $S_{BCF} = 16$  ~~и~~  $DG \perp AC$

то т.к.  $DG \parallel BC$  ( $ED \parallel BC$ ),

то  $\Delta BCF \sim \Delta FGD$ .  $\Rightarrow$

из к подобия  $= 4$  (т.к.  $S$   
больше в  $4^2$  раз)

5.  $BF = 4FD$  и т.к.  $BD = DA$ ,

то  $BF = 4x$ ,  $DA = 5x$

$BF = 4x$ ,  $DA = 5x$

6. т.к.  $\frac{BF}{FA} = \frac{BC}{CA}$

(сб. ссс.), то

$$\frac{BC}{CA} = \frac{4x}{x+5x} = \frac{2}{3}$$

если  $BC = 24$ , то

$$AC = 36, \text{ а}$$

$$AB = \sqrt{96^2 - 46^2} =$$

$$= \sqrt{54} \text{ значит}$$

$$\angle B = 90^\circ$$

$$\angle A = \arcsin \frac{2}{3}$$

$$\angle C = \arccos \frac{2}{3}$$

ответ  $\angle B = 90^\circ$

$$\angle A = \arcsin \frac{2}{3}$$

$$\angle C = \arccos \frac{2}{3}$$



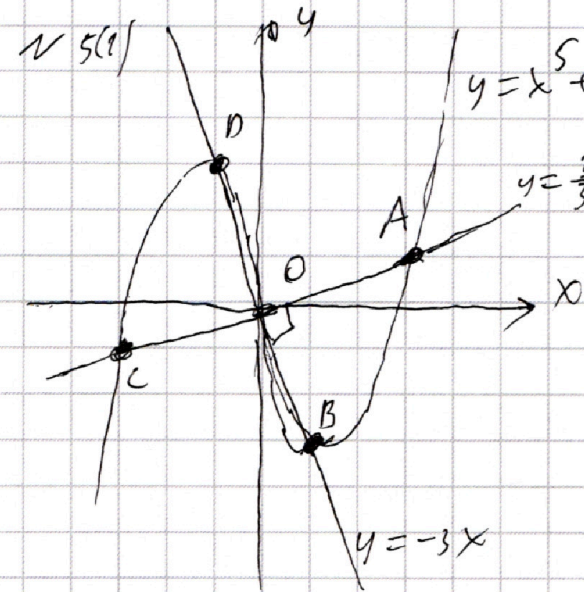
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                                   | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Проведём  
прямую  $y = \frac{1}{3}x$

1. она  $\perp y = 3x$

2. т.к. мы по-  
нимаем, что

$y = 3x$  является касат.  
касательная  $y = x^5 + ax$

вызывает 2 точки

(т.к. по усл. эта прямая соде-  
ржит диагональ, а точка  
O центр, то точки B и D

(пересечение  $y = -3x$  и  $y = x^5 + ax$ )

являются расположенными так, как  
показано на рис.) из симметрии

относительно O ( $y = x^5 + ax$  — нечёт-

ная ( $-(x^5 + ax) = (-x^5) + a(-x)$ ) Мы  
(оценим и квадрата)

понимаем, что  $OB = OD$  и значит

$y = \frac{1}{3}x$  содержит диагональ

квадрата (проходит через O, BD + AC)

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                                   | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

25(2)

(A, C точки пересечения  $y = \frac{1}{3}x$   
и  $y = x^5 + ax$ )

Заметим, что <sup>точек пересечения</sup> ~~линии~~ <sup>(а не больше)</sup> ~~линии~~  $y = \frac{1}{3}x$ ,  $y = x^5 + ax$  и  $y = -3x$ ,  $y = x^5 + ax$

$$\text{т.е. } x^5 + ax = kx \Leftrightarrow x(x^4 + a - k) = 0 \Leftrightarrow$$

$$x(x^2 + \sqrt{k-a})(x^2 - \sqrt{k-a}) = 0$$

$$x^2 + \sqrt{k-a} > 0 \quad (\sqrt{k-a} > 0)$$

$$x(x - \sqrt[4]{k-a})(x + \sqrt[4]{k-a}) = 0$$

$$x = 0, \quad x = \sqrt[4]{k-a}, \quad x = -\sqrt[4]{k-a}$$

(Мы знаем, что ~~граф~~ ~~прямых~~  
пересекающихся  $y = x^5 + ax$  есть  
еще 2 точки пересечения  
(кроме 0) это вершины  
квадрата (они содержат  
диагонали) а больше,  
как мы выяснили ранее  
точек пересечения не будет.

