МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 6

1. [4 балла] Решите уравнение

$$4\operatorname{tg} 2x + 1 + \operatorname{ctg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0.$$

2. [4 балла] Сколько существует троек целых чисел $(a; b; c)$ таких, что они образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию, а их произведение abc равно $3^{240} \cdot 7^{240}$?

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$\ln^2(x+2) - (x+1)\ln(4x+8) + (\ln 4)\ln(x+2) \geqslant 0.$$

4. [4 балла] На координатной плоскости нарисован квадрат, все вершины которого лежат на графике функции $y = -2x^3 - ax$. Известно, что одна из диагоналей квадрата лежит на прямой $y = 5x$, а центр совпадает с началом координат. Найдите значение параметра a и площадь квадрата.

5. [6 баллов] Вокруг треугольника ABC описана окружность Ω. Точки D и E – середины сторон AC и AB соответственно, CF – биссектриса треугольника ABC. Лучи DE и CF пересекаются в точке G, принадлежащей Ω. Найдите углы треугольника ABC, если известно, что $\frac{CF}{DF} = \sqrt{\frac{2}{11}}$.

6. [5 баллов] Числа x, y и z не все равны между собой, и при этом

$$x^3 + \frac{10}{y^3} = y^3 + \frac{10}{z^3} = z^3 + \frac{10}{x^3}.$$

Найдите максимально возможное значение произведения xyz.

7. [6 баллов] В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит четырёхугольник $ABCD$, в котором $AB = BC = \sqrt{10}$, $AD = DC = 2$, $AC = 2\sqrt{2}$. Ребро SD – высота пирамиды. Известно, что $SA + SB = 2\sqrt{2} + \sqrt{10}$. Найдите:

а) объём пирамиды;

б) радиус шара, касающегося граней $ABCD$, SAB, SBC и ребра SD.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$4tg2x + ctg(x+\frac{\pi}{4}) + 1 = 0$

$\frac{8tgx}{1-tg^2x} + \frac{1}{tg(x+\frac{\pi}{4})} + 1 = 0$

$\frac{8tgx}{1-tg^2x} + \frac{1-tgx}{1+tgx} + 1 = 0$

Пусть $tgx = a$; $a \neq \pm 1$;

$\frac{8a}{1-a^2} + \frac{1-a}{1+a}^{(1-a)} + 1^{(1-a^2)} = 0$

$\frac{8a + (1-a)^2 + 1 - a^2}{1-a^2} = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 8a + (1-a)^2 + 1 - a^2 = 0 \\ a \neq \pm 1 \end{array}\right.$

$8a + 1 - 2a + a^2 + 1 - a^2 = 0$

$6a + 2 = 0$

$a = -\frac{1}{3}$

$tg x = -\frac{1}{3} \Rightarrow x = arctg(-\frac{1}{3}) + \pi r, r \in \mathbb{Z}$

1) $2x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$

$x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$ $k \in \mathbb{Z}$

2) $x + \frac{\pi}{4} \neq \pi n$

$x \neq -\frac{\pi}{4} + \pi n$ $n \in \mathbb{Z}$

Ответ: $arctg(-\frac{1}{3}) + \pi r, r \in \mathbb{Z}$

$a = x$
$b = qx \Rightarrow abc = q^3x^3 = 3^{240}\cdot 7^{240} \Rightarrow qx = 3^{80}\cdot 7^{80} = b.$
$c = q^2 x$

Тогда $ac = 3^{160}\cdot 7^{160}$ и $a \le c$

$a = 3^{p_1}\cdot 7^{p_2}$ $\quad c = 3^{n_1}\cdot 7^{n_2}$

$p_1 + n_1 = 160$
$p_2 + n_2 = 160$

$p_1 = \{0;1;\ldots;160\}$ Выбрать p_1 есть 160 вариантов
$p_2 = \{0;1;\ldots;160\}$ Выбрать p_2 есть 160 вариантов

Значит выбрать a есть $(160)^2$ вариантов, ~~да~~ на так-же a может быть <0 и поэтому вариантов $2\cdot 25600 = 51200$ при этом c определена однозначно.

Ответ: 51200

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$\ln^2(x+2)-(x+1)\ln(4x+8)+(\ln 4)\ln(x+2)\geq 0$

1) $x+2>0$

$x>-2$

$\ln^2(x+2)-(x+1)\ln 4-\ln(x+2)\cdot(x+1)+(\ln 4)\ln(x+2)\geq 0$

Пусть $\ln(x+2)=t$; $(x+1)=a$

$t^2-a\ln 4-at+t\ln 4\geq 0$

$t(t-a)+\ln 4(t-a)\geq 0$

$(t+\ln 4)(t-a)\geq 0$

$(\ln(x+2)+\ln 4)(\ln(x+2)-x-1)\geq 0$

$(\ln(x+2)-\ln\frac{1}{4})(\ln(x+2)-x-1)\geq 0$

$f(x)=\ln(x+2)$ – монотонно возрастающая функция на ОДЗ

$g(x)=-x-1$ – монотонно убывающая ф-ия

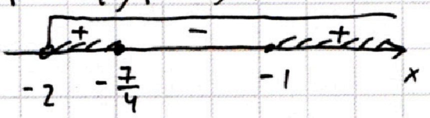
Значит у них не более 1-ой точки пересечения.

