МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω, хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB, если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2-5x+3}-\sqrt{2x^2+2x+1}=2-7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-12;24)$, $Q(3;24)$ и $R(15;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система

$$\begin{cases} ax-y+10b=0, \\ \left((x+8)^2+y^2-1\right)\left(x^2+y^2-4\right) \leqslant 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B. Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC, если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответсвенно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Пусть $a = 2^{a_1}7^{a_2}$ $\quad a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \geq 0 \quad a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 \in N$

$b = 2^{b_1}7^{b_2}$

$c = 2^{c_1}7^{c_2}$ $\quad$ тогда $ab = 2^{a_1+b_1}\cdot 7^{a_2+b_2} \,\vdots\, 2^{14}7^{10} \Rightarrow a_1+b_1 \geq 14$, $\; a_2+b_2 \geq 10$

$bc = 2^{b_1+c_1}\cdot 7^{b_2+c_2} \,\vdots\, 2^{17}7^{17} \Rightarrow b_1+c_1 \geq 17$, $\; b_2+c_2 \geq 17$

$ac = 2^{a_1+c_1}\cdot 7^{a_2+c_2} \,\vdots\, 2^{20}7^{37} \Rightarrow a_1+c_1 \geq 20$, $\; a_2+c_2 \geq 37$

Сложим почленно из системы неравенства, включающие a_1, b_1, c_1, и отдельно a_2, b_2, c_2:

$(a_1+b_1)+(a_1+c_1)+(b_1+c_1) \geq 14+17+20$

$2(a_1+b_1+c_1) \geq 51$

$a_1+b_1+c_1 \geq 25{,}5$ т.к. a_1, b_1, c_1 — натуральные, $a_1+b_1+c_1 \geq 26$

$(a_2+b_2)+(b_2+c_2)+(a_2+c_2) \geq 10+17+37=64$

$a_2+b_2+c_2 \geq 32.$

Заметим, что т.к. $a_2+c_2 \geq 37$, то $37+b_2 \geq 32$, откуда $b_2 \geq -5$.
можно сделать подстановку

Но ~~не~~ b_2

$abc = 2^{a_1+b_1+c_1}\cdot 7^{a_2+b_2+c_2}$ Ясно, что abc минимально при минимальных $a_1+b_1+c_1$ и $a_2+b_2+c_2$

$a_2+b_2+c_2 \geq 32$ при $b_2=-5$, ~~это~~ такое не подходит, значит минимальное $a_2+b_2+c_2$ будет 37, ~~т.к.~~ когда $b_2=0$ и $a_2+c_2 \geq 37$. В самом деле, если ~~подставить~~ ~~вместо~~ b_2 увеличивать, то $a_2+b_2+c_2$ тоже увеличивается. Таким образом

$a_2+b_2+c_2 \geq 37$

поэтому $abc \geq 2^{26}7^{37}$ или минимальное $abc = 2^{26}7^{37}$

Проверим, чтобы все числа (a, b и c) были натуральными, для этого приведем пример:

$a_1=8 \quad b_1=6 \quad c_1=12$
$a_2=17 \quad b_2=0 \quad c_2=20$ $\Rightarrow a=2^{8}7^{17} \quad b=2^{6} \quad c=2^{12}7^{20}$

$ab = 2^{14}7^{17} \,\vdots\, 2^{14}7^{10}$

$bc = 2^{18}7^{20} \,\vdots\, 2^{17}7^{17}$ $\quad$ и $abc = 2^{26}7^{37}$.

$ac = 2^{20}7^{37} \,\vdots\, 2^{20}7^{37}$

Ответ: $2^{26}7^{37}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$\sqrt{2x^2-5x+3}-\sqrt{2x^2+2x+1}=2-7x$$