Будем обозначать  $A_0$  координату  
точки A по x

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№5(3)

$$\text{но } A_y = \frac{1}{3} x_0 \quad (A \in y = \frac{1}{3}x)$$

$$\text{Если } A_x = x_0, \text{ то } B_y = -x_0.$$

(т.к. ABCD квадрат  $AO = BO$ , и

по ранее доказанному  $AO \perp BO$ , значит

что при повороте на  $+90^\circ B \rightarrow A$

$$\text{т.е. } B_y = -A_x) \quad B_x = \frac{1}{3} x_0 \quad (B \in y = -3x)$$

т.к. A и B  $\in x^5 + ax$ , то

$$\begin{cases} x_0^5 + ax_0 = A_y & (x_0 \neq 0) \\ (\frac{1}{3}x_0)^5 + a \frac{1}{3}x_0 = B_y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0^4 = -a + \frac{1}{3} \\ x_0^4 = -81a + 3^5 \cdot (-1) \end{cases}$$

$$-a + \frac{1}{3} = -81a + 3^5$$

$$80a = -3^5 - \frac{1}{3} = -\frac{3^6 + 1}{3} = -\frac{730}{3}$$

$$a = -\frac{73}{24}$$

$$x_0^4 = \frac{73}{24} + \frac{1}{3} = \frac{73 + 8}{24} = \frac{81}{24} = \frac{27}{8}$$

$$x_0^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$

$$OA^2 = A_x^2 + A_y^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{9} \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{30\sqrt{3}}{18\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{5\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}$$

$$AB^2 = 2OA^2 = \frac{10\sqrt{3}}{3\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{6}}{3}$$

$$\text{сторона квадрата} = \sqrt{\frac{5\sqrt{6}}{3}}$$

$$\text{Ответ: } a = -\frac{73}{24},$$

$$\sqrt{\frac{5\sqrt{6}}{3}}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

**МОТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№6 (1)

$$a + \frac{5}{b} = b + \frac{5}{c} \Rightarrow abc + 5c = b^2c + 5b \Rightarrow$$

$$a = \frac{5b - 5c}{bc} + b \quad (*)$$

Аналогично с формул группировки  
получим?

$$b = \frac{5c - 5a}{ca} + c \quad (**) \quad c = \frac{5a - 5b}{ab} + a \quad (***)$$

Подставим (\*\*\*) в (\*)

$$a = \frac{5\left(\frac{5c - 5a}{ca} + c\right) + 5c}{\left(\frac{5c - 5a}{ca} + c\right)c} + \frac{5c - 5a}{ca} + c =$$

$$= \frac{25c - 25a}{ca} + \frac{5c - 5a}{ca} + c = \frac{25c - 25a}{5c^2 - 5ac + c^3a} +$$

$$+ \frac{5c - 5a}{ca} + c = \frac{25c - 25a}{c(c^2a - 5a + 5c)} + \frac{5c - 5a + c^3a}{ca}$$

Заметим, что  $b + \frac{5}{c} = c + \frac{5}{a} \Rightarrow$

$$abc = c^2a + 5c - 5a \quad (X) \text{ значит}$$

$$a = \frac{25c - 25a}{c \cdot abc} + \frac{abc}{ca} = \frac{25c - 25a}{abc^2} + b =$$

$$= \frac{5}{bc} \left( \frac{5c - 5a}{ac} \right) + b = \frac{5}{bc} (b -$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№6(2)

$$a = \frac{25c - 25a}{abc^2} + b = \frac{25\left(\frac{5a-5b}{ab} + a\right) - 25a}{ab\left(\frac{5a-5b}{ab} + a\right)^2} + b$$

$$= \frac{25(5a-5b)}{(5a-5b+a^2b)} + b$$

$$из (*) \quad \frac{5b-5c}{bc} = \frac{25(5a-5b)}{5a-5b+a^2b}$$

$a^2b + 5a - 5b = abc$  выводится из

$$c + \frac{5}{a} = a + \frac{5}{b} \text{ так } c (*)$$

$$\frac{5b-5c}{bc} = \frac{25(5a-5b)}{abc} \Rightarrow (b-c)a = 25a - 25b$$

$$ba - ca = 25a - 25b \text{ аналогично}$$

~~можно получить  $cb - ab = 25b - 25c$~~

~~выразим  $ab$  и подставим~~

$$~~cb = 25b + 25c = ca + 25a = 25b~~$$

$$5a - 5b = ab(c-a) \text{ (выводится из)}$$

$$c + \frac{5}{a} = a + \frac{5}{b})$$

$$5ab(c-a) = ba - ca \Rightarrow 5cb - 5ab = b - c \Rightarrow$$

$$a = \frac{5cb + b + c}{5b}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                                   |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~~№ 7(2)~~ № 7(2) у четырех-угольника + диагональ

$$\text{Значит } S_{EKBV} = \frac{1}{2} BF \cdot XY = \frac{17 \cdot 13}{2} =$$
$$= \frac{221}{2} = 110,5$$

