МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^9 3^{10} 5^{10}$, bc делится на $2^{14} 3^{13} 5^{13}$, ac делится на $2^{19} 3^{18} 5^{30}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC. Окружность, касающаяся прямой BC в точке B, пересекает высоту CD, проведённую к гипотенузе, в точке F, а катет AC – в точке E. Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 3 : 1$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF.

3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arcsin(\cos x) = x + \dfrac{\pi}{2}$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)\,(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4 (5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} \left(3^{11}\right) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения xy.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-14;42)$, $Q(6;42)$ и $R(20;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K, лежащей на отрезке AM. Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q. Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 90, $SA = BC = 12$.

   а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1.

   б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N, $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 [X] 2 [ ] 3 [ ] 4 [ ] 5 [ ] 6 [ ] 7 [ ]

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 1)

$a, b, c \in \mathbb{N}$

$ab \vdots 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10}$

$bc \vdots 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13}$

$ac \vdots 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30}$

$(ab)(bc)(ac) \vdots 2^{9+14+19} \cdot 3^{10+13+18} \cdot 5^{10+13+30}$

$a^2b^2c^2 \vdots 2^{42} \cdot 3^{41} \cdot 5^{53}$

Т.к. квадрат натурального числа может иметь только чётную максимальную степень любого простого делителя, значит $(abc)^2 \vdots 3^{41} \Rightarrow (abc)^2 \vdots 3^{42}$

$(abc)^2 \vdots 5^{53} \Rightarrow (abc)^2 \vdots 5^{54}$

$a^2b^2c^2 \vdots 2^{42} \cdot 3^{42} \cdot 5^{54}$

$abc \vdots 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{27}$

~~пример~~

Минимальное натуральное abc, которое делится на $2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{27}$, это и есть $2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{27}$, но по условию $a \cdot c \vdots 5^{30} \Rightarrow$ и $abc \vdots 5^{30} \Rightarrow$ минимальное $abc = 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$ (т.к. степени 2^{21} и 3^{21} не могут уменьшиться).

Пример чисел a, b и c:

$a = 2^7 \cdot 3^7 \cdot 5^{15}$

$b = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^0$

$c = 2^{12} \cdot 3^{11} \cdot 5^{15}$

, не трудно убедиться, что

$ab = 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{15} \vdots 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10}$

$bc = 2^{14} \cdot 3^{14} \cdot 5^{15} \vdots 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13}$

$ac = 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30} \vdots 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30}$

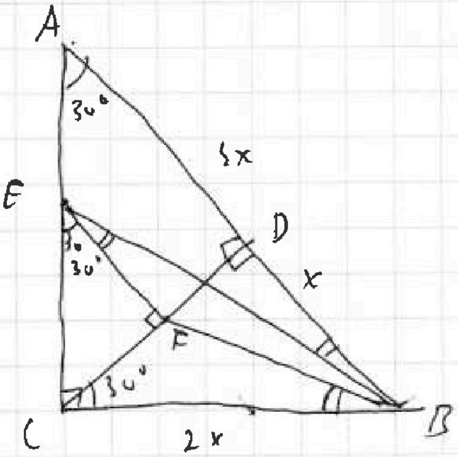
Ответ: минимальное $abc = 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№2)



Дано: $\angle C = 90°$
CD - высота
$EF \parallel AB$
$\frac{AD}{DB} = \frac{3}{1}$
$AD = 3DB$
пусть $DB = x$, тогда
$AD = 3x$

CD - высота из прямого угла, тогда $CD = \sqrt{AD \cdot DB} = \sqrt{3} \cdot x$

в $\triangle CDB$, $\angle D = 90°$, тогда по Т. Пифагора:
$CB = \sqrt{CD^2 + DB^2} = \sqrt{3x^2 + x^2} = 2x$

$DB = x = \frac{1}{2} CB$ => в прямоугольном $\triangle CDB$ $\angle DCB = 30°$ (угол напротив катета, равного ~~половине гипотенузы~~ половине гипотенузы).