Заметим, что при $x=-1$ они равны ($\ln 1=0=-(-1)-1$)

Тогда $q(x)=\ln(x+2)-x-1$ при $x\in(-2;-1]:\leq 0$, при $x\in[-1;+\infty):\geq 0$

Воспользуемся методом рационализации:

$(x+\frac{7}{4})(x+1)\geq 0$



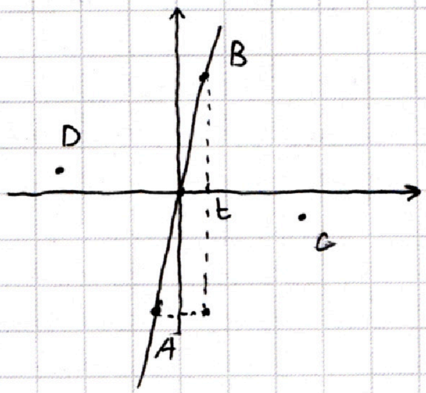
$x\in(-2;-\frac{7}{4}]\cup[-1;+\infty)$

Ответ: $(-2;-\frac{7}{4}]\cup[-1;+\infty)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$A(-t;-5t)$; $B(t;5t)$; $C(5t;-t)$; $D(-5t;t)$ - вершины квадрата. (т.к. диагонали квадрата $\perp$, то C и $D \in y=-\frac{1}{5}x$)

$f(x) = -2x^3 - ax$

1) $f(t) = 5t$

$-2t^3 - at = 5t \mid :t$ $\quad t \neq 0$ иначе квадрат вырождается в точку

$-2t^2 - a = 5$

$t^2 = -\frac{a+5}{2}$

2) $f(-5t) = t$

$250t^3 + 5at = -t \mid :t$

$250t^2 = -1-5a$

$t^2 = -\frac{1+5a}{250}$

3) $-\frac{a+5}{2} = -\frac{1+5a}{250}$

$\frac{a+5}{2} = \frac{1+5a}{250} \mid \cdot 250$

$125(a+5) = 1+5a$

$125a + 625 = 1+5a$

$120a = -624$

$a = -\frac{51}{5}$

4) $t^2 = -\frac{5-\frac{51}{5}}{2} = \frac{13}{5}$

$t = \sqrt{\frac{13}{5}}$

диагональ^2 $= AB^2 = \cancel{\sqrt{4t^2+100t^2}} =$

$= \cancel{2t\sqrt{26}}\ 104t^2$

~~$S_{ABCD} = \frac{d^2}{2} = \frac{AB^2}{2} = \frac{2t\sqrt{26}}{2} = t\sqrt{26} = \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{5}} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{13} = 13\sqrt{\frac{2}{5}}$~~

~~Ответ: $-\frac{51}{5}$; $13\sqrt{\frac{2}{5}}$~~

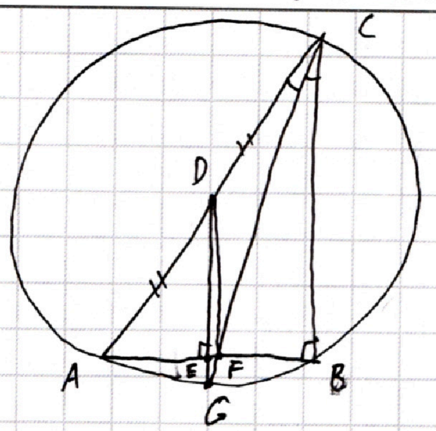
$S_{ABCD} = \frac{d^2}{2} = \frac{AB^2}{2} = 52t^2 = 52 \cdot \frac{13}{5} = \frac{676}{5}$

Ответ: $-\frac{51}{5}$; $\frac{676}{5}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



1) Т.к. $DE \cap CF = G$ и $G \in \Omega$ докажем, что $\angle B = 90^\circ$.

2) Продлим CF до пересечения с Ω в точке K. Как известно прямая пересекает окружность в ≤ 2 точках тогда $K = G$.

3) $G \in DE$ (ср. линии), но одновременно $G \in$ серперу AB, это одновременно выполняется лишь в том случае, если DE и есть серпер $AB \Rightarrow DE \perp AB$ и т.к. $DE \parallel BC$, то и $BC \perp AB \rightarrow \angle B = 90^\circ$.

4) пусть $AB = c$; $BC = a$; $AC = b$.
из свойства бис-сы $\frac{AF}{FB} = \frac{b}{a}$. $AF = c - FB$

$$\frac{c - FB}{FB} = \frac{b}{a}; \quad ac - aFB = bFB \Rightarrow FB = \frac{ac}{a+b}$$

5) по т. Пифагора для $\triangle CFB$: $CF^2 = BF^2 + BC^2 = a^2 + \frac{a^2c^2}{(a+b)^2}$

$$\frac{CF}{DF} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{11}} \Rightarrow \frac{CF^2}{DF^2} = \frac{2}{11} \Rightarrow DF^2 = \frac{11CF^2}{2},$$ тогда $CF^2 - DF^2 = -\frac{9}{2}CF^2$

6) пусть $\angle DCF = \alpha$, тогда по т. косинусов для $\triangle DCF$ имеем

$$DF^2 = CD^2 + CF^2 - 2CD \cdot CF \cdot \cos\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{CD^2 + CF^2 - DF^2}{2CD \cdot CF} = \frac{\frac{b^2}{4} - \frac{9}{2}\left(a^2 + \frac{a^2c^2}{(a+b)^2}\right)}{b\sqrt{a^2 + \frac{a^2c^2}{(a+b)^2}}} =$$

$a = b\cos 2\alpha$
$c = b\sin 2\alpha$

$$= \frac{b^2 - \frac{36 b^2\cos^2 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}}{8b^2\sqrt{\frac{2\cos^2 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}}} = \frac{1 - \frac{36\cos^2 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}}{8\cos 2\alpha\sqrt{\frac{2}{1+\cos 2\alpha}}} = \frac{1 + \cos 2\alpha - 36\cos^2 2\alpha}{8(1+\cos 2\alpha)\cos 2\alpha\sqrt{\frac{2}{1+\cos 2\alpha}}} =$$

$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

$$= \frac{2\cos^2\alpha - 18(2\cos^2\alpha - 1)^2}{16\cos^2\alpha(2\cos^2\alpha - 1)} \cdot \frac{1}{\cos\alpha}$$

Пусть $\cos\alpha = t$

$$t = \frac{2t^2 - 18(2t^2-1)^2}{16t(2t^2-1)}$$

$$32t^4 - 16t^2 = 2t^2 - 18(4t^4 - 4t^2 + 1)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$32t^4 - 16t^2 = 2t^2 - 64t^4 + 64t^2 + 16$

