



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



- ✓ 1. [4 балла] Натуральные числа  $a$ ,  $b$ ,  $c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^{15}7^{11}$ ,  $bc$  делится на  $2^{17}7^{18}$ ,  $ac$  делится на  $2^{23}7^{39}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
- ✓ 2. [4 балла] Известно, что дробь  $\frac{a}{b}$  несократима ( $a \in \mathbb{N}$ ,  $b \in \mathbb{N}$ ). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$$

При каком наибольшем  $m$  могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на  $m$ ?

- ✓ 3. [4 балла] Центр окружности  $\omega$  лежит на окружности  $\Omega$ , хорда  $AB$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $C$  так, что  $AC : CB = 17 : 7$ . Найдите длину  $AB$ , если известно, что радиусы  $\omega$  и  $\Omega$  равны 7 и 13 соответственно.
4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0; 0)$ ,  $P(-13; 26)$ ,  $Q(3; 26)$  и  $R(16; 0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$ .
- ✓ 6. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник  $ABC$  вписан в окружность. Пусть  $M$  – середина той дуги  $AB$  описанной окружности, которая не содержит точку  $C$ ;  $N$  – середина той дуги  $AC$  описанной окружности, которая не содержит точку  $B$ . Найдите расстояние от вершины  $A$  до центра окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ , если расстояния от точек  $M$  и  $N$  до сторон  $AB$  и  $AC$  соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:



- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

M

Перестановка пер-ва

$$ab : 2^{15} \cdot 7^{11} \Rightarrow ab \geq 2^{15} \cdot 7^{11}$$

$$bc : 2^{17} \cdot 7^{18} \Rightarrow bc \geq 2^{17} \cdot 7^{18} \Rightarrow a^2 b^2 c^2 \geq 2^{55} \cdot 7^{68}$$

$$ac : 2^{23} \cdot 7^{39} \Rightarrow ac \geq 2^{23} \cdot 7^{39} \Rightarrow a^2 b^2 c^2 \geq 2^{55} \cdot 7^{68}$$

т.к.  $a, b, c \in \mathbb{N}$ , то  $abc \in \mathbb{N} \Rightarrow a^2 b^2 c^2 \in \mathbb{N}$ .

$$a^2 b^2 c^2 \geq 2^{55} \cdot 7^{68}, \text{ Заметим, что у нас вида}$$

$$a^2 b^2 c^2 : 2^{55} \cdot 7^{68}$$

$x^2$  в разложении всех простых чисел четно (степень каждого простого в разложении  $\geq 2$ )

Но  $2^{55}$  имеет нечетную степень, значит, чтобы  $abc \in \mathbb{N}$ , число  $a^2 b^2 c^2$  имеет хотя бы  $2^{56}$  в разложении.

$$a^2 b^2 c^2 \geq 2^{56} \cdot 7^{68} \Rightarrow abc \geq 2^{28} \cdot 7^{34}$$

$$a^2 b^2 c^2 \geq 2^{56} \cdot 7^{68} \Rightarrow abc \geq 2^{28} \cdot 7^{34} \text{ Проверим,}$$

что такое  $abc$  достигается, приведем пример.

$$abc = 2^{28} \cdot 7^{34}$$

$$a = 2^{10}$$

$$b = 2^5 \cdot 7$$

$$c = 2^{13}$$

Заметим, что  $abc \geq 2^{28} \cdot 7^{34}$   $abc : 2^{28} \cdot 7^{34}$

Из условия:  $ac : 7^{39} \Rightarrow abc : 7^{39}$

$$abc \geq 2^{28} \cdot 7^{39}$$

Получим  $abc \geq 2^{28} \cdot 7^{39}$  и  $abc : 2^{28} \cdot 7^{39}$ , т.к.

для натурального числа  $a^2 b^2 c^2$ :

Покажем, что  $abc = 2^{28} \cdot 7^{39}$  достигается.

$$a = 2^{10} \cdot 7^{11}$$

$$b = 2^5 \cdot 7 \Rightarrow abc = 2^{28} \cdot 7^{39}$$

$$c = 2^{13} \cdot 7^{28}$$

Ответ:  $abc = 2^{28} \cdot 7^{39}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№2

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2-9ab}$$

Пусть  $a+b \equiv m$ , тогда и  $(a+b)^2 \equiv m$ , но  
если мы хотим, чтобы дробь можно  
было сократить на  $m$ , то и  $(a+b)^2-9ab \equiv m$

$(a+b)^2 \equiv m \Rightarrow 9ab \equiv m$ . Заметим, что т.к.  
 $\frac{a}{b}$  - несократима, то в ее разложении  
на простые нет одинаковых  $\Rightarrow a+b \equiv m$ , и  
такого  $m$  (и даже его делителя простого  
делителя) нет в разложении ни  $a$  ни  $b$ ,  
иначе:

Пусть  $m \equiv r$  и  $a \equiv r$  (где  $r$  - простое, тогда)

$r \cdot k + b \equiv r \cdot n \Rightarrow b \equiv r$  - противоречие т.к.

$\text{НОД}(a, b) = 1$ , т.к.  $\frac{a}{b}$  несократима

Получим, что все делители числа  $a+b$  отмы-  
ты от делителей  $a$  и  $b \Rightarrow$  делители  
от  $a \cdot b$

Но  $9ab \equiv m \Rightarrow m$  не более 9, т.к. иначе  
 $ab \not\equiv m$ , а по  $9ab \equiv m \Rightarrow 9 \equiv m \Rightarrow m \equiv 9$  либо  
9, либо 3.

Пример для деления на 9.

$$a=5 \quad b=4$$

$$\frac{5+4}{25-140+16} = \frac{9}{-99} = -\frac{1}{11} \text{ - можно сократить на 9.}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№3.