$\angle ACD = 90 - \angle DCB = 60°$
$\angle CAD = 90 - \angle ACD = 30°$

т.к. $EF \parallel AB$ и AE - секущая, то $\angle BAE = \angle FEC = 30°$ (соответственные углы).

т.к. CB - касательная, а FB - хорда окружности, то $\angle FBC = \frac{1}{2} \overset{\smile}{FB}$ (угол между касательной и хордой в точке касания равен половине дуги, которую хорда стягивает) но $\angle BEF = \frac{1}{2} \overset{\smile}{FB}$ (вписанный угол), тогда $\angle BEF = \angle FBC$

Т.к. $EF \parallel AB$ и EB - секущая => $\angle ABE = \angle BEF$ (накрестлежащие углы).

$\triangle ABE \sim \triangle BFC$ (т.к. $\angle EAB = \angle DCB = 30°$ и $\angle ABE = \angle FBC$), тогда заметим

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

тогда запишем отношение сторон

$$\frac{AE}{FC} = \frac{AB}{CB} = \frac{4x}{2x} = 2$$

$$\frac{AE}{FC} = 2 \Rightarrow AE = 2FC$$

~~BDEEC~~ т.к. $EF \parallel AB$ и CD – секущая, то
$\angle EFC = \angle ADC = 90°$

в $\triangle EFC$ $\angle FEC = 30°$ и $\angle EFC = 90° \Rightarrow$

$\Rightarrow$ сторона напротив $\angle FEC$ равна половине гипотенузы
$\Rightarrow FC = \frac{1}{2} EC$
$EC = 2FC$

в $\triangle ABC$ применим т. Пифагора:

$$AC^2 + CB^2 = AB^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AC = \sqrt{AB^2 - CB^2} = \sqrt{16x^2 - 4x^2} = 2\sqrt{3}x,$$

но $AC = AE + EC = 2FC + 2FC = 2\sqrt{3}x$
$4FC = 2\sqrt{3}x$
$FC = \frac{\sqrt{3}}{2}x$

$\triangle ABC \sim \triangle EFC$ (т.к. $\angle ACB = \angle EFC = 90°$ и $\angle CAB = \angle CEF = 30°$
причём коэф. подобия $k = \frac{CB}{CF} = \frac{2x}{\frac{\sqrt{3}}{2}x} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$

но $\frac{S_{ABC}}{S_{EFC}} = k^2 = \frac{48}{9} = \frac{16}{3}$

Ответ: $\frac{S_{ABC}}{S_{EFC}} = \frac{16}{3}$

№5)

$$5\arcsin(\cos(x)) = x + \frac{\pi}{2}$$

поделим обе части на 5 и возьмём $\sin$ от обеих частей уравнения

$$\sin(\arcsin(\cos(x))) = \sin\left(\frac{x+\frac{\pi}{2}}{5}\right)$$

$$\cos(x) = \sin\left(\frac{x+\frac{\pi}{2}}{5}\right)$$

$$\cos(x) - \sin\left(\frac{x+\frac{\pi}{2}}{5}\right) = 0$$

$$\cos(x) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{x+\frac{\pi}{2}}{5}\right)\right) = 0$$

$$\cos(x) - \cos\left(\frac{2\pi}{5} - \frac{x}{5}\right) = 0$$

$$-2\sin\left(\frac{x + \frac{2\pi}{5} - \frac{x}{5}}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{x - \frac{2\pi}{5} + \frac{x}{5}}{2}\right) = 0$$

$$\sin\left(\frac{2x}{5} + \frac{\pi}{5}\right) = 0 \quad \text{или} \quad \sin\left(\frac{3x}{5} - \frac{\pi}{5}\right) = 0$$

$$\frac{2x}{5} + \frac{\pi}{5} = \pi k \qquad \frac{3x}{5} - \frac{\pi}{5} = \pi k$$

$$x = -\frac{\pi}{2} + \frac{5}{2}\pi k,\ k\in\mathbb{Z} \qquad x = \frac{\pi}{3} + \frac{5}{3}\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$$