$96t^4 - 82t^2 - 16 = 0$

$t^2 = a$

$96a^2 - 82a - 16 = 0 \,|:2$

$48a^2 - 41a - 4 = 0$

$D = 1681 + 768 = 2449$

$a = \frac{41 \pm \sqrt{2449}}{96} \Rightarrow a = \frac{41 + \sqrt{2449}}{96}$

$\cos 2\alpha = 2t^2 - 1 = 2a - 1 = \frac{41 + \sqrt{2449}}{48} - 1 = \frac{\sqrt{2449} - 7}{48}$

$2\alpha = \angle C = \arccos \frac{\sqrt{2449} - 7}{48}$; $\angle A = \arcsin \frac{\sqrt{2449} - 7}{8}$

~~Ответ: 90°; $\arccos \frac{\sqrt{2449} - 7}{48}$; $\arcsin \frac{\sqrt{2449} - 7}{8}$~~

$$\frac{b^2 - \frac{36 b^2 \cos^2 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}}{4b^2 \sqrt{\frac{2\cos^2 2\alpha}{2\cos^2 \alpha}}} = \frac{\cos^2\alpha - 18(2\cos^2\alpha - 1)^2}{4\cos\alpha(2\cos^2\alpha - 1)} = \cos\alpha$$

$\cos\alpha = t$

$4t^2(2t^2 - 1) = t^2 - 72t^4 + 72t^2 - 18$

$80t^4 - 77t^2 + 18 = 0$

$D = 169$

$t^2 = \frac{77 \pm 13}{160} = \frac{9}{16}; \frac{64}{160}$

$\cos^2\alpha = \frac{9}{16} \Downarrow \cos 2\alpha = \frac{1}{8}$

$\cos^2\alpha = \frac{2}{5} \Downarrow \cos 2\alpha = -\frac{1}{5}$ – не подходит

~~$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha$~~

$\angle C = \arccos \frac{1}{8}$ $\angle A = \arcsin \frac{1}{8}$

Ответ: 90°; $\arccos \frac{1}{8}$; $\arcsin \frac{1}{8}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$x^3+\frac{10}{y^3}=y^3+\frac{10}{z^3}=z^3+\frac{10}{x^3}$$

$$x^3-y^3=\frac{10(y^3-z^3)}{y^3z^3}$$

$$y^3-z^3=\frac{10(x^3-z^3)}{x^3z^3}$$

$$x^3-z^3=\frac{10(x^3-y^3)}{x^3y^3}$$

$$\Rightarrow (x^3-y^3)=\frac{1000(x^3-y^3)}{(xyz)^6}$$

1) $x=y$, ~~но~~ тогда $x^3+\frac{10}{x^3}=x^3+\frac{10}{z^3}\Rightarrow x=z$, что неверно.

2) $x\neq y$ и тогда $\frac{1000}{(xyz)^6}=1\Rightarrow (xyz)^6=1000$

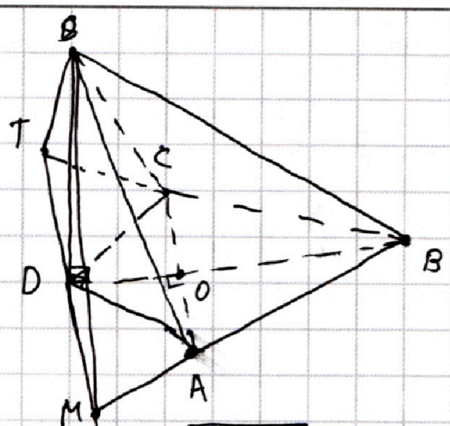
$xyz=\pm\sqrt{10}$

Ответ: $\sqrt{10}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



1) Т.к $AD=DC$ и $AB=BC$, $ABCD$ - дельтоид. и $AC\perp BD$

~~2) $AB=2\sqrt{2}$, $AD=DC=2$ по обрат~~

2) $OC=\frac{1}{2}AC=\sqrt{2}$, $BC=\sqrt{10}$ => по т. Пифагора в $\triangle BOC$ $OB=2\sqrt{2}$ ~~$=BD$~~.

3) Из $\triangle ACD$ по обратной т. Пифагора имеем, что $\angle D=90^\circ$ => $\triangle ADC$ р/б и п/у.
тогда раз DO - высота, то $DO=\sqrt{2}$ и тогда $BD=3\sqrt{2}$

4) ~~$SB=\sqrt{SD^2+BD^2}=\sqrt{SD^2+18}$~~
~~$SA=\sqrt{SD^2+AD^2}=\sqrt{SD^2+4}$~~
~~Пусть $SD^2=x$~~

по т. Пифагора в $\triangle SDA$ и $\triangle SDB$ $\left(\begin{matrix} SD\perp DB \\ SD\perp AD\end{matrix}\right.$ из усл.$\Big)$