Дано:

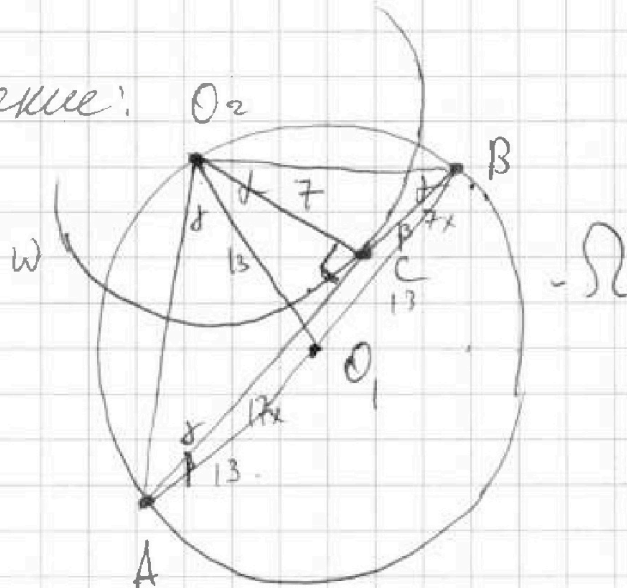
$$\frac{AC_2}{CB} = \frac{17}{7}$$

$$r = 7$$

$$R = 13$$

AB-?

Решение:



Пусть  $O_1$  и  $O_2$  - центры окр-ей  $\Omega$  и  $\omega$  соответственно.  
Велико.  $O_2C \perp AB$ , т.к.  $AB$  - касательная к  $\omega$ .

Т.к.  $A, O_1, B \in \Omega$ , то  $\triangle O_2O_1B \cong \triangle O_2O_1A \cong \triangle AOB$   
равнобедренные, т.к.  $O_2O_1 = O_1B = O_1A = R = 13$ .

Т.к.  $O_1B = O_1A$  - это  $\triangle AOB$  - равнобедрен  $\Rightarrow \angle BO_1O_2 = \angle O_1BA = \beta$

Т.к.  $O_1O_2 = O_1A = R = 13$ , то  $\triangle O_1O_2A$  равнобедрен  $\Rightarrow \angle O_1O_2A = \angle O_2AO_1 = \alpha$ .

Т.к.  $O_1O_2 = O_1B = R = 13$ , то  $\triangle O_1O_2B$  равнобедрен  $\Rightarrow \angle O_1BO_2 = \angle O_1O_2B = \alpha$

Т.к.  $O_2C \perp AB$ , то  $\triangle O_2CB$  и  $\triangle O_2CA$  прямоугольные  $\Rightarrow$   
из  $\triangle O_2CB \angle O_2BC = \angle O_2BO_1 - \angle ABO_1 = \alpha - \beta$ .

$$O_2B^2 = O_2C^2 + CB^2 = 49 + 49x^2 \Rightarrow O_2B = 7\sqrt{x^2 + 1}$$

по Т. Пифагора

$$\text{Аналогично } O_2A = \sqrt{7^2 + 17^2 x^2}$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \frac{O_2C}{O_2B} = \frac{7}{7\sqrt{x^2 + 1}} \text{ из } \triangle O_2CB \quad \frac{7}{O_2B} \text{ из } \triangle O_2CB$$

По Т. синусов из  $\triangle AO_2B \quad \frac{O_2A}{\sin(\alpha - \beta)} = 2R = 26 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sin(\alpha - \beta) = \frac{O_2A}{26}$$

$$\text{Подставим } \frac{O_2A}{26} = \frac{O_2C}{O_2B} \Rightarrow 7O_2A = 26O_2C = 49O_2A^2 = 26^2 O_2B^2$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$49 O_2 A^2 = 26^2 O_2 B^2$$

$$7^2 \cdot (7^2 + 17^2 x^2) = 26^2 (7^2 + 7^2 x^2)$$

$$7^4 + 17^2 \cdot 7^2 x^2 = 26^2 \cdot 7^2 + 26^2 \cdot 7^2 x^2 \quad | : 7^2$$

$$7^2 + 17^2 x^2 = 26^2 + 26^2 x^2$$

$$x^2 (26^2 - 17^2) = 7^2 - 26^2$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \frac{7}{O_2 B}$$

$$7 \cdot 26 = O_2 A \cdot O_2 B$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \frac{O_2 A}{26} \Rightarrow$$

$$7 \cdot 7 \sqrt{1+x^2} \cdot \sqrt{7^2+17^2 x^2} = 7 \cdot 26 \quad | : 7$$

$$\sqrt{1+x^2} \cdot \sqrt{7^2+17^2 x^2} = 26 \quad | \wedge_2$$

$$(1+x^2)(7^2+17^2 x^2) = 26^2$$

$$7^2 + x^2(17^2+7^2) + 17^2 x^4 = 26^2$$

$$t = x^2$$

$$17^2 t^2 + (17^2+7^2)t - 26^2 + 7^2 = 0!$$

$$D = (17^2+7^2)^2 + 4 \cdot (26^2+7^2) \cdot 17^2$$

$$289t^2 + 338t - 627 = 0. \quad \text{Один из корней}$$

$$t_1 = 1$$

$$t_2 \text{ по Ф.Т. Виета}$$

$$t_1 + t_2 = -\frac{338}{289}$$

$$1 + t_2 = -\frac{338}{289} \Rightarrow t_2 = -\left(\frac{338}{289} + 1\right)$$

$t = x^2 \Rightarrow t_2$  не подходит, т.к.  $t_2 < 0$ .

$t_1 = x^2 \Rightarrow x = \pm 1$ , но  $x$ -длина, оставившаяся  
Только  $x = 1$ , иначе сумма не 24.

$$AB = AC + BC = 17x + 7x = 24x = 24.$$

Ответ:  $\textcircled{B}$   $AB = 24$ .