полученные x – корни уравнения

$\cos(x) = \sin\left(\frac{x+\frac{\pi}{2}}{5}\right)$, тогда возьмём $\arcsin$ от обеих частей

$$\arcsin(\cos(x)) = \arcsin\left(\sin\left(\frac{x+\frac{\pi}{2}}{5}\right)\right)$$

угол $\alpha = \frac{x+\frac{\pi}{2}}{5}$; $\alpha \in [0; 2\pi]$

если $\frac{x+\frac{\pi}{2}}{5}$ принадлежит I или IV четверти тригонометрической окружности, $\arcsin(\sin\alpha) = \alpha$, и полученные углы α будут удовлетворять исходной системе

если α принадлежит ~~или~~ II или III четверти, то $\arcsin(\sin\alpha) = \pi - \alpha$, и если $\pi - \alpha \neq \alpha$, то такие углы окажутся посторонними ($\pi - \alpha = \alpha$ рассмотрим отдельно)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

т.к. arcsin - возвращает угл от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$,

то $\frac{\pi}{2} \geq \frac{x+\frac{\pi}{2}}{5} \geq -\frac{\pi}{2}$, заметим, что все такие углы в 1 или 4 четверти, тогда они будут удовлетворять исходной системе

произведем отбор корней.

при $x = -\frac{\pi}{2} + \frac{5}{2}\pi k$

$-\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2} k \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow k = -1; 0; 1$

~~$x = -\frac{\pi}{2}; 0; \frac{\pi}{2}$~~

$x = 2\pi; -\frac{\pi}{2}; -3\pi$

при $x = \frac{\pi}{3} + \frac{5}{3}\pi k$:

$-\frac{\pi}{2} \leq \frac{\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} + \frac{5}{3}\pi k}{5} \leq \frac{\pi}{2}$

$-\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} k \leq \frac{\pi}{2} \quad | -\frac{\pi}{6}; :\pi$

$-\frac{1}{2} - \frac{1}{6} \leq \frac{k}{3} \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{6}$

$-\frac{4}{6} \leq \frac{k}{3} \leq \frac{2}{6} \quad | \cdot 3$

$-2 \leq k \leq 1 \quad ; k = -2; -1; 0; 1$

$x = -3\pi; -\frac{4}{3}\pi; \frac{\pi}{3}; 2\pi$

если $\frac{x+\frac{\pi}{2}}{5} = \pi - \frac{x+\frac{\pi}{2}}{5}$, то

$x + \frac{\pi}{2} = \frac{5}{2}\pi$

$x = 2\pi$, что уже есть в ответах

общий ответ: $x = -3\pi; -\frac{4}{3}\pi; -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{3}; 2\pi$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№4)
$$\begin{cases} ax+2y-3b=0 \\ (x^2+y^2-9)(x^2+y^2-12x+32)=0 \end{cases}$$

все значения a, для которых найдётся b, такие, что ровно 4 решения.