$$SD=\sqrt{SB^2-18}=\sqrt{SA^2-4}$$

~~$\sqrt{x+18}+\sqrt{x+4}=2\sqrt{2}+\sqrt{10}\ |\uparrow^2$~~

~~$2x+22+2\sqrt{(x+18)(x+4)}=18+8\sqrt{5}\ |:2$~~

~~$x+11+\sqrt{(x+18)(x+4)}=9+4\sqrt{5}$~~

~~$\sqrt{(x+18)(x+4)}=4\sqrt{5}-2-x\ |\uparrow^2$~~

~~$x^2+22x+72=20+4+x^2-16\sqrt{5}-8x\sqrt{5}+4x$~~

~~$22x+72-24+16\sqrt{5}+8x\sqrt{5}-4x=0$~~

~~$18x+8x\sqrt{5}=-48-16\sqrt{5}\ |:2$~~

~~$9x+4x\sqrt{5}=-24-8\sqrt{5}$~~

~~$x(9+4\sqrt{5})=-24-8\sqrt{5}$~~

~~$x=-\frac{24+8\sqrt{5}}{9+4\sqrt{5}}$~~

$SB^2-14=SA^2$; $SB=2\sqrt{2}+\sqrt{10}-SA$

$(2\sqrt{2}+\sqrt{10}-SA)^2-14=SA^2$

$SA=x$

$8+10+\cancel{x^2}-4x\sqrt{2}-2x\sqrt{10}+8\sqrt{5}=\cancel{x^2}+14$

$4+8\sqrt{5}=4x\sqrt{2}+2x\sqrt{10}\ |:2$

$2+4\sqrt{5}=x(2\sqrt{2}+\sqrt{10})$

$$x=\frac{2+4\sqrt{5}}{2\sqrt{2}+\sqrt{10}}=SA$$

$$SD=\sqrt{\frac{84+16\sqrt{5}}{18+8\sqrt{5}}-4}=$$

$$=\sqrt{\frac{84+16\sqrt{5}-72-32\sqrt{5}}{18+8\sqrt{5}}}=\frac{\sqrt{12-16\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}+\sqrt{10}}$$

$$S_{ABCD}=\frac{1}{2}AC\cdot BD=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{2}\cdot 3\sqrt{2}=6$$

а) $V=\frac{1}{3}S_{ABCD}\cdot SD=\frac{1}{3}\cdot 6\cdot SD=2SD$

б) В плоскости (ABC) проведём через D прямую $\ell \parallel AC$.
~~Тто~~ $\ell\cap BC=T$; $\ell\cap AB=M$ тогда радиус искомой сферы равен радиусу сферы, вписанной в $SMTB$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~~S_{MTB}~~ $\Delta MTB \sim \Delta ACB$

$k = \frac{BO}{BD} = \frac{2}{3}$

$S_{MTB} = \frac{9}{4} S_{ACB} = \frac{9}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} = \frac{9 \cdot 8}{8} = 9$

$V_{SMTB} = \frac{1}{3} S_{пов} \cdot r$ $\qquad TM = \frac{3}{2} AC = 3\sqrt{2}$

$r = \frac{3V}{S_{пов}}$

Далее, зная, что по ТТП $SC \perp BT$ и $SA \perp MB$ можем найти S_{SBM}; S_{SBT}.

~~Из подобия находим~~

Зная SD и TM находим S_{STM}

$S_{пов} = S_{BMT} + S_{STM} + S_{SMB} + S_{SBT}$

$r =$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

черновик

1. $4tg2x + ctg(x+\frac{\pi}{4}) + 1 = 0$

$ctg(x+\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{tg(x+\frac{\pi}{4})}$

1) $2x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$
$x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$

2) $x + \frac{\pi}{4} \neq \pi n$
$x \neq -\frac{\pi}{4} + \pi n$

$4tg2x = \frac{8tg^2x}{1-tg^2x}$

$\frac{1}{tg(x+\frac{\pi}{4})} = \frac{1}{\frac{tgx+1}{1-tgx}} =$

$tg(\alpha+\beta) = \frac{tg\alpha + tg\beta}{1-tg\alpha tg\beta}$

$32t^4 - 16t^2 = 2t^2 - 72t^4 + 72t^2 + 18$

$104t^4 - 80t^2 - 18 = 0$

$52a^2 - 40a - 9 = 0$

$D = 2025 +$

---

2. $(a;b;c)$
$a \le b \le c$

$52 \cdot 36 = 312 + 156\_ = 1872$

$2025 - 1875$

$a = 3^{p_1} \cdot 7^{p_2}$
$c = 3^{g_1} \cdot 7^{g_2}$

$4\sqrt{20} = 8\sqrt{5}$

$SB = 2\sqrt{2} + \sqrt{10} - SA$

$a = x$
$b = qx$
$c = q^2x$

$p_1 + g_1 = 160$
$p_2 + g_2 = 160$

$abc = (xq)^3 = 3^{240} \cdot 7^{240}$

$3^{81} \cdot 7^{79}$; $3^{80} \cdot 7^{80}$; $3^{79} \cdot 7^{81}$

$b = xq = 3^{80} \cdot 7^{80}$

$\boxed{b = 3^{80} \cdot 7^{80}}$

$-(3^{40} \cdot 7^{40})$; $3^{80} \cdot 7^{80}$; $-(3^{120} \cdot 7^{120})$

$2^3 \cdot 3$; $2^2 \cdot 3^2$; $2^1 \cdot 3^3$
24 36 54

$ac = 3^{160} \cdot 7^{160}$

$3^{14}\ 7^{100}$; $3^{80}\ 7^{80}$; 3

$SD = \sqrt{SB^2 - 18}$

$SD = \sqrt{SA^2 - 4}$

$a \le c$

1) $a = 3^{p_1} \cdot 7^{p_2}$
$c = 3^{n_1} \cdot 7^{n_2}$

3^{p_1}

$3^{81} \cdot 7^{80}$;