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$y^2 = x^2 - 1 - x^2$$

$$y = -ax + 8b$$

$$y^2 = a^2 x^2 - 16abx + 64b^2$$

$$y^2 = (a^2 + 1)x^2 - 16abx$$

$$4b^2 - 12b + 8 \geq 0$$

$$\begin{aligned} & (-ax - 12 + 8b)^2 \\ & (-ax + (8b - 12))^2 = \end{aligned}$$

$$D = 144 - 16 \cdot 8 = 144 - 128 = a^2 x^2 - 2ax(8b - 12) + (8b - 12)^2 =$$

$$b_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{12 \pm 4}}{8}$$

$$\begin{aligned} & = a^2 x^2 - 16axb + 24ax + 64b^2 - \\ & = 192b + 144 \end{aligned}$$

$$b_1 = 2 \quad b_2 = -1$$

$$\begin{array}{r} \times 24 \\ 24 \\ + 96 \\ + 48 \\ \hline 576 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 192 \overline{) 4} \\ 16 \overline{) 48} \\ 32 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 24 \\ 32 \\ + 48 \\ + 72 \\ \hline 768 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 192 \overline{) 16} \\ 18 \overline{) 12} \\ 32 \end{array}$$

$$12^2 + 12 \cdot 20 \cdot 7$$

$$12(12 + 140)$$

$$12 \cdot 152$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N4

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

0 31

$$3x^2 - 6x + 2 \geq 0$$

$$3x^2 - 6x + 2 \geq 0$$

$$D = 36 - 24 = 12 \quad x_1 = \frac{6 + \sqrt{12}}{6} \quad x_2 = \frac{6 - \sqrt{12}}{6}$$

$$x \in \left(-\infty; \frac{6 - \sqrt{12}}{6}\right] \cup \left[\frac{6 + \sqrt{12}}{6}; +\infty\right)$$

$$3x^2 + 3x + 1 \geq 0$$

$$\Delta = 3x^2 + 3x + 1 = 0, \quad D = 9 - 12 = -3 \Rightarrow \text{нет корней.}$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = (1 - 9x) + \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$3x^2 - 6x + 2 = (1 - 9x)^2 + 3x^2 + 3x + 1 + 2(1 - 9x)\sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$1 - 9x = (1 - 9x)^2 + 2(1 - 9x)\sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$1) \quad x \neq \frac{1}{9}$$

$$1 = 1 - 9x + 2\sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$2\sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 9x, \Rightarrow x \geq 0.$$

$$4(12x^2 + 12x + 4) = 81x^2$$

$$65x^2 - 12x - 4 = 0$$

$$D = 144 + 4 \cdot 4 \cdot 69 = 144 + 16 \cdot 69 = 1248$$

$$x_1 = \frac{-12 \pm \sqrt{1248}}{2 \cdot 65} = -\frac{1}{2} + 52 = 51,5$$

$$x_2 = \frac{-12 - \sqrt{1248}}{2 \cdot 65} = -\frac{1}{2} - 52 = -53,5$$

$x_2$  не подходит, т.к.  $x \geq 0$

$$x_1 = 51,5$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$2) x = \frac{1}{9}$$

Подставим и проверим.

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

$$\sqrt{\frac{1}{27} - \frac{2}{3} + 2} - \sqrt{\frac{1}{27} + \frac{1}{3} + 1} = 0$$

$$\sqrt{\frac{1}{27} + \frac{4}{3}} - \sqrt{\frac{1}{27} + \frac{1}{3} + 1} = 0$$

$$\sqrt{\frac{37}{27}} - \sqrt{\frac{37}{27}} = 0. \quad x = \frac{1}{9} - \text{корень.}$$

*лишние корни*

Возведем в первый раз в квадрат,

предположим, что правая часть  $\geq 0$ .

как видим, или этот корень или этот ток.

Проверим:  $x = 51,5$ .

$$\sqrt{3 \cdot 51,5^2 - 6 \cdot 51,5 + 2} - \sqrt{3 \cdot 51,5^2 + 3 \cdot 51,5 + 1} = 1 - 51,5 \cdot 9$$

$< 0$ .

$$1 - 51,5 \cdot 9 + \sqrt{3 \cdot 51,5^2 + 3 \cdot 51,5 + 1} \geq 0$$

$$1 - 9x + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} \geq 9x - 1 \quad \text{для проверки}$$

$x = 51,5$ .

Ответ:  $x = \frac{1}{9}, x = 51,5$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

