МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

# 11 КЛАСС. Вариант 5

1. [4 балла] Решите уравнение
$$3\operatorname{tg} 2x + 1 = \operatorname{tg}\left(x + \frac{3\pi}{4}\right).$$

2. [4 балла] Сколько существует троек целых чисел $(a; b; c)$ таких, что они образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию, а их произведение $abc$ равно $2^{150} \cdot 3^{150}$?

3. [5 баллов] Решите неравенство
$$\ln^2 x - (x-1)\ln(2x) + (\ln 2)\ln x \geqslant 0.$$

4. [4 балла] На координатной плоскости нарисован квадрат, все вершины которого лежат на графике функции $y = x^3 - ax$ . Известно, что одна из диагоналей квадрата лежит на прямой $y = -4x$, а центр совпадает с началом координат. Найдите значение параметра $a$ и площадь квадрата.

5. [6 баллов] Вокруг треугольника $ABC$ описана окружность $\Omega$. Точки $D$ и $E$ – середины сторон $AC$ и $AB$ соответственно, $CF$ – биссектриса треугольника $ABC$. Лучи $DE$ и $CF$ пересекаются в точке $G$, принадлежащей $\Omega$. Найдите углы треугольника $ABC$, если известно, что $\frac{CF}{DF} = \frac{1}{2}$.

6. [5 баллов] Числа $x$, $y$ и $z$ не все равны между собой, и при этом
$$x^3 + \frac{7}{y^3} = y^3 + \frac{7}{z^3} = z^3 + \frac{7}{x^3}.$$
Найдите минимально возможное значение произведения $xyz$.

7. [6 баллов] В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит четырёхугольник $ABCD$, в котором $AB = BC = \sqrt{5}$, $AD = DC = \sqrt{2}$, $AC = 2$. Ребро $SD$ – высота пирамиды. Известно, что $SA + SB = 2 + \sqrt{5}$. Найдите:

   а) объём пирамиды;

   б) радиус шара, касающегося граней $ABCD$, $SAB$, $SBC$ и ребра $SD$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№1

$$3\,tg\,2x+1=tg\left(x+\frac{3\pi}{4}\right)$$

$$3\left(\frac{2\,tg\,x}{1-tg^2x}\right)+1=\frac{tg\,x-1}{tg\,x+1}$$

$$\frac{6\,tg\,x}{1-tg^2x}+\frac{1-tg^2x}{1-tg^2x}=\frac{(tg\,x-1)(1-tg\,x)}{1-tg^2x}$$

$$\frac{6\,tg\,x+1-tg^2x+(1-tg\,x)^2}{1-tg^2x}=0$$

$$\frac{6\,tg\,x+1-tg^2x+1-2\,tg\,x+tg^2x}{1-tg^2x}=0$$

$$\frac{4\,tg\,x+2}{1-tg^2x}=0$$

$$tg\,x=-\frac{1}{2}$$

$$x=arctg\left(-\frac{1}{2}\right)+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$$

Ответ: $arctg\left(-\frac{1}{2}\right)+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№2

$(a, b, c)$ – геом. прогрессия, значит $b^2 = ac$, $b^3 = abc = 2^{150} \cdot 3^{150}$, $b = 2^{50} \cdot 3^{50}$.

$c = \frac{b^2}{a} \in \mathbb{Z}$, значит $b^2 \vdots a$, $2^{100} \cdot 3^{100} \vdots a$.

$2^{100} \cdot 3^{100}$ имеет $101^2$ положительных целых делителей, $2 \cdot 101^2$ целых делителей.

Выбрав число $a$ среди целых делителей числа $2^{100} \cdot 3^{100}$, число $c$ однозначно определяется как $c = \frac{b^2}{a}$ и является целым. Так как $b^2 = ac$ – необходимое и достаточное условие для того, чтобы ненулевые $a, b, c$ составляли геом. прогрессию, выбранное среди делителей $2^{100} \cdot 3^{100}$ число $a$ однозначно определяет прогрессию $(a, b, c)$ целых чисел с произведением $2^{150} \cdot 3^{150}$.

Всего $2 \cdot 101^2$ вариантов числа $a$, значит столько же троек $(a, b, c)$.