$n_1 + p_1 = 160$
$n_2 + p_2 = 160$
~~$n_1 = p_1$~~

~~$SB^2 - SA^2$~~

$SB^2 - 14 = SA^2$

$3\ 3^{160}\ 3\ \ 7^{160}$

~~p_1 – 160 вариантов~~

$q = \frac{3^{\alpha_1}}{7^{\alpha_2}}$ или $\frac{7^{\beta_1}}{3^{\beta_2}}$

$7^{\beta_1} > 3^{\beta_2}$
$3^{\alpha_1} > 7^{\alpha_2}$

$(2\sqrt{2} + \sqrt{10} - x)^2 - 14 = x^2$

$8 + 10 + x^2 - 4x\sqrt{2} - 2x\sqrt{10} + 8\sqrt{5} - 14 = x^2$

---

3. $\ln^2(x+2) - (x+1)\ln(4x+8) + (\ln 4)\ln(x+2) \ge 0$

$x+2 > 0$
$\boxed{x > -2}$

$\ln^2(x+2) - (x+1)(\ln 4) - (x+1)(\ln(x+2)) + \ln 4(\ln(x+2)) \ge 0$ $4+8$

$\ln(x+2) = t$
$x+1 = a$

$t^2 - a\ln 4 - at + t\ln 4 \ge 0$

$t(t-a) + \ln 4(t-a) \ge 0$

$(t+\ln 4)(t-a) \ge 0$ a 70

3^{40} $\frac{90}{7}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

черновик

$$(\ln(x+2)+\ln 4)(\ln(x+2)-x-1)\geq 0$$

⇓

$(1-e)(x+2+4)\geq 0$

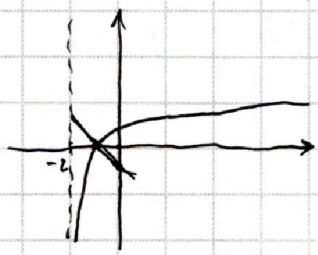
$\ln(x+2)-\ln\left(\frac{1}{4}\right)\geq 0$

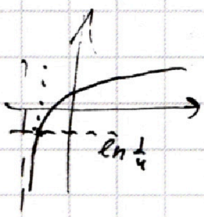
$(x-2)\leq 0$

$x\leq 2$

$\left(x+2-\frac{1}{4}\right)=x+\frac{7}{4}$

ln





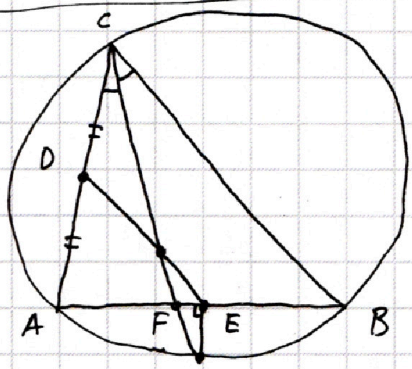
$\ln\frac{1}{4}$

$\ln(x+2)\geq \ln\frac{1}{4}$

$$\frac{-\frac{8}{3}}{\frac{8}{9}}+\frac{\frac{4}{3}}{\frac{2}{3}}+1=-\frac{8}{3}\cdot\frac{9}{8}+\frac{4}{2}\cdot\frac{3}{2}$$

-3 2

5.



$\frac{c-FB}{FB}=\frac{b}{a}$

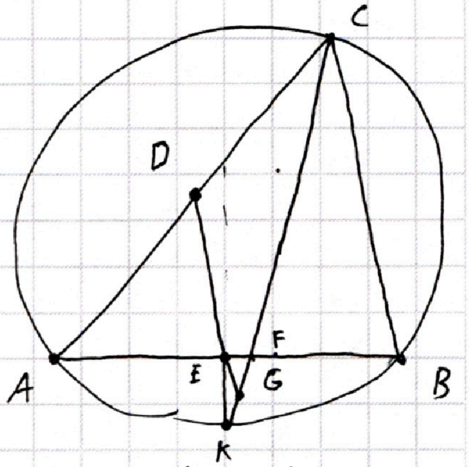
$ac-aFB=bFB$

$FB(a+b)=ac$

$\boxed{FB=\frac{ac}{a+b}}$ $\boxed{AF=\frac{bc}{a+b}}$

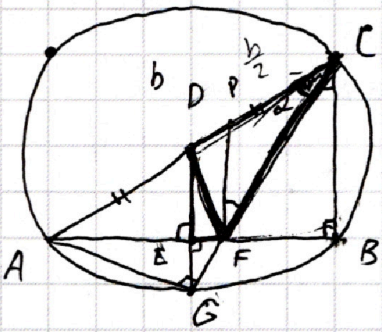
$DF^2=CD^2+CF^2-2\,CD\,CF\cdot\cos\alpha$

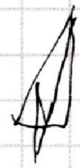
5.



$a=b\cos 2\alpha$

$c=b\sin 2\alpha$





$\frac{CF}{DF}=\sqrt{\frac{2}{11}}$

$\frac{a}{c}$ - ?

$\frac{c}{b}$ - ?

$\frac{a}{b}$ - ?

$AC=b$; $BC=a$; $AB=C$

$\frac{AF}{FB}=\frac{b}{a}$ $AE=EB=\frac{c}{2}$

$AD=DC=\frac{b}{2}$

$AF+FB=c$

$AF=c-FB$

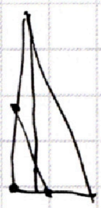
$\cos\alpha=\frac{CD^2+CF^2-DF^2}{2CD\cdot CF}$

$CF^2=\sqrt{a^2+\frac{a^2c^2}{(a+b)^2}}$

$CF^2=\boxed{a^2+\frac{a^2c^2}{a+b}}$

$\frac{CF^2}{DF^2}=\frac{2}{11}$

$DF^2=\frac{11CF^2}{2}$



$\frac{11}{2}n=$

$-\frac{9}{2}n$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

черновик:

$$\frac{\frac{b^2}{4}-9\left(\frac{a^2(a+b)^2+a^2c^2}{(a+b)^2}\right)}{\frac{ab\sqrt{(a+b)^2+c^2}}{a+b}} = \frac{b^2(a+b)^2-36a^2(a+b)^2-36a^2c^2}{4(a+b)^2}.$$

$$\cdot\frac{a+b}{ab\sqrt{(a+b)^2+c^2}} = \frac{\cancel{b^2(a+b)^2}+(a+b)^2(b^2-36a^2)-36a^2c^2}{4ab(a+b)\sqrt{(a+b)^2+c^2}} =$$

$$= \frac{(a+b)(b^2-36a^2)}{4ab\sqrt{(a+b)^2+c^2}} - \frac{36a^2c^2}{4ab(a+b)\sqrt{(a+b)^2+c^2}}$$