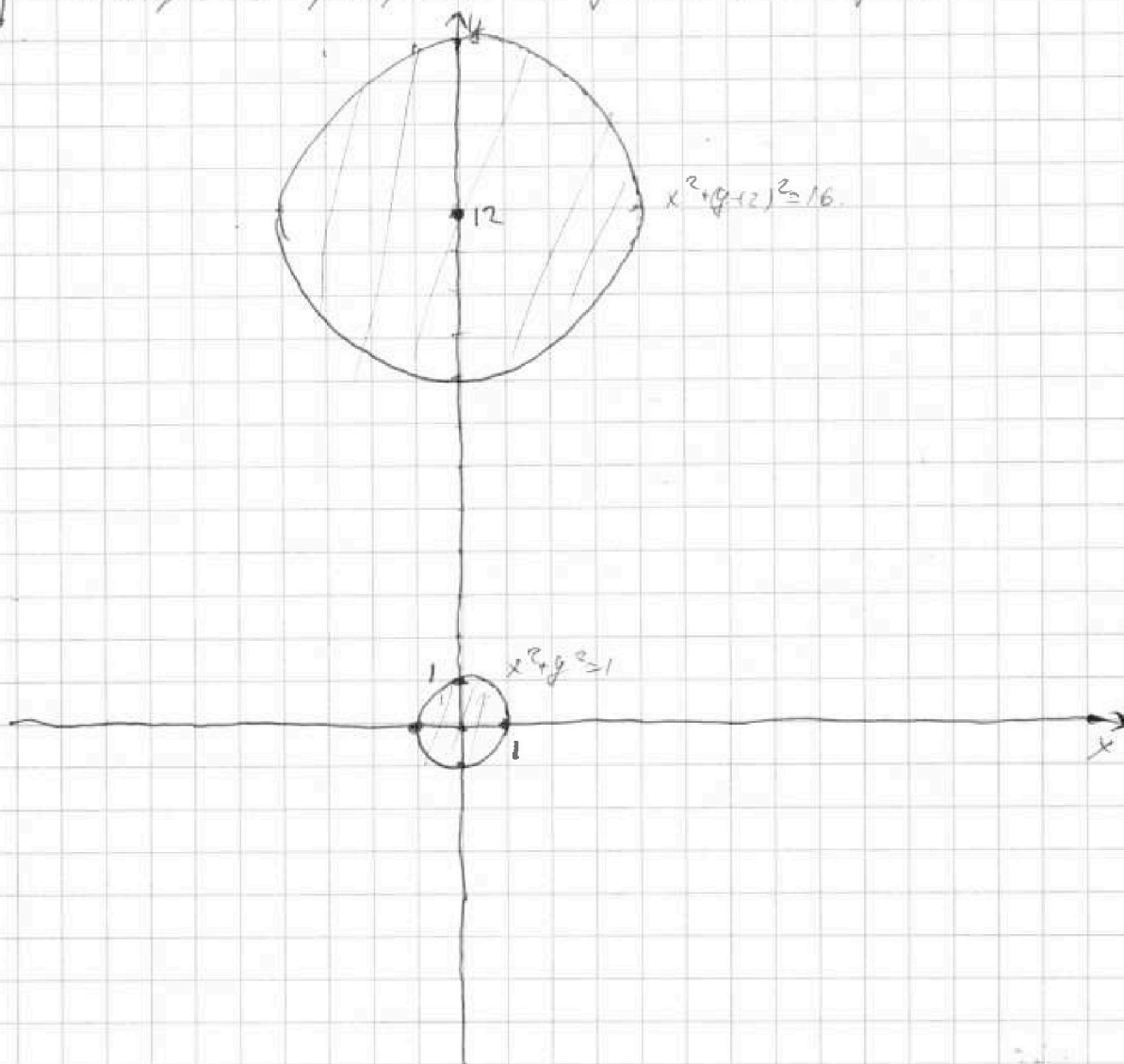


$$\begin{cases} ax+by-8c=0 \Rightarrow y = -ax+8c \\ (x^2+y^2-1)(x^2+(y-12)^2-16) \leq 0 \end{cases}$$

$$(x^2+y^2-1)(x^2+(y-12)^2-16) \leq 0 \Rightarrow 1) \text{ либо } \begin{cases} x^2+y^2-1 \leq 0 \\ x^2+(y-12)^2-16 \geq 0 \end{cases}$$
$$2) \text{ либо } \begin{cases} x^2+(y-12)^2-16 \leq 0 \\ x^2+y^2-1 \leq 0 \end{cases}$$

Рассмотрим оба случая; предельно  
построить графики  $x^2+y^2-1=0$  и  $x^2+(y-12)^2-16=0$ .

1)



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МОТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Ур-е окр-во  $x^2+y^2 \leq 1$  говорит о том, что нам подходят все точки внутри окр-та  $x^2+y^2=1$  и на границе. Аналогично с ур-ем  $x^2+(y+12)^2=16$ .

Получается, в условии 1) прямая  $y=-ax+8b$  должна либо пересекать окр-т  $x^2+y^2=1$  и либо касаться, либо не пересекать окр-т  $x^2+(y+12)^2=16$ .

Получается, что тогда в ур-е система имеет 2 решения, прямая  $y=-ax+8b$  должна касаться как окр-та  $x^2+y^2=1$ , так и окр-та  $x^2+(y+12)^2=16$ . Т.к. если она будет их пересекать хотя бы одну из них, то уже будет бесконечное множество решений системы.

Это значит, что у системы

$$1) \begin{cases} x^2+y^2=1 \\ y=-ax+8b \end{cases} \text{ одно решение}$$

$$2) \begin{cases} x^2+(y+12)^2=16 \\ y=-ax+8b \end{cases} \text{ - также одно решение.}$$

Решим систему 1.

$$\begin{cases} y^2=1-x^2 \\ y=-ax+8b \end{cases} \Rightarrow (ax+8b)^2=1-x^2$$

$$a^2x^2 - 16abx + 64b^2 = 1 - x^2$$
$$a^2(x^2+1) - 16abx + 64b^2 - 1 = 0$$

одно решение -  $D=0$ .

$$D = 256a^2b^2 - 4a^2(64b^2 - 1) = 0$$
$$D = 256a^2b^2 - 256a^2b^2 + 4a^2 = 0$$

$1=0$ . противоречие

$$ax^2 + 64b^2 - 16abx + x^2 - 1 = 0$$
$$(a^2+1)x^2 - 16abx + 64b^2 - 1 = 0 \text{ одно решение - } D=0.$$

$$D = 256a^2b^2 - 4(a^2+1)(64b^2-1) \text{ относительно } x.$$

$$D = 256a^2b^2 - 4(64a^2b^2 - a^2 + 64b^2 - 1)$$
$$D = 4a^2 - 256b^2 + 4 = 0$$
$$4a^2 = 256b^2 - 4$$
$$a^2 = 64b^2 - 1$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Получаем, что чтобы система имела одно решение  $a^2 = 64b^2 + 1$ .

Поможем в случае 2).

$$(y-12)^2 \begin{cases} x^2 + (y-12)^2 = 16 \\ y = -ax + 8b \end{cases}$$

$$x^2 + (-ax - 12 + 8b)^2 = 16$$

$$x^2 + a^2x^2 - 2ax(8b - 12) + (8b - 12)^2 = 16$$

$$x^2 + a^2x^2$$

$$x^2(a^2 + 1) - 16abx + 24ax + 64b^2 - 192b + 144 = 16$$

$$(a^2 + 1)x^2 + x(24a - 16ab) + 64b^2 - 192b + 128 = 0$$

решение одно  $\Rightarrow D = 0$

$$D = (24a - 16ab)^2 - 4 \cdot (a^2 + 1)(64b^2 - 192b + 128) = 0$$

$$D = 576a^2 + 256a^2b^2 - 768a^2b - 4(64a^2b^2 - 192a^2b + 128a^2 + 64b^2 - 192b + 128) = 0$$

$$D = 576a^2 + 256a^2b^2 - 768a^2b - 256a^2b^2 + 768a^2b - 512a^2 - 256b^2 + 768b - 512 = 0$$

$$64a^2 - 256b^2 + 768b - 512 = 0 \quad | : 64$$

$$a^2 - 4b^2 + 12b - 8 = 0 \quad \text{решим относительно } a$$

$$-4b^2 + 12b + a^2 - 8 = 0$$

$$D = 144 + 4(4b^2 - 8) = 144 + 16b^2 - 32 = 16(b^2 + 1)$$

$$b = \frac{-12 \pm \sqrt{16(b^2 + 1)}}{-8} \quad a = 4b^2 - 12b + 8$$

III. к. Как нужно касание двух окружностей, то при фикс.  $a$  и  $b$  также должны быть положительными и теми и теми. В первом случае:

$$(1) \begin{cases} a^2 = 64b^2 + 1 \\ \Rightarrow 60b^2 + 12b - 7 = 0 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} a^2 = 4b^2 - 12b + 8 \end{cases}$$

$$D = 144 + 240 \cdot 7$$

$$b_{1,2} = \frac{-12 \pm \sqrt{12 \cdot 152}}{120} = \frac{-12 \pm \sqrt{12 \cdot 152}}{120}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Печать QR-кода недопустима!