Ответ: $2 \cdot 101^2$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№3

$$\ln^2 x - (x-1)\ln(2x) + (\ln 2)\ln x \geq 0 \qquad (x>0)$$

$$\ln^2 x - (x-1)(\ln 2 + \ln x) + (\ln 2)\ln x \geq 0$$

$$\ln^2 x - x\cdot\ln 2 + \ln 2 - x\cdot\ln x + \ln x + (\ln 2)\ln x \geq 0$$

$$(\ln 2 + \ln x)(1 - x + \ln x) \geq 0$$

$$\ln(2x)\cdot\left(\ln(x\cdot e) - \ln(e^x)\right) \geq 0$$

$$\left[\begin{array}{l} \ln 2x = 0 \\ \ln(x\cdot e) = \ln(e^x) \\ \begin{cases} \ln 2x < 0 \\ \ln(x\cdot e) < \ln(e^x) \end{cases} \\ \begin{cases} \ln 2x > 0 \\ \ln(x\cdot e) > \ln(e^x) \end{cases} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{2} \\ x\cdot e = e^x \\ \begin{cases} 0 < 2x < 1 \\ x\cdot e < e^x \end{cases} \\ \begin{cases} 2x > 1 \\ x\cdot e > e^x \end{cases} \end{array}\right.$$

Функция $e^x$ в точке $x=1$ равна $e$ и имеет производную $e$.

Функция $x\cdot e$ в точке $x=1$ равна $e$ и имеет производную $e$.

$e^x$ выпукла вниз, $x\cdot e$ – прямая.

Значит $e^x > x\cdot e$ на $(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$; $e^x = x\cdot e$ при $x=1$.

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{2} \\ x = 1 \\ \begin{cases} x\in(0;\frac{1}{2}) \\ x\in \mathbb{R}\setminus 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x > \frac{1}{2} \\ x = 1 \end{cases} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{2} \\ x = 1 \\ x\in(0;\frac{1}{2}) \\ x = 1 \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} x\in(0;\frac{1}{2}] \\ x = 1 \end{array}\right.$$

Ответ: $x\in(0;\frac{1}{2}]\cup 1$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№4

Центр квадрата совпадает с началом координат, значит квадрат $ABCD$ имеет координаты вершин $A(x_0, y_0)$, $B(y_0, -x_0)$, $C(-x_0, -y_0)$, $D(-y_0, x_0)$.

Пусть $AC$ лежит на $y=-4x$. Координаты точек $A, C$ удовлетворяют $x^3 - ax = -4x$. Если $x_0 = 0$, то, т.к. $y_0 = -4x_0$, точка $A$ лежит в начале координат, чего не может быть. Аналогично для $C$. Значит $x \neq 0$.

$x^2 - a = -4$, $x^2 = a-4$, $x = \pm\sqrt{a-4}$.

Б.о.о. пусть $x_0 = \sqrt{a-4}$. Тогда $y_0 = -4\sqrt{a-4}$.

Т.к. $AC \perp BD$, $BD$ лежит на прямой $y = \frac{1}{4}x$. Координаты точек $B, D$ удовлетворяют уравнению $x^3 - ax = \frac{1}{4}x$, где $x \neq 0$.

$x^2 - a = \frac{1}{4}$, $x^2 = a + \frac{1}{4}$, $x = \pm\sqrt{a+\frac{1}{4}}$.

Модуль ординаты точки $A$ равен модулю абсциссы точки $B$, то есть

$|-4\sqrt{a-4}| = |\pm\sqrt{a+\frac{1}{4}}|$, $4\sqrt{a-4} = \sqrt{a+\frac{1}{4}}$, $16a - 64 = a + \frac{1}{4}$,

$a = \frac{64+\frac{1}{4}}{15}$.

Площадь квадрата с диагональю $2d$ равна $2d^2$. $d^2 = x_0^2 + y_0^2$.

$d^2 = a-4+16(a-4) = 17(a-4) = 17\left(\frac{64+\frac{1}{4}}{15} - \frac{60}{15}\right) = 17\left(\frac{4+\frac{1}{4}}{15}\right) = 17 \cdot \frac{17}{60}$

$S = 2d^2 = \frac{2 \cdot 17^2}{60} = \frac{289}{30}$

Ответ: $a = \frac{64+\frac{1}{4}}{15}$, $S = \frac{289}{30}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☒ |

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№7

а) $\Delta ABC$ и $\Delta ADC$ равнобедренные, значит высоты из $B$ и $D$ на $AC$ попадают в середину $AC$, назовём её $H$. $AH=CH$; $B, D, H$ на одной прямой.

$DH=\sqrt{AD^2-AH^2}=\sqrt{AD^2-\left(\frac{AC}{2}\right)^2}=\sqrt{2-1}=1.$

$BH=\sqrt{AB^2-AH^2}=\sqrt{5-1}=2.$

Если $B$ и $D$ лежат по разные стороны от $AC$, то $BD=BH+HD=3$,

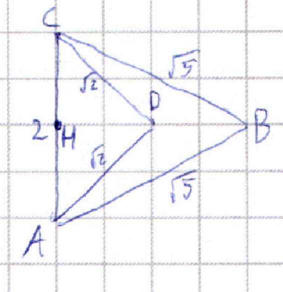
$SA+SB=\sqrt{SD^2+AD^2}+\sqrt{SD^2+BD^2}=\sqrt{SD^2+2}+\sqrt{SD^2+9}\geq\sqrt{2}+3>2+\sqrt{5}.$

Значит $B$ и $D$ лежат по одну сторону от $AC$, $BD=BH-HD=1$.