$a^2+2ab+b^2+c^2 =$

$= 2b^2+2ab =$

$= 2b(b+a)$

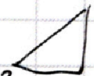
$b=\sqrt{a^2+c^2}$ $\quad b^2-a^2=c^2$

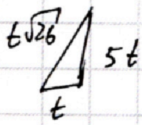
$b^2=a^2+c^2$

$\sqrt{2b(b+a)} = \sqrt{b}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{b+a}$

$$\frac{(a+\sqrt{a^2+c^2})(c^2-35a^2)}{4a\sqrt{a^2+c^2}\sqrt{2\sqrt{a^2+c^2}(\sqrt{a^2+c^2}+a)}} - \frac{36a^2c^2}{}$$

$\sqrt{a^2+c^2}=$





$\sqrt{26}\,\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{5}} =$

$=\boxed{13\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}}$

$a=2R\sin\alpha$

$b=2R\sin\beta$

$c=2R\sin\gamma$

$169\cdot\frac{2}{5} = \frac{169}{5}\cdot 4$

---

x, y, z - не все равны

$\max(xyz)$

$x, y, z \neq 0$

$$x^3+\frac{10}{y^3} = y^3+\frac{10}{z^3} = z^3+\frac{10}{x^3}$$

$x^3=a$

$y^3=b$

$z^3=c$

~~пусть~~ $x\geq y\geq z$

$$x^3+\frac{10}{y^3} = y^3+\frac{10}{z^3}$$

$\frac{624}{120} = \frac{104}{20} =$

$= \frac{51}{5}$

$-\frac{\frac{26}{5}}{2} = 13$

$$\begin{cases} a+\frac{10}{b} = b+\frac{10}{c} & |\cdot bc \\ b+\frac{10}{c} = c+\frac{10}{a} & |\,ac \end{cases}$$

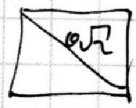
$$\begin{array}{r} 52 \\ \times\ 13 \\ \hline 156 \\ +\ 52\ \ \\ \hline 676 \end{array}$$

$abc = b^2c+10(b-c)$

$abc = ac^2+10(c-a)$

$$\begin{cases} abc+10c = b^2c+10b \\ abc+10a = ac^2+10c \end{cases}$$

$ac^2 + \cancel{10c-a}\ 10c-10a = b^2c+10b-10c$



$\frac{2a^2}{2}$ $\quad \frac{d^2}{2}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$x^3 + \frac{10}{y^3} = y^3 + \frac{10}{z^3}$

$x^3 - y^3 = \frac{10}{z^3} - \frac{10}{y^3}$

$x^3 - y^3 = \frac{10(y^3-z^3)}{y^3z^3}$

$y^3 - z^3 = \frac{10(x^3-z^3)}{x^3z^3}$

$x^3 - z^3 = \frac{10(x^3-y^3)}{x^3y^3}$

$(x-y)(x^2+xy+y^2) = \frac{10(y^3-z^3)}{y^3z^3}$

$(x-y)(x^2+xy+y^2) = \frac{10(y-z)(y^2+yz+z^2)}{y^3z^3} = \frac{100(z-x)(z^2+xz+x^2)}{x^3y^3z^6}$

$(y-z)(y^2+yz+z^2) = \frac{10(z-x)(z^2+xz+x^2)}{x^3z^3}$

$(z-x)(z^2+xz+x^2) = \frac{10(x-y)(x^2+yx+y^2)}{x^3y^3}$

$(x-y)(x^2+yx+y^2) = \frac{1000(x-y)\ldots)}{x^6y^6z^6}$

$\frac{1000}{(xyz)^6} = 1$

$(xyz)^6 = 1000$

$xyz = \sqrt[6]{1000} =$

$xyz = \sqrt[6]{10^3} = 10^{\frac{3}{6}} = \sqrt{10}$

$x = y$

$x^2 z = \sqrt{10}$

$z = \frac{\sqrt{10}}{x^2}$

$x-$

$10^{a+b+c} = 10^{\frac{1}{2}}$

$\sqrt[6]{}$

$a+b+c = \frac{1}{2}$

$a = \frac{1}{8}$ $b = \frac{1}{4}$ $c = \frac{1}{8}$

$10^{\frac{1}{3}} \cdot 10^{k} = 10^{\frac{1}{2}}$

$k = \frac{1}{6}$

$x^3 + \frac{10}{x^3} = x^3 + \frac{10}{\frac{\sqrt{10}}{x^2}} = \sqrt{}$

$\frac{10}{x^3} = \frac{10}{\frac{10\sqrt{10}}{x^6}}$

$\frac{10}{x^3} = \frac{10x^2}{\sqrt{10}}$

$10x^3 = 10 \cdot \frac{10\sqrt{10}}{x^6}$

$10\sqrt{10} = 10x^5$

$x^3 = \frac{10\sqrt{10}}{x^6}$

$x^5 = \sqrt{10}$

$x^9 = 10\sqrt{10} = (\sqrt{10})^3 \; 10^{\frac{3}{2}}$

$x = \sqrt[5]{10}$

$x = 10^{\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{9}} = \sqrt[6]{10}$

$z = \frac{10^{\frac{1}{2}}}{10^{\frac{1}{3}}}$

$(x^3-y^3) = t(x^3-y)^3$

$y = \sqrt[6]{10}$

$x^2 = 10^{\frac{1}{6}} \cdot 10^{\frac{1}{6}} = \sqrt[3]{10}$

$xyz = \sqrt{10}$

$y = \frac{\sqrt{10}}{xz}$

$x^3 + \frac{10}{\frac{10\sqrt{10}}{x^3z^3}} =$

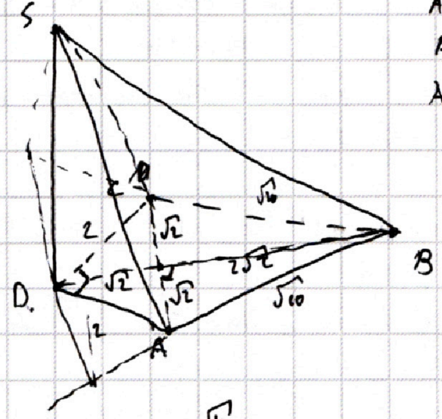
$= x^3 + \frac{x^3z^3}{\sqrt{10}} = x^3\left(1 + \frac{z^3}{\sqrt{10}}\right)$