$$D = 64a^2 - 256b^2 + 768b - 512 = 0.$$

$$a^2 - 4b^2 + 12b - 8 = 0$$

$a^2 = 4b^2 - 12b + 8$  - чтобы было касание с верхней окр-ю.

$$\begin{cases} (1) a^2 = 4b^2 - 12b + 8 \\ (2) a^2 = 64b^2 - 1 \end{cases} \text{ - для нижней окр-ти.}$$

$$(1)-(2): 60b^2 + 12b - 9 = 0.$$

$$D = 144 + 240 \cdot 9 = 144 + 12 \cdot 12 \cdot 15.$$

$$b_{1,2} = \frac{-12 \pm \sqrt{144(1+15)}}{120}$$

$$b_1 = \frac{-12 + 12\sqrt{16}}{120} = \frac{-120 + -12 + 48}{120} = \frac{36}{120} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}.$$

$$b_2 = \frac{-12 - 48}{120} = -\frac{1}{2}$$

$$a^2 \geq 0 \Rightarrow 4b^2 - 12b + 8 \geq 0$$

$$64b^2 - 1 \geq 0 \Rightarrow |b| \geq \frac{1}{8}$$

$$4b^2 - 12b + 8 \geq 0$$

$$4b^2 - 12b + 8 = 0 \Rightarrow D =$$

$$D = 144 - 128 = 16$$

$$b_4 = \frac{12 \pm 4}{8} = 2$$

$$b_3 = \frac{12 - 4}{8} = 1$$

$\Rightarrow b \notin (1; 2)$  - подходит все  $b$ , кроме  $b \in (1; 2)$ , т.к. коэффициенты при  $b^2 > 0$ .

т.к. это так, то корни  $b_1$  не подходит, т.к.

оба корня  $b_1$  и  $b_2$  как видно подходят найдем в них значения  $a^2$

$$a^2 = 64b^2 - 1 = 64b_1^2 - 1 = \frac{64 \cdot 9}{25} - 1 = \frac{16 \cdot 9 - 25}{25}$$

$$a = \pm \frac{\sqrt{119}}{5} \quad a = \pm \frac{\sqrt{119}}{5}$$

$$a^2 = 64b_2^2 - 1 = 64 \cdot \frac{1}{4} - 1 = 15 \Rightarrow a = \pm \sqrt{15}$$

$$\text{Ответ: } a \in \pm \frac{\sqrt{119}}{5}, a = \pm \sqrt{15}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{3x^2-6x+2} - \sqrt{3x^2+3x+1} = 1-9x$$

$$3x^2-6x+2 + 3x^2+3x+1 - 2\sqrt{(3x^2-6x+2)(3x^2+3x+1)} = (1-9x)^2$$

$$3x^2+3x+1 = 3x(x+1)+1$$

$$3x(x-2)+2$$

$$(3x(x+1)+1)(3x(x-2)+2)$$

$$\underbrace{(3x(x+1)+1)}_a (\underbrace{3x(x+1)+2-3x})$$

$$(a+1)(a-3x+2)$$

$$a^2+a-3ax+2a-3x+2$$

$$3x^2-6x+2 - 3x^2-3x-1 = \boxed{1-9x}$$

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = c \Rightarrow a$$

$$\sqrt{3x^2+3x+1+1-9x} - \sqrt{3x^2+3x+1} = 1-9x$$

$$\sqrt{a+b} - \sqrt{a} = \sqrt{b}$$

$$\cancel{\sqrt{a+b}} \Rightarrow a+b+a-2\sqrt{a^2-ab} = b^2$$

$$a+b+a-2\sqrt{a(a-b)} = b^2$$

$$2a+b-2\sqrt{a(a-b)} = b^2$$

$$\begin{array}{r} 5+3 \\ 25-7 \cdot 15+9 \\ 36-70-35 \end{array}$$

$$5 \ 3$$

$$\begin{array}{r} 5+4 \\ 25+16-7 \cdot 20 \\ 41-140-41 = \\ = 99. \end{array}$$

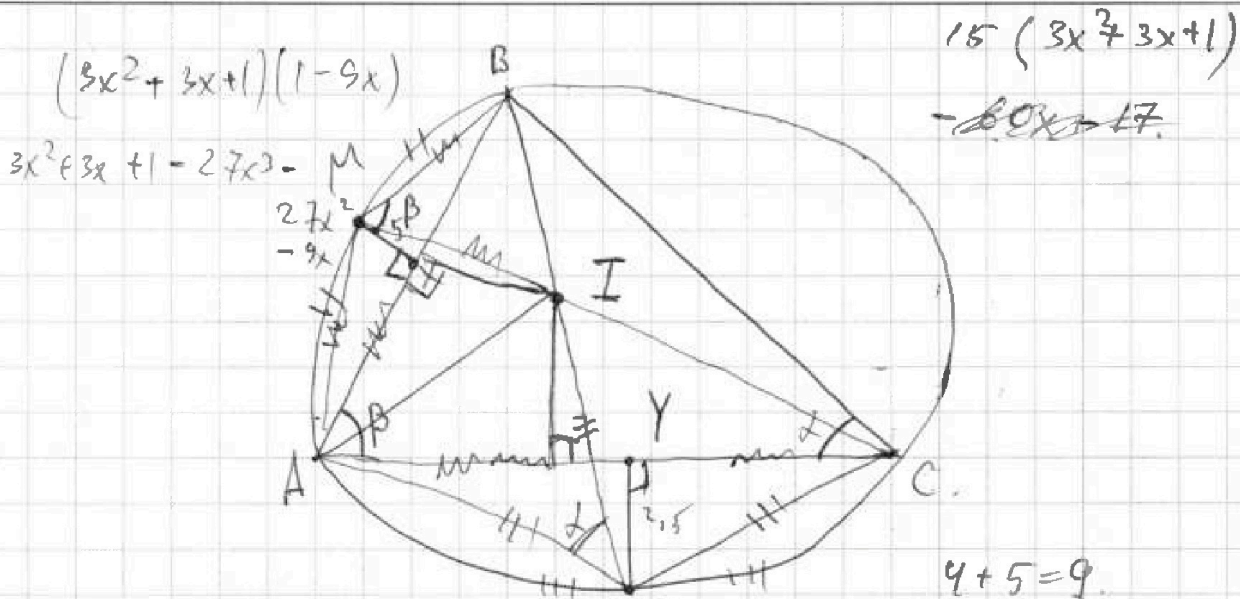
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