умножим левую и правую части на „сопряжённое" (т.е. на $\sqrt{2x^2-5x+3}+\sqrt{2x^2+2x+1}\geq 0$), затем применим в левой части формулу разности квадратов

$$(2x^2-5x+3)-(2x^2+2x+1)=(2-7x)(\sqrt{2x^2-5x+3}+\sqrt{2x^2+2x+1})$$

$$(2-7x)-(2-7x)(\sqrt{2x^2-5x+3}+\sqrt{2x^2+2x+1})=0$$

Откуда

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}2-7x=0 \Rightarrow x=\frac{2}{7}\\ \sqrt{2x^2-5x+3}+\sqrt{2x^2+2x+1}=1\end{array}\right.\\ 2x^2-5x+3\geq 0 \longrightarrow D=25-24=1 \quad x_1=\frac{5-1}{4}=1 \quad x_2=\frac{5+1}{4}=1{,}5 \Rightarrow x\in(-\infty;1]\cup[1{,}5;\infty)\\ 2x^2+2x+1\geq 0 \longrightarrow D<0 \Rightarrow x\in R\end{cases}$$

Таким образом, ОДЗ: $x\in(-\infty;1]\cup[1{,}5;\infty)$

корень $x=\frac{2}{7}$ в него входит.

(1) $\sqrt{2x^2-5x+3}+\sqrt{2x^2+2x+1}=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{2x^2-5x+3}=1-\sqrt{2x^2+2x+1}\geq 0\\ \sqrt{2x^2+2x+1}=1-\sqrt{2x^2-5x+3}\geq 0\end{array}\right.$ (2)

~~$2x^2-5x+3=1-2\sqrt{2x^2+2x+1}+2x^2+2x+1$~~

~~$2-7x=1-2\sqrt{2x^2+2x+1}$~~

~~$2\sqrt{2x^2+2x+1}=7x-1$~~

~~$8x^2+8x+4=49x^2-14x+1$~~

~~$41x^2-22x-3=0$~~

~~$\frac{D}{4}=121+123=244 \quad x_1=\frac{11-\sqrt{244}}{244}$~~

т.к. арифметические квадратные корни положительные, уравнение (1) должны удовлетворять системе (2), которая является системой корней.

$$\begin{cases}1-\sqrt{2x^2+2x+1}\geq 0\\ 1-\sqrt{2x^2-5x+3}\geq 0\end{cases} \quad (2)$$

$\sqrt{2x^2+2x+1}\leq 1 \Rightarrow 2x^2+2x\leq 0$

$x(x+1)\leq 0 \Rightarrow x\in$ ~~$[0;$~~ $x\in[-1;0]$.

$\sqrt{2x^2-5x+3}\leq 1 \Rightarrow 2x^2-5x+2\leq 0$

$D=25-16=9 \quad x_1=\frac{5-3}{4}=\frac{1}{2} \Rightarrow x\in[\frac{1}{2};2]$

$x_2=\frac{5+3}{4}=2$

решением системы будет

$X=[-1;0]\cap[\frac{1}{2};2]=\varnothing$

следовательно и уравнение (1) не может иметь решений.

Таким образом, единственный корень $x=\frac{2}{7}$

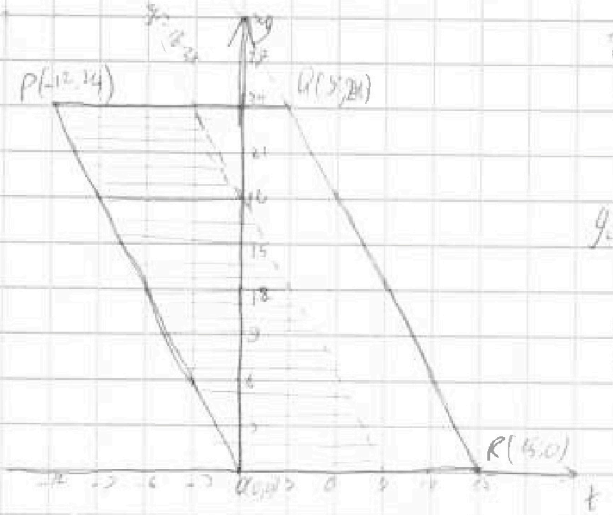
Ответ: $x=\frac{2}{7}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



$2x_2 - 2x_1 + y_2 + y_1 = 12$

$\Updownarrow$

$y_2 = (12 + y_1 + 2x_1) - 2x_2$

$y_2(x_2)$ представляет собой прямую вида $y = kx + b$, где $k = -2$, $b = 12 + 2x_1 + y_1$