Ответ : 110,5

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

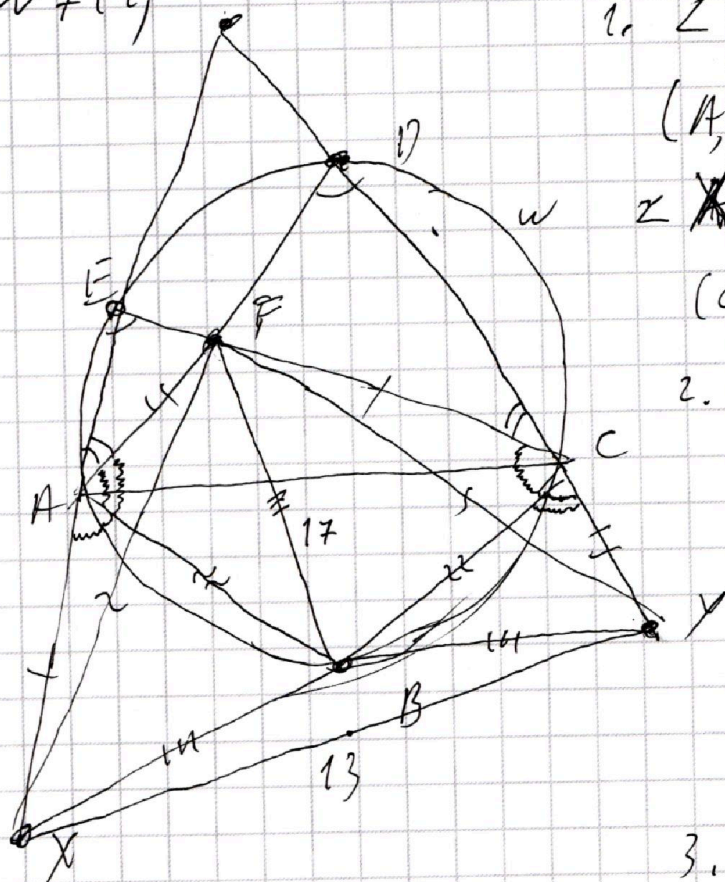
Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№7(2)



1.  $\angle EAD = \angle ECD$

$(A, E, D, C \in \omega) \Rightarrow$

$\angle XAF = \angle FCY$

(смежные)

2. м.к.  $FC = AX$  и

$AF = CY$ , то

по I крив.

$\Delta XAF = \Delta FCY$

$FX = FY$

3.  $\angle ECB = \angle BAX$

$(E, B, A, C \in \omega)$

и м.к.  $BC = AB$  и

$FC = AX$ , то

$\Delta AXB = \Delta FCB$

(по I крив.)

$XB = BF$

Мы получили, что  
они равны, то есть

из этого следует не-  
дoubtedly, что  $BF = BX$ .

4. Если сделать сим-  
метрию относительно  
сер пера к XY, то

$X \rightarrow Y, B \rightarrow B, F \rightarrow F$   
 $(BX = BY, FX = FY) \Rightarrow$

BF останется на месте  $\Rightarrow$  параллельно  
 $\Rightarrow$  BF содержит сер.  $\Rightarrow$  различия для  
пер. к XY т.е.  $BF \perp XY$ .  $\Delta FAB$  и  $\Delta YCB$

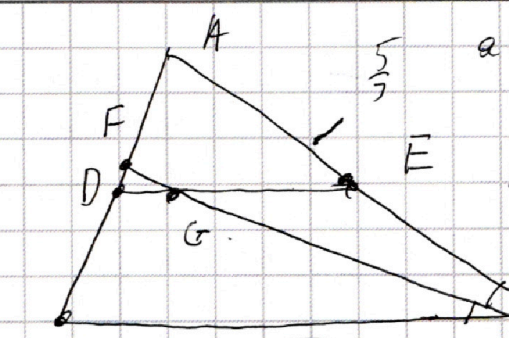
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