$\frac{10\sqrt{10}}{x^3z^3} + \frac{10}{z^3} = \frac{10(x^3+\sqrt{10})}{x^3z^3}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$AD = DC = 2$ $\quad SA + SB = 2\sqrt{2} + \sqrt{10}$

$AC = 2\sqrt{2}$

$AB = BC = \sqrt{10}$ $\quad SB = 2\sqrt{2} + \sqrt{10} - SA$

$a = b\cos 2\alpha$

$b = b\sin 2\alpha$

$\sqrt{SB^2} = \sqrt{SD^2 + 18}$

$SA = \sqrt{SD^2 + 4}$

$SD^2 = x$

$\sqrt{x+18} + \sqrt{x+4}$

48

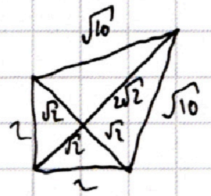
256

3

1768

+ 1681

2449



$$\frac{\frac{b^2}{4} - \frac{9}{2}\left(a^2 + \frac{a^2c^2}{(a+b)^2}\right)}{b\underbrace{\sqrt{a^2 + \frac{a^2c^2}{(a+b)^2}}}_{=t}} = \frac{\frac{b^2}{4} - \frac{9}{2}t^2}{bt} = \frac{\frac{b^2 - 18t^2}{8}}{bt} = \boxed{\frac{b^2 - 18t^2}{8bt}}$$

$a^2 = b^2\cos^2 2\alpha$ $\quad a + b = b(\cos 2\alpha + 1$

$b^2 = b^2\sin^2 2\alpha$

$$\frac{a^2(a+b)^2 + a^2c^2}{(a+b)^2} = \frac{a^2((a+b)^2 + c^2)}{(a+b)^2} = \frac{b^2\cos^2 2\alpha\,(b^2(\cos 2\alpha+1)^2 + b^2\sin^2 2\alpha)}{b^2(\cos 2\alpha + 1)^2} =$$

$$= \frac{b^2\cos^2 2\alpha\,(\cos^2 2\alpha + 2\cos 2\alpha + 1 + \sin^2 2\alpha)}{\cos^2 2\alpha + 2\cos 2\alpha + 1} =$$

$$= \frac{2b^2\cos^2 2\alpha\,(1 + \cos 2\alpha)}{(1 + \cos 2\alpha)^2} = \boxed{\frac{2b^2\cos^2 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}} = t^2$$

$b^2 - \frac{36 b^2\cos^2 2\alpha}{}$

$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

$$\frac{1 + \cos 2\alpha - 36\cos^2 2\alpha}{8(1 + \cos 2\alpha)\sqrt{\frac{2\cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}}} = 2\cos^2\alpha - 16($$

$$\frac{2}{1 + \cos 2\alpha} = \frac{2}{2\cos^2} = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

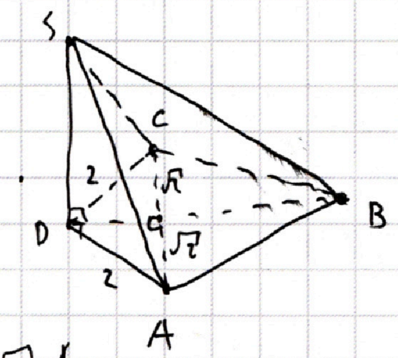
МФТИ

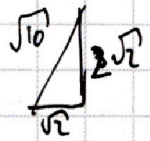
$SA+SB=2\sqrt{2}+\sqrt{6}$

$BD=3\sqrt{2}$

$AD=2$

$BS=\sqrt{SD^2+18}$ $AS=\sqrt{SD^2+4}$





$\sqrt{x+18}+\sqrt{x+4}=\sqrt{2}(2+\sqrt{5})\ |\uparrow^2$

$2x+22+2\sqrt{x^2+22x+72}=2(9+4\sqrt{5})$

$x+11+\sqrt{x^2+22x+72}=9+4\sqrt{5}$

$\sqrt{x^2+22x+72}=(4\sqrt{5}-2)-x\ |\uparrow^2$

$\cancel{x^2}+22x+72=\cancel{x^2}-2x(4\sqrt{5}-2)+84-8\sqrt{5}$

$22x=12-8\sqrt{5}-8x\sqrt{5}+4x$

$18x+8x\sqrt{5}=12-8\sqrt{5}\ |:2$

$x(9+4\sqrt{5})=6-4\sqrt{5}$

$x=\frac{6-4\sqrt{5}}{9+4\sqrt{5}}=\frac{9+4\sqrt{5}-3-8\sqrt{5}}{\dots}=$

$\dots 1-\frac{3+8\sqrt{5}}{9+4\sqrt{5}}$

$3+20$

$9+10$

$x^2+22x+72=80+4+x$

$\cancel{x^2}+22x+72=80+4+\cancel{x^2}-8x\sqrt{5}-16\sqrt{5}+4x\ |:2$

$11x+36=42-4x\sqrt{5}-8\sqrt{5}+2x$

$9x+4x\sqrt{5}=6-8\sqrt{5}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$\frac{\frac{b^2}{4}-\frac{18}{4}\left(\frac{a^2(a+b)^2+c^2a^2}{(a+b)^2}\right)}{b\underbrace{\sqrt{\ldots}}_{=t}} = \frac{b^2-18t^2}{4bt}$$