Заметим, что на прямой $y_1(x_1)$ лежит ровно 13 точек, пока $b = 12 + 2x_1 + y_1$ принадлежит отрезку $[0, 30]$ (точек, лежащих в параллелограмме и имеющих целые координаты), т.е. имеем неравенство $0 \le b \le 30$ (т.к. в противном случае точка параллелограмма не найдётся вовсе). Имеем

$\begin{cases} 12 + 2x_1 + y_1 \le 30 \\ 12 + 2x_1 + y_1 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 \le 18 - 2x_1 \\ y_1 \ge -12 - 2x_1 \end{cases}$ множество таких точек $(x_1; y_1)$, принадлежащих параллелограмму, отмечено на рисунке горизонтальной штриховкой.

Так как нас интересуют точки с целыми координатами, можно представить это множество как $|N|$ прямых $y_1 = n - 2x_1$, каждая из которых содержит по 13 целых точек параллелограмма, при этом $n \in [0, 18] \cap N = N$ $\quad \|N\| = 19$

подставим $y_1(x, n)$ в y_2:

$y_2 = (12 + n - 2x_1 + 2x_1) - 2x_2 = 12 + n - 2x_2$

Получим множество N прямых, причём свободный коэффициент $(n + 12)$ не равен соответственно коэффициенту из $y_1(n)$, угловые коэффициенты одинаковы, значит прямые не имеют общих точек. Каждая из прямых содержит ровно 13 точек параллелограмма, имеющих целые координаты. Значит на каждую точку прямой $y_1(n, x_1)$ найдётся 13 пар с точками прямой $y_2(n, x_2)$, т.е. $13 \cdot 13$ пар.

Т.к. $n \in N$ и $\|N\| = 19$, то всего таких пар ещё в 19 раз больше, т.е.

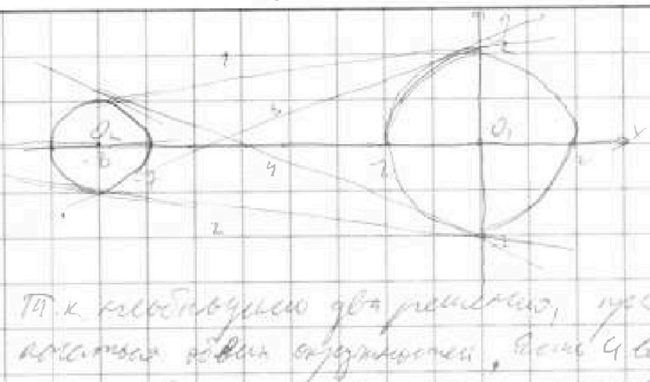
$13 \cdot 13 \cdot 19$

Ответ: $13 \cdot 13 \cdot 19$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$((x+8)^2+y^2-1)(x^2+y^2-4)\le 0$

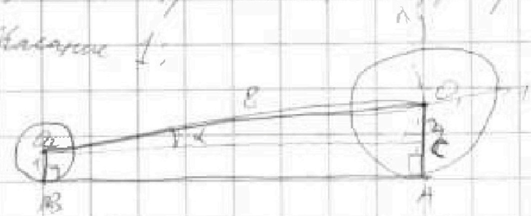
представляет собой два круга

$(x+8)^2+y^2\le 1$ (центр $C(-8,0)$ и $R=1$)

и $x^2+y^2\le 4$ (центр в $(0,0)$ и $R=2$)

Т.к. необходимо два решения, прямая (первое уравнение) должна касаться обеих окружностей. Есть 4 варианта касания, все они представлены на рисунке, отмечены цифрами. Варианты касания (1 и 2, и 3 и 4) зеркальны, их будем рассматривать одним случаем.