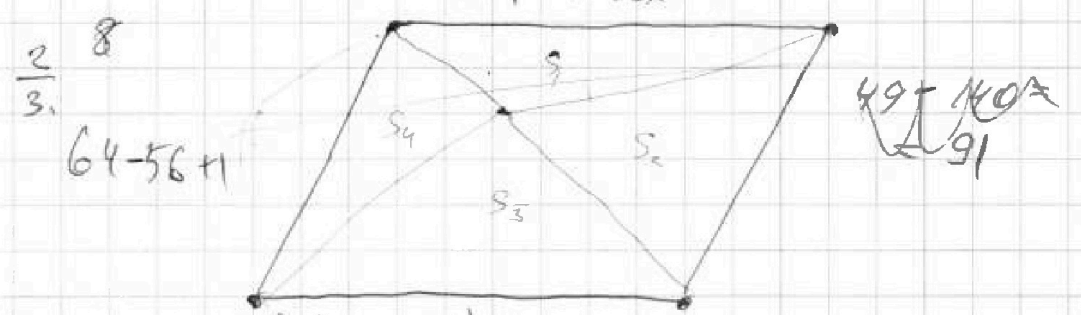
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$(3x^2 + 3x + 1)(1 - 9x)$   
 $3x^2 + 3x + 1 - 27x^3 - 27x^2 - 27x - 1$

$15(3x^2 + 3x + 1)$   
 $- 27x^3 - 17$

$AN^2 = 2.5^2 + AY^2$   
 $AM^2 = 5^2 + AX^2$   
 $4x^2 - 4x + 1 + x^2 - 2x + 1$   
 $4x^2 - 8x + 4$   
 $4x^2 - 8x + 4 - x^2 + 2x - 2$



$a + b = m$   
 $a^2 + 7ab + b^2 = m^2$   
 $3(x^2 - 2x + 1) - 1$   
 $3(x - 1)^2 - 1$   
 $3(x^2 + 1)$   
 $(a + b)^2 = 9ab$

$\frac{1}{2} 3(x - 1)^2 - 1 + 1 - 9x = m$   
 $3(x - 1)^2 - 9x$   
 $\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$   
 $3x^2 - 6x + 2 + 3x^2 + 3x + 1$   
 $6x^2 - 3x + 3 - 2\sqrt{(3x^2 + 3x + 1)(3x^2 + 3x + 1 - 9x)}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№4.  $\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$

$\sqrt{3(x^2 - 2x + 1) - 1} - \sqrt{3(x^2 + x + 1) - 1} = 1 - 9x$        $y^2 = 1 - x^2$

$\sqrt{a - 9x + 1} - \sqrt{a} = 1 - 9x$

$a - 9x + 1 - a$

$3x^2 - 6x + 2 = 4x^2 - 4x + 1 + x^2 - 2x + 1$

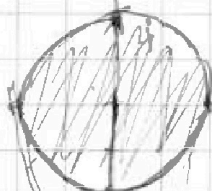
$3x^2 + 3x + 1 = 4x^2 + 4x + 1 - x^2 - x$   
 $(2x + 1)^2 = x(x + 1)$

№6.

$ax + y - 8b = 0$

$(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0$

$x^2 + y^2 \leq 1$   
 $x^2 + y^2 = 1$



y



$x^2 + y^2 = 1 = ax$

$x^2 + y^2 - 1 = 0$

$y^2 = 1 - x^2$

$y = ax + 8b$

$ax^2$

$16 \cdot 9 =$

$= 90 + 9 \cdot 6 =$

$= 144 - 250 =$

$-106$

x

либо  $x^2 + y^2 = 1 \leq 0$

$x^2 + (y - 12)^2 \leq 16$

$x^2 + y^2 \leq 1$

внутри окр-ти.

$y = -ax + 8b$ .  $\forall a, b = 0$

(2)

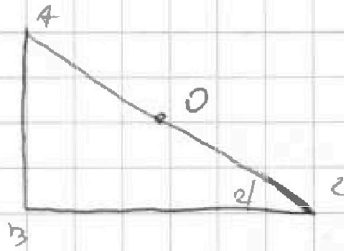
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

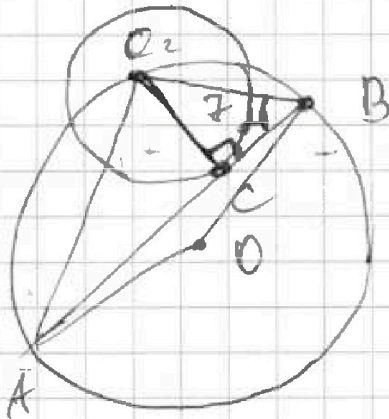
1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