$SA+SB=\sqrt{SD^2+AD^2}+\sqrt{SD^2+BD^2}=\sqrt{SD^2+2}+\sqrt{SD^2+1}=2+\sqrt{5}$

Т.к. $f(x)=\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2+1}$ возрастает при $x>0$, $f(x)=2+\sqrt{5}$ имеет не более одного положительного решения. $SD=\sqrt{3}$ является решением.

$S_{ABCD}=S_{ABC}-S_{ADC}=\frac{1}{2}\cdot2\cdot2-\frac{1}{2}\cdot2\cdot1=1$




$V=\frac{1}{3}\cdot SD\cdot S_{ABCD}=\frac{1}{3}\cdot\sqrt{3}\cdot1=\frac{\sqrt{3}}{3}.$

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\sin(a+b)=\sin a\cos b+\sin b\cos a$

$\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$

$\frac{1}{2}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{1}{4}$

$tg2x=\frac{\sin(x+x)}{\cos(x+x)}=\frac{2tgx}{1-tg^2x}$

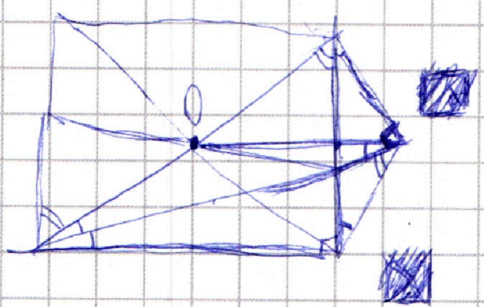
$tg\left(x+\frac{3\pi}{4}\right)=\frac{\sin x\cdot(-\frac{\sqrt2}{2})+\cos x\cdot(\frac{\sqrt2}{2})}{\cos x(-\frac{\sqrt2}{2})-\sin x(\frac{\sqrt2}{2})}=\frac{-\sin x+\cos x}{-\cos x-\sin x}=\frac{-tgx+1}{-1-tgx}=\boxed{\frac{tgx-1}{tgx+1}}$

$\frac{6tgx}{1-tg^2x}+1=\frac{tgx-1}{tgx+1}$, $\frac{6tgx+1-tg^2x-(tgx-1)(1-tgx)}{1-tg^2x}$

$6tgx+1-tg^2x+(1-tgx)^2=6tgx+1-\cancel{tg^2x}+1-2tgx+\cancel{tg^2x}=\frac{2+4tgx}{1-tg^2x}=0$

$x=arctg\left(-\frac{1}{2}\right)+\pi n, n\in\mathbb{Z}$

$tgx=-\frac{1}{2}$

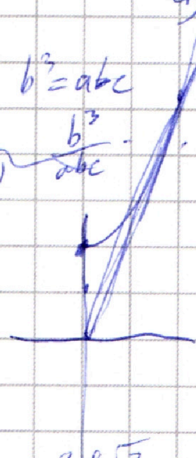



$b^2=ac$ $b^3=abc$

$\frac{b^2}{ac}=1$, $\frac{b^3}{abc}$

$c=qb=\frac{b^2}{a}$

$e^{x-1}=x$



$a+\frac{1}{b}=b+\frac{1}{c}=c+\frac{1}{a}$

$3t=(a+b+c)+\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geq 6$

$t\geq 2$

$2+\sqrt5$ $3+\sqrt2$

$\sqrt5$ $1+\sqrt2$

$5$ $5+2\sqrt2$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$b = 2^{50} \cdot 3^{50}$

$a = \pm 2^n 3^m;\ n, m \le 50$ $\quad 2 \cdot 100^2$ sign

(2)