Касание 1:



Пусть O_1 – центр большей окружности, O_2 – меньшей. AB – касательная к ним. Из графика $O_1O_2 = 8$, $O_2B \perp AB = r = 1$, $O_1A \perp AB = R = 2$

Построим $O_2C \parallel AB$. $ABCO_2$ – прямоугольник, $AC = O_2B = 1$

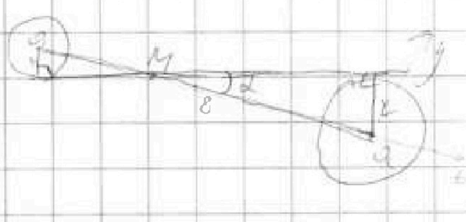
$O_1C = AO_1 - AC = 2-1 = 1$ $\quad$ ~~tgα~~ $\sin\alpha = \frac{1}{8} \Rightarrow \cos\alpha = \sqrt{\frac{64}{64}-\frac{1}{64}} = \frac{\sqrt{63}}{8}$

$tg\alpha = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{\sqrt{63}}{8}} = \frac{\sqrt{63}}{63}$

Заметим, угол между O_1O_2 и O_2C равен углу между AB и O_1O_2 (т.к. $AB \parallel O_2C$), т.е. α есть угол между осью X и касательной, значит его тангенс является угловым коэффициентом a.

Всего касательных две, и т.к. центры окружностей лежат на оси X, угловые коэффициенты для них будут отличаться знаком. Поэтому для значений $tg\alpha = \frac{\sqrt{63}}{63}$ и $-\frac{\sqrt{63}}{63}$ найдётся такое b, чтобы условие выполнялось.

Касание 2:



В этом случае α – снова угол между Ox и касательной. $O_1O_2 = O_1M + O_2M = \frac{1}{\sin\alpha} + \frac{2}{\sin\alpha} = 8$

откуда $\sin\alpha = \frac{3}{8}$, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{55}}{8}$

$tg\alpha = \frac{\frac{3}{8}}{\frac{\sqrt{55}}{8}} = \frac{3\sqrt{55}}{55}$

Аналогично предыдущему случаю, таких касательных две и ~~угол~~ α для них отличаются лишь по знаку, т.е. $a = \pm tg\alpha = \pm\frac{3\sqrt{55}}{55}$

Ответ: $\pm\frac{\sqrt{63}}{63}$, $\pm\frac{3\sqrt{55}}{55}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

На одной странице можно оформлять **только одну задачу**.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

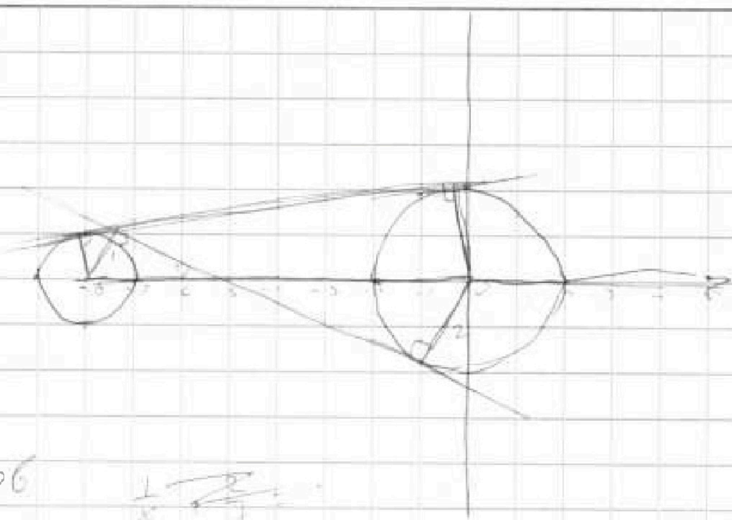
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$ax-y+10b=0$