~~AB = 2R?  $\sin \alpha$~~



$$\sin \alpha = \frac{O_2 B}{O_2 A} = \frac{7}{26}$$

~~$\sin \alpha$~~

$$\frac{O_2 A}{\sin \alpha} = 26$$

$$\frac{O_2 B}{7} = \frac{O_2 A}{26}$$

$$t_1 + t_2 = \frac{17^2 + 7^2}{17^2} = -1 - \left(\frac{7}{17}\right)^2$$

$$t_1 t_2 = \frac{7^2 + 26^2}{17^2}$$

$$\sqrt{(x^2 + 1)(7^2 + 17x^2)} =$$

$$\sqrt{7^2 x^2 + 17^2 x^4 + 7^2 + 17x^2}$$

$$x \sqrt{7^2 + 17x^2 + 17^2} = 26$$

$$7^2 = 49$$

$$17^2 = 289$$

$$26^2 = 676$$

$$\begin{array}{r} 17 \\ \times 17 \\ \hline 119 \\ + 170 \\ \hline 289 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 26 \\ 26 \\ \hline 156 \\ + 520 \\ \hline 676 \end{array}$$

$$49x^2 + 289x^4 + 49 + 289x^2 = 676$$

$$289x^4 + 338x^2 + 49 = 676$$

$$289x^4 + 338x^2 - 627 = 0$$

$$289t^2 + 338t - 627 = 0$$

$$t = 1$$

$$289 + 338 = 589 + 38$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$6x^2 - 3x + 3$$

$$3(2x^2 - x + 1) - 2\sqrt{\quad} = 1 - 9x$$

$$a(1 - 9x) + a^2$$
$$a^2 + a(1 - 9x)$$

$$a(1 - 9x + a)$$

$$a^2 + a - 9ax$$

$$a^2 + a - 9(3x^2 + 3x + 1)x$$

$$3x^2 + 3x + 1 - 9x = (1 - 9x)^2 + 3x^2 + 3x + 1$$

$$1 - 9x = (1 - 9x)^2 + 2\sqrt{\quad}$$

$$1 - 9x = (1 - 9x)^2 + 2(1 - 9x)\sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$1 - 9x = t$$

$$t = t^2 + 2t\sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$t + 2\sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1$$

$$9x =$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

ИФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N 4

240 · 5 = 1200 16 - 69

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

OD3:

$$3x^2 - 6x + 2 \geq 0$$

$$3x^2 - 6x + 2 \geq 0$$

$$D = 36 - 24 = 12$$

$$x_1 = \frac{6 - \sqrt{12}}{6}, x_2 = \frac{6 + \sqrt{12}}{6} \Rightarrow x \notin \left( \frac{6 - \sqrt{12}}{6}, \frac{6 + \sqrt{12}}{6} \right)$$

$$3x^2 + 3x + 1 \geq 0$$

$$3x^2 + 3x + 1 \geq 0$$

$$D = 9 - 12 = -3. \text{ Всегда } > 0.$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = \sqrt{3x^2 + 3x + 1 + 1 - 9x}$$

$$\sqrt{3x^2 + 3x + 1 + 1 - 9x} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x \quad \text{возведем в квадрат}$$

$$3x^2 + 3x + 1 + 1 - 9x + 3x^2 + 3x + 1 - 2\sqrt{(3x^2 + 3x + 1)(3x^2 + 3x + 1 + 1 - 9x)} = (1 - 9x)^2$$

$$6x^2 - 3x + 3 - 2(3x^2 + 3x + 1)\sqrt{(3x^2 + 3x + 1)(1 - 9x)} = 1 + 81x^2 - 18x$$

$$2(3x^2 + 3x + 1)\sqrt{(3x^2 + 3x + 1)(1 - 9x)} = 75x^2 - 15x - 2$$

$$\sqrt{3(x^2 - 1)^2 - 1} - \sqrt{3(x - 1)^2 - 9x} = 1 - 9x$$

$$3(x - 1)^2 - 1 + 3(x - 1)^2 - 9x - 2\sqrt{(3(x - 1)^2 - 1)(3(x - 1)^2 - 9x)} = (1 - 9x)^2$$

$$3x^2 - 6x + 3 - 1 + 3x^2 - 6x + 1 - 9x - 2\sqrt{(x - 1)^2 - 1}(3(x - 1)^2 - 9x) = 81x^2 + 1 - 18x$$

$$6x^2 - 3x + 3 - 2\sqrt{(3(x - 1)^2 - 1)(3(x - 1)^2 - 9x)} = 81x^2 + 1$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$1) \quad ab \geq 2^{15} \cdot 7^{11}$$

$$ac \geq 2^{23} \cdot 7^{18}$$

$$bc \geq 2^{17} \cdot 7^{18}$$

$$a^2 b^2 c^2 \geq 2^{55} \cdot 7^{68}$$

$$abc \geq 7^{34} \cdot 2^{27} \cdot \sqrt{2} \Rightarrow abc \geq 7^{34} \cdot 2^{28}$$

$$\text{НОЗ}(a, b) = 1$$

2)

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2} = \frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$$

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$$

$$\frac{(a+b)}{(a+b)^2-9ab}$$

4)

$$\sqrt{3x^2-6x+2} - \sqrt{3x^2+3x+1} = 1-9x$$

$$\sqrt{3x^2-3x+1} - \sqrt{3x^2+3x+1} = 1-9x$$

$$3x^2-6x+1 = (\sqrt{3x^2+3x+1})^2$$

$$\frac{(a+b)}{(a+b+3ab)(a+b-3ab)}$$

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$$

$$\frac{(a+b)}{(a-b)^2-5ab}$$

$$\sqrt{3x^2-6x+2} - \sqrt{3x^2+3x+1} = 1-9x$$

$$(3x^2-6x+2) - (3x^2+3x+1) =$$

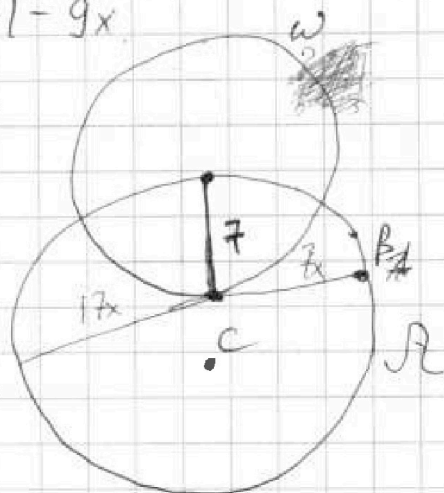
$$\sqrt{3x^2+3x+1} = a$$

$$3x^2-6x+2 = a-9x+1$$

$$\sqrt{a+b} - \sqrt{a} = b$$

$$a+b+a-2\sqrt{a^2+ab} = b^2$$

A



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$a = 2$

$a = 2^{10}$   
 $b = 2^8$   
 $c = 2^{12}$   
 $b = 2^5$   
 $a = 2^{10}$   
 $c = 2^{13}$   
 $7 \cdot 8$