$13 + \frac{1}{34}$

(4) $x(x^2 - a) = -4x$

$x^2 - a = -4$

$x^2 = a - 4$

$x = \pm\sqrt{a-4}\ (A, C),\ y = \pm 4\sqrt{a-4}$

$y = \pm\sqrt{a-4}\ (B, D)$

$4\sqrt{a-4} = \sqrt{a + \frac{1}{4}}$

$16a - 64 = a + \frac{1}{4}$

$15a = 64 + \frac{1}{4}$

$\boxed{a = \frac{64 + \frac{1}{4}}{15}}$

$x^3 - ax = \frac{1}{4}x \quad (BD)$

$x^2 - a = \frac{1}{4}$

$x = \pm\sqrt{a + \frac{1}{4}} \quad (BD)$

(3) $\ln^2 x - (x-1)(\ln 2 + \ln x) + (\ln 2 \ln x) \ge 0$

$\ln^2 x - x\ln 2 + \ln 2 - x\ln x + \ln x + \ln 2 \ln x \ge 0$

$\ln 2(1 - x + \ln x) + \ln x(1 - x + \ln x)$

$(\ln 2 + \ln x)(1 - x + \ln x) \ge 0$

$(\ln 2 - \ln\frac{1}{x})(1 + \ln x - x) \ge 0$

$(\ln(ex) - \ln(e^x))$

$(\ln 2x)(\ln \frac{ex}{e^x}) \ge 0$

$x > 0$

$\ln 2x\,(\ln x \cdot e^{-x+1}) \ge 0$

$2x \vee 1 \qquad x \cdot e^{-x+1} \vee 1$

$xe \vee e^x$

$x \vee \frac{1}{2} \qquad x \vee 1$

(1) $tg\, 2x = \frac{\sin 2x}{\cos 2x} = \frac{\sin x\cos x + \sin x \cos x}{\sin x \sin x - \cos x \cos x} = \boxed{\frac{2 tg x}{tg^2 x - 1}}$

(6) $z^3 - \frac{7}{z^3} = y^3 - \frac{7}{x^3} \qquad x^3 + \frac{7}{y^3} = $

$t + (y^3 - x^3) - \left(\frac{7}{y^3} + \frac{7}{x^3}\right)$

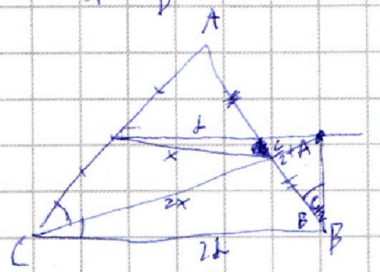
$c - \frac{7}{c} = t + (b - a) - 7\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{a}\right)$

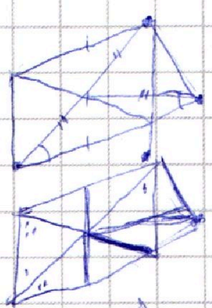
$7\left(\frac{a+b}{ab}\right)$

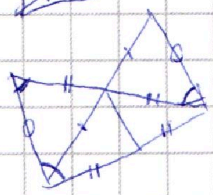
$S = 3t - 3 \cdot 7\left(\left(\frac{a+b}{ab}\right) + \left(\frac{b+c}{bc}\right) + \left(\frac{a+c}{ac}\right)\right)$

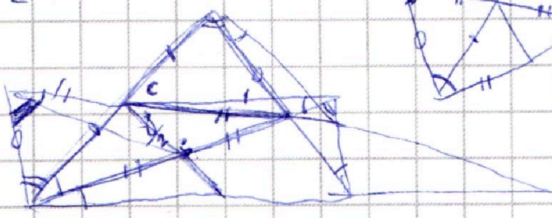
$\frac{a+b}{ab} \wedge \frac{b+c}{bc} \wedge \frac{a+c}{ac}$

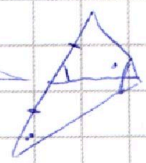
(5)



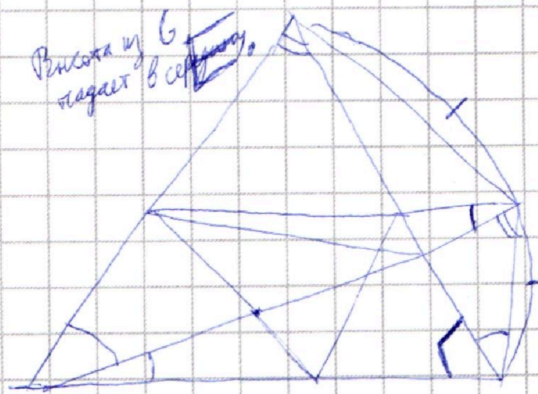








Высота из G падает в середину.



$DH = 1$

$BH = 2$

$DB = 3$

$SA + SB = \sqrt{2 + SD^2} + \sqrt{9 + SD^2} = 2 + \sqrt{5}$

$\ge 3 + \sqrt{2} > 2 + \sqrt{5}$

Значит $B = B'$, $DB = 1$.

$SA + SB = \sqrt{2 + SD^2} + \sqrt{1 + SD^2} = 2 + \sqrt{5}$

$SD^2 = 3 \quad SD = \sqrt{3}$

$V = \frac{1}{3}\sqrt{3} \cdot \left(\frac{1}{2}(2 - 1)\right) = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{6}}$