$(x+8)^2+y^2\le1$

$x^2+y^2\le4$



$ax-y+10b=0$

$y=-ax-10b$

$y=kx+b$

$\cancel{+kx}\ (x^2+k^2x^2+2kxb+b^2)-4\le0$

$D=4k^2b^2-4(b^2-4)(1+k^2)$

$\cancel{D=4k^2b^2-4b^2(1+k^2)}$

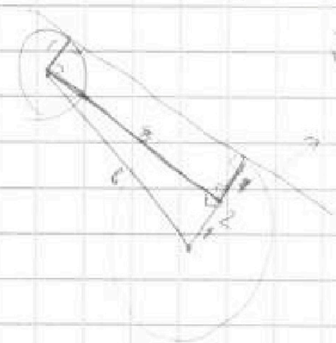
$x^2+8x+64+k^2x^2+2kxb+b^2-1=0$

$\cancel{D=4k^2b^2-4(}$

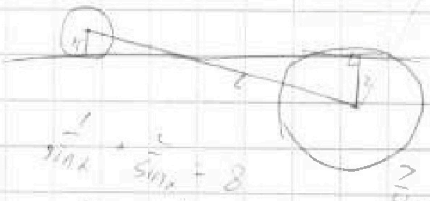
$D=4k^2($

$(2kx+8)^2-4(1+k^2)(b^2+63)$

$\frac{1}{\sqrt{65}}$ $\frac{\sqrt{65}}{65}$ $\frac{1+2}{1+6\,2+2}$ $\frac{2}{3-12}$ $(a+b)^2-8ab$



$a+b$



$\frac{1}{\sin x}+\frac{2}{\sin x}=8$

$\frac{2}{\sin x}=8$

$\sin x=\frac{3}{8}$

$64-9=55$

$\cos x=\frac{\sqrt{55}}{8}$

$\operatorname{tg}x=\frac{3}{\sqrt{55}}=\frac{3\sqrt{55}}{55}$

$\frac{2}{9+8}$

$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$ $\frac{a+b}{(a+b)^2-8ab}$

$a+b=n$ $n=kn$ $a+b=n$ $ab=kn$

$\frac{a+b^2-8ab}{a+b}$ $\frac{n}{n^2-8n}$ $\frac{n}{n^2-8kn}$ $\frac{1}{n-8k}$ $\frac{ab}{a+b}=k$

$a+b-\frac{8ab}{a+b}$

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2-8ab$

a^2+6ab

$\frac{a+b}{(a+b)^2-8a\cdot b}$ $\frac{1+2}{1+4-6\cdot 1\cdot 2} = \frac{3}{-7}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$a = 2^{a_1} 7^{a_2}$ (1) $a_1 + b_1 = 14$ (2) $b_1 + c_1 = 17$

$b = 2^{b_1} 7^{b_2}$ $b_2 + c_2 = 17$

$c = 2^{c_1} 7^{c_2}$ $a_2 + b_2 = 10$ (1) $a_1 + c_1 = 20$

$a_2 + c_2 = 37$

$abc = 2^{a_1+b_1+c_1} 7^{a_2+b_2+c_2}$

$2(a_2+b_2+c_2) = 10 + 17 + 37 = 64$ $14 + 17 + 20 = 51$

$a_2 + b_2 + c_2 = 32$ $2(a_1+b_1+c_1) = 51$

$a_1+b_1+c_1 = 26$

$2^{26} 7^{32}$ $a = 2^7 7^5$

$b = 2^7 7^5$

$a_1 = 8$ $b_1 = 6$ $c_1 = 12$ $c = 2^{13} 7^{20}$ $b_1 = 17 - c_1$

$c_2 = 17 - b_2$ $b_2 = 17 - c_2$ $14 - b_1 = 20 - c_1$

$a_2 = 10 - b_2$ $10 - b_2 = 37 - c_2$ $2b_1 - 14 = -3$

$a_2 + c_2 = 27 - 2b_2$ $2b_2 - 10 = -20$ $b_1 = \frac{11}{2} = 6$

$a_2 + c_2 = 37$ $b_2 = 0$ $b = -5$

$a_2 = 10$ $c_2 = 27$ $a = 12$ $c = 16$

$a_2 + c_2 = 27 - 2b_2$

$b_2 = 0$

$a_2 + c_2 = 27$

$a_2 + b_2 + c_2 = 32$ условие, что

$a_2 + c_2 = 37$ $10 c_2 = 22$

$37 + b_2 = 32$ $a_2 = 15$

$15 + 22 + b_2 = 32$

$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x$

$z = \sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1}$

$+7x + 2 = (2 - 7x) z$

$(2 - 7x) - (2 - 7x) z = 0$ $2x^2 - 5x + 3 \geq 0$

$2 - 7x = 0$ или $1 - z = 0$ $D = 25 - 24$

$x = \frac{2}{7}$ $z = 1$ $x_1 = \frac{5+1}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