$a^2+b^2+2ab = b^2\cos^2 2\alpha + b^2 + 2b^2\cos 2\alpha = b^2$

$$t^2 = \frac{a^2(a^2+b^2+c^2+2ab)}{a^2+b^2+2ab} = \frac{b^2\cos^2 2\alpha(2b^2+2b^2\cos 2\alpha)}{b^2(\cos 2\alpha+1)^2} =$$

$$= \frac{2b^2\cos^2 2\alpha(1+\cos 2\alpha)}{} = \boxed{\frac{2b^2\cos^2 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}}$$

$$\frac{1-\frac{36\cos^2 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}}{4\sqrt{\frac{2\cos^2 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}}} = \frac{1+\cos 2\alpha-36\cos^2 2\alpha}{2\cos^2\alpha\,\frac{\cos 2\alpha}{\cos\alpha}} =$$

$$= \frac{2\cos^2\alpha-36(2\cos^2\alpha-1)^2}{\cos\alpha\,(2\cos^2\alpha-1)} \qquad \cos\alpha = t$$

$t^2(2t^2-1) = t^2-36(4t^4-4t^2+1)$

$2t^4-t^2 = t^2-144t^4+144t^2-36$

$146t^4-144t^2+36=0 \quad |:2$

$2t^4-t^2 = t^2-144t^4+144t^2-36$

$73a^2 -$

$146t^4-146t^2+36=0$

$73a^2-72a+18=0$

$73t^4-73t^2+18=0$

$D = 72^2-72\cdot 73$

$D = 73^2-7$

$8t^4-4t^2 = 144t^2-144t^4+144t^2-36$

$152t^4-149$

$\frac{18}{16}-1=\frac{2}{16}=\frac{1}{8}$

$2\cdot$

$2\frac{4}{5}-1=$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$\frac{b^2-18t^2}{4bt} \qquad t^2=\frac{2b^2\cos^2 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$$

$$\frac{b^2-\frac{36b^2\cos^2 2\alpha}{2\cos^2\alpha}}{4b^2\sqrt{\frac{2\cos^2 2\alpha}{2\cos^2\alpha}}}=\frac{\frac{\cos^2\alpha-18\cos^2 2\alpha}{\cos^2\alpha}}{4\cdot\frac{\cos 2\alpha}{\cos\alpha}}=$$

$$=\frac{\cos^2\alpha-18(2\cos^2\alpha-1)^2}{\cos^2\alpha}\cdot\frac{\cos\alpha}{4\cos 2\alpha}=$$

$$=\frac{\cos^2\alpha-18(2\cos^2\alpha-1)^2}{4\cos\alpha(2\cos^2\alpha-1)} \Rightarrow \cos\alpha=t$$

$$t=\frac{t^2-18(4t^4-4t^2+1)}{4t(2t^2-1)}$$

$$4t^2(2t^2-1)=t^2-72t^4+72t^2-18$$

$$8t^4-4t^2-t^2+72t^4-72t^2+18=0$$

$$80t^4-77t^2+18=0$$

$$D=5929-5760$$

$$\begin{array}{r} 77 \\ \times 77 \\ \hline 539 \\ +539 \\ \hline 5929 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 32 \\ \times 180 \\ \hline 256 \\ +32 \\ \hline 5760 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

черновик

$y = -2x^3 - ax = -x(2x^2 - a)$

$y = 5x$

$2x^2 = a$

$x^2 = \frac{a}{2}$

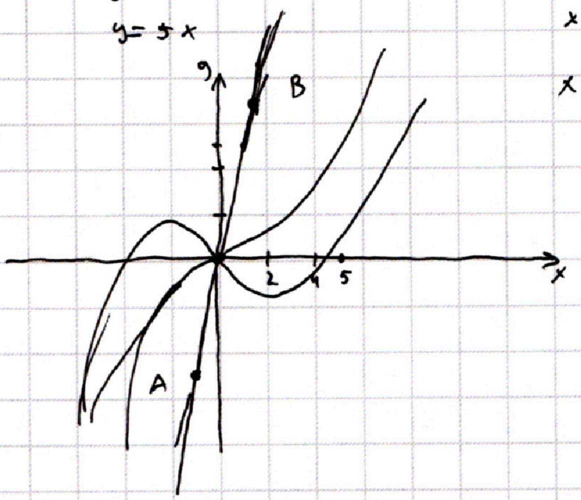
$x =$

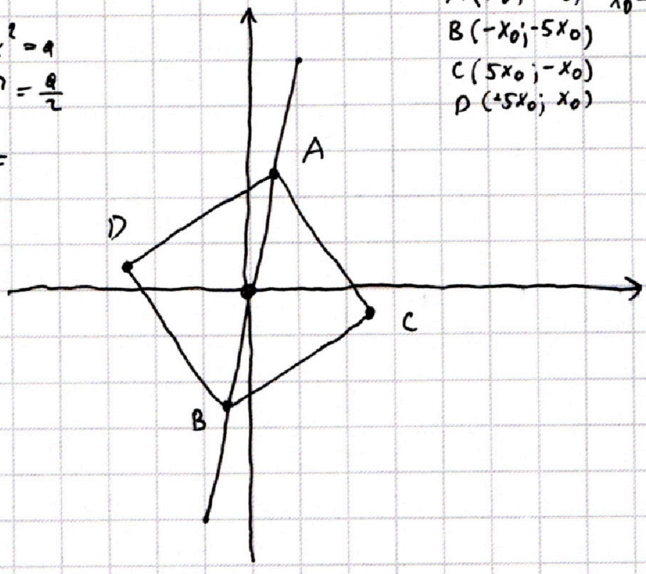
$A(x_0; 5x_0)$ $x_0 = t$

$B(-x_0; -5x_0)$

$C(5x_0; -x_0)$

$D(-5x_0; x_0)$





$A(t; 5t)$

$B(-t; -5t)$

$C(5t; -t)$

$D(-5t; t)$

$f(x) = -2x^3 - ax$

$f(t) = -2t^3 - at = 5t \mid :(t)$

$2t^2 + a = -5$

$2t^2 = (-a-5)$

$t^2 = \frac{(-a-5)}{2}$

$f(-t) = 2t^3 + at = -5t$

$f(-5t) = 250t^3 + 5at = -t \mid : t$

$250t^2 + 5a = -1$

$250t^2 = \frac{-5a-1}{250}$