решение: уравнение $(x^2+y^2-9)(x^2+y^2-12x+32)=0$

Эквивалентно решению совокупности

$$\left[\begin{array}{l} x^2+y^2-9=0 \\ x^2+y^2-12x+32=0 \end{array}\right.$$

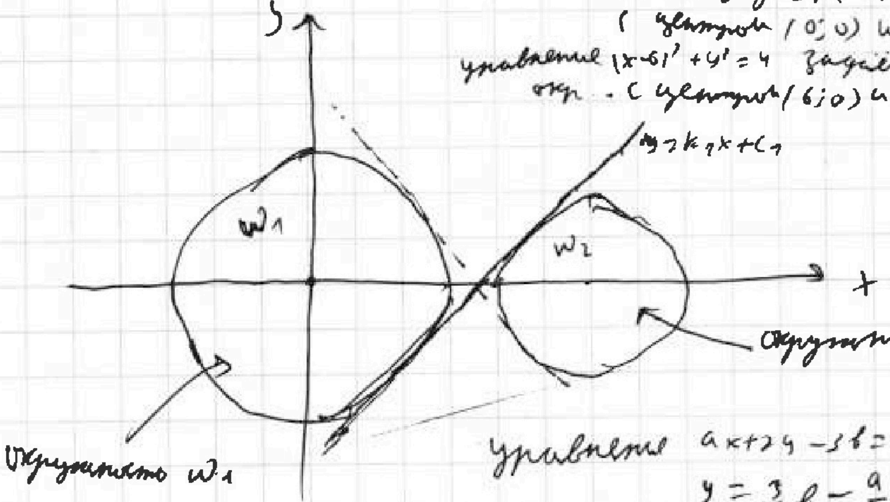
перепишем исходную систему с учётом этого

$$\begin{cases} ax+2y-3b=0 \\ \left[\begin{array}{l} x^2+y^2=9 \\ x^2-12x+36+y^2=4 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ax+2y-3b \\ \left[\begin{array}{l} x^2+y^2=9 \\ (x-6)^2+y^2=4 \end{array}\right. \end{cases}$$

решим систему графически, в осях xOy.

уравнение $x^2+y^2=9$ задаёт окружность (центром $(0;0)$ и радиусом 3)

уравнение $(x-6)^2+y^2=4$ задаёт окр. с центром $(6;0)$ и радиусом 2



уравнение $ax+2y-3b=0$

$y=\frac{3}{2}b-\frac{a}{2}x$

задаёт прямую, с угловым коэф. $-\frac{a}{2}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

[ ] [ ] [ ] [x] [ ] [ ] [ ]

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

по условию b — произвольное, значит прямая

$y = \frac{3}{2}b - \frac{a}{2}x$ может произвольно двигаться ~~как~~ в вертикальном направлении.

Заметим, что график симметричен относительно Ox, тогда будем рассматривать только $a<0$, в силу симметрии ~~ответов для каждого a будет и $-a$~~ , если найдётся ~~так~~ нужный b для a, то он найдётся и для $-a$.

при $a<0$, прямая $y = \frac{3}{2}b - \frac{a}{2}x$ возрастает.

Замена $k = \frac{-a}{2}$, $k>0$

Замена $c = \frac{3}{2}b$,

$y = kx + c$

~~Рассмотрим такое c, что $y = kx+c$ касается~~

~~окружности ω_1 (см. рисунок), тогда, если эта не прямая пересекает вторую окружность, то при изменении c на очень малое значение ε; $\varepsilon \to 0$; $\varepsilon > 0$ получившаяся прямая будет пересекать сразу обе окружности и будет ровно 4 решения~~

~~если ~~при изменении~~ прямая $y = kx+c$, касающаяся ω_1 касается ω_2, то при изменении c, она перестанет ~~иметь~~ общие точки с одной из окружностей, тогда решений не более 2 ~~если~~~~

рассмотрим прямую $y = k_1x + c_1$ — общую касательную двух окружностей (см. рисунок); при $k > k_1$ будем уменьшать c от $+\infty$ до $-\infty$, очевидно прямая коснётся ω_1 второй раз раньше, чем ω_2 первый, но тогда у системы не более 2-х решений; || при $k = k_1$, при уменьшении c от $+\infty$ до $-\infty$, до 1-го касания 0 решений, в точке касания - 1 решение, до второго касания 2 решения, в точке второго касания тоже 2 решения, а далее уже не может быть больше двух т.к. прямая больше не коснётся ω_1 =>
=> не подходит

при $k=0 \Rightarrow a=0$; тогда при $a=0$ и $b=0$ из первого уравнения $y=0$, что даёт и нечёт. ✓

при $0<k<k_1$ ~~…~~ например в точке c_1 будет 4 решения, т.к. прямая будет уже не