$x_2 = +1$

$x \in (-\infty, +1]$

$[\frac{3}{2}, \infty)$

$2x^2 + 2x + 1 \geq 0$

$D = 4 - 8 < 0$

$2 - 7x = \sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1}$

$\frac{3}{4} - \frac{2}{2} + 1 =$ $6 + 10 + 3 = 1$

$= \frac{1}{4} - 1 + 1 = \frac{1}{4}$ $2 - 2 + 1 = 1$ $\frac{1}{2} - \frac{5}{2} + \frac{6}{2} = 1$ $\frac{1}{2} + \frac{5}{2} + \frac{6}{2} = 6$

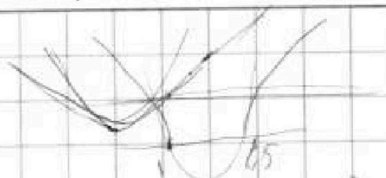
$\frac{1}{4} + 1 + 1 = 2\frac{1}{4}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



$\sqrt{2x^2-5x+3} + \sqrt{2x^2+2x+1} = 1$

$\sqrt{2-5+3} + \sqrt{2+2+1} = \sqrt{5} > 1$

$2x^2-5x+3 = 1 - 2\sqrt{2x^2+2x+1} + 2x^2+2x+1$

$2-7x = 1 - 2\sqrt{2x^2+2x+1}$

$2\sqrt{2x^2+2x+1} = 7x-1$

$8x^2+8x+4 = 49x^2-14x+1$

$41x^2-22x+3=0$

$\frac{D}{4} = 11^2+41\cdot 3 = 121-123 < 0$

$2x^2+2x+1 \geq 0$

$2x^2-5x+2 \geq 0$

$D: 25-16=3^2$

$x_1 = \frac{5-3}{4} = \frac{1}{2}$

$x_2 = 2$

$x \in (-\infty; -1) \cup (0; \infty)$

$x \in [-1; 0]$

$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$

$2x_2 + y_2 = 12 + 2x_1 + y_1$

$y_2 = (12+2x_1+y_1) - 2x_2$

13

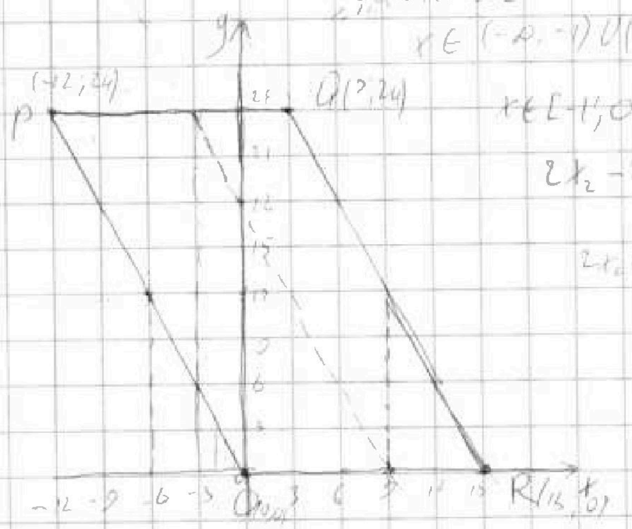
$x \in (\frac{1}{2}; 2)$

$x \in (-\infty; \frac{1}{2}) \cup$

$x \in [\frac{1}{2}; 2]$

13.19

13.19



1313

$12+2x_1+y_1 \leq$

$12+2x_1+y_1 \geq 0$

$y_1 \in [0; 24]$

$y_1 \geq -12-2x_1$

$~~-12-2x_1 \leq 24~~$

$12+2x_1+y_1 \leq 30$

$2x_1+y_1 \leq 18$

$y_1 \leq 18-2x_1$

$x_1 \geq -6$

$x_1 \geq 6$

$0 \leq 12+2x_1+y_1 \leq 30$

$y_1 \geq -12-2x_1$

$y_1 \leq 18-2x_1$

$x_1 \leq 9 - \frac{y_1}{2}$

$y_1 \geq 0$

$3 \leq x \leq 15$

$y = 18-2x$

$0 \geq -12-2x_1$

$24 \leq 18-2x_1$

$x \geq -6$

$x_1 \leq$

$12+2x_1+y_1 \leq 30$

$y_1 \leq 18-2x_1$

$x \in [0; 8]$

13.19

$24 \geq y_1 \geq -12-2x_1$