$x + y + z + 2 + x = 7^6$

$a = 2^8$   
 $b = 2^7$   
 $c = 2^{10}$

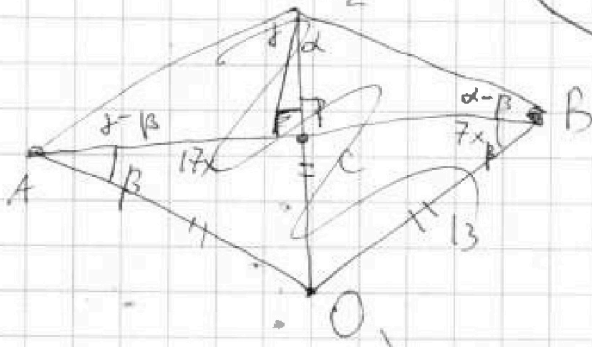
$c = 2$

34

$a = 2^{15}$   
 $c =$

$x + y = 15$   
 $y + z = 17$   
 $x + z = 23$

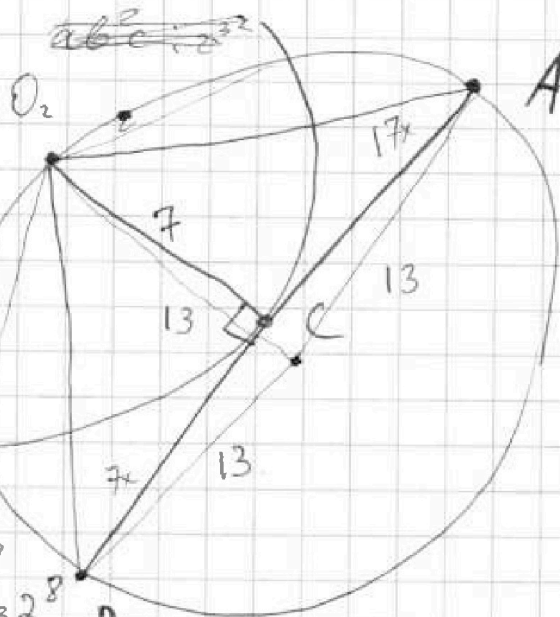
$O_2$



$\frac{7}{\sin(\alpha - \beta)} = O_2 A$

$\frac{7}{\sin(\beta - \alpha)} = O_2 B$

$\frac{O_2 B}{\sin(\beta - \alpha)} = 26$



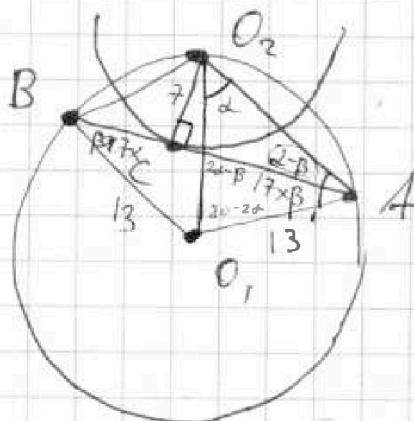
$O_2 B = \sqrt{49 + 10x^2}$

$O_2 A = 7\sqrt{1 + x^2}$   
 $O_2 C = \sqrt{7 + 17x^2}$

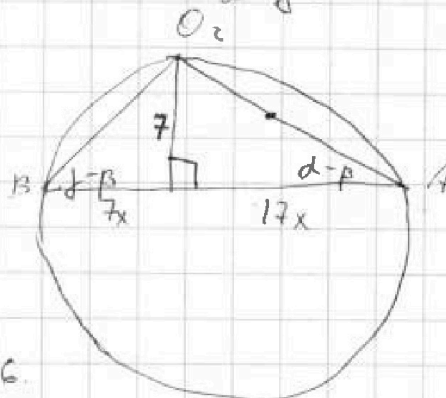
$\frac{BO_2}{\sin(\alpha - \beta)} = 26$

$\frac{O_2 A}{\sin(\beta - \alpha)} = 26$

$\frac{7}{4} \cdot O_2 A = O_2 C$



$2\alpha + \beta = 90^\circ$   
 $2\beta + \alpha = 90^\circ$   
 $\alpha = \beta$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$b_{1,2} = \frac{-12 \pm \sqrt{12^2 + 152}}{120}$$
$$b_1 = \frac{-12 - \sqrt{12^2 + 152}}{120}$$
$$b_2 = \frac{-12 + \sqrt{12^2 + 152}}{120}$$

Условие ур-е (2) имело смысл, то

$$4b^2 - 12b + 8 \geq 0$$

$$D = 144 - 128 = 16$$

$$b_{x1} = \frac{12-4}{8} = 1$$

$$b_{x2} = \frac{12+4}{8} = 2$$

$\Rightarrow$  подходит  $b \in (-\infty; -1] \cup [2; +\infty)$ .  
Т.к. координаты  $b^2 > 0$

Положа среди  $b_1$  и  $b_2$  те

Оценим  $b_1$  и  $b_2$ .

$$b_1 = \frac{-12 - \sqrt{12^2 + 152}}{120} < \frac{-12 - \sqrt{12^2 + 12^2}}{120} = \frac{-24\sqrt{2}}{120} < -1$$

$b_1 < 2 \Rightarrow$  он не подходит.

$$b_2 = \frac{-12 + \sqrt{12^2 + 152}}{120} > \frac{-12 + \sqrt{12^2 + 12^2}}{120} = \frac{-12 + 12\sqrt{2}}{120}$$

$$12 \cdot 10 \cdot 2 \cdot 9$$

$$12 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 3$$

$$12 \cdot 12 \cdot 15$$

$$4b^2 - 12b + 8 = 0$$

$$D = 144 - 16$$

$$b_1 = \frac{12-4}{8} = 1$$

$$b_2 = 2$$