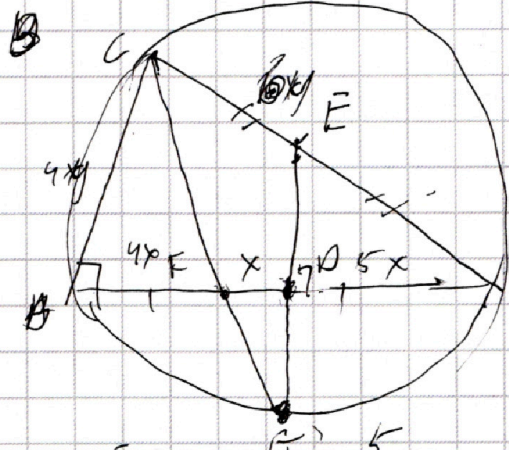
$$abc + 5c = b^2 + 5b$$

$$b^2 + 5b + 5c$$

$$c^2 + 5c - 5a$$

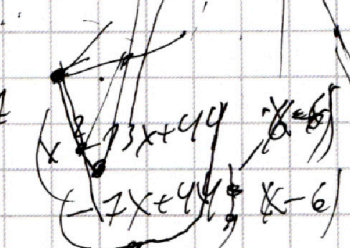
$$a^2 = 5a - 5b$$

$$3abc = 2a^2 + b^2 + c^2$$



$$x = 3x$$

$$(x^2 - 3x + 44)(y - 2)$$



$$6 + x$$

$$81 \cdot 9$$

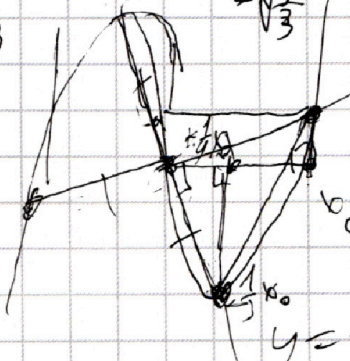
$$729$$

$$730$$

$$b + -6 = 0$$

$$17 \cdot 13$$

$$\begin{array}{r} 17 \\ \times 13 \\ \hline 51 \\ 170 \\ \hline 221 \end{array}$$

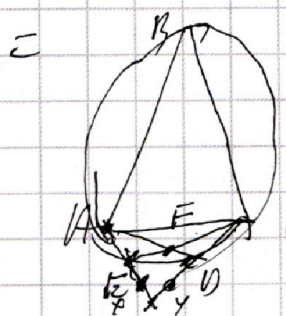


$$y = \frac{1}{3}x$$

$$y = -3x$$

$$\frac{229 \cdot 13}{91} x^2 + \left(\frac{1}{3}x\right)^5 + a - \frac{1}{3}x$$

$$3^3 x^4 + x^4 + a \cdot 3^4 =$$



$$c^4 = a^2 b^2 = b^3 c$$

$$9x^2 + (3x)^5 + 3ax$$

$$\frac{17 \cdot 13}{2}$$

$$\frac{201 \cdot 101}{201} = 101$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} \text{№6(а)} \\ a + \frac{5}{b} = b + \frac{5}{c} &\Rightarrow abc + 5c = b^2c + 5b \\ abc &= b^2c + 5b - 5c \end{aligned}$$

Если приравнять оставшиеся 2  
выражения получим

$$abc = c^2a + 5c - 5a$$

$$abc = a^2b + 5a - 5b$$

Сложим 3 выражения

$$3abc = c^2a + a^2b + b^2c \quad (*)$$

по неравенству Коши о средних

$$\begin{aligned} \frac{c^2a + a^2b + b^2c}{3} &\geq \sqrt[3]{c^2a \cdot a^2b \cdot b^2c} = \\ &= \sqrt[3]{a^3b^3c^3} = abc, \end{aligned}$$

$$\text{Но из } (*) \quad abc = \frac{c^2a + a^2b + b^2c}{3}$$

$$\text{тогда } \frac{c^2a + a^2b + b^2c}{3} = \sqrt[3]{c^2a \cdot a^2b \cdot b^2c}$$

т.е. как мы знаем все 3 числа

целыми даст равенство между

собой

$$c^2a = a^2b = b^2c \quad \text{т.е.}$$

$$c^2 = ab, \quad a^2 = bc, \quad b^2 = ac$$

На одной странице можно оформлять **ТОЛЬКО одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$a + \frac{5}{b} = b + \frac{5}{c} \quad -1 \quad -1 \quad a \quad b \quad c$$

$$a^2 + 5a = b^2 + 5b$$

$$a^2 - b^2 + 5a - 5b = 0$$

$$(a-b)(a+b+5) = 0$$

$$a+b = -5$$

$$a+b+c = 5 \quad a \quad b \quad c$$

$$-1 \quad -1 \quad -2 = -2$$

$$a + \frac{5}{a} = a + \frac{5}{c} = c + \frac{5}{a}$$

$$a+c = -5$$

$$a=c$$

$$a=b=c = -\frac{5}{2}$$

$$c(a+b-b^2+5) = 5b$$

$$c = \frac{5b}{ab-b^2+5}$$

$$a = \frac{5b-5c}{bc} + b$$

$$bc = 5$$

$$b = \frac{5c-5a}{ca} + c$$

$$a = \frac{5 \left( \frac{5c-5a}{ca} + c \right) - 5c}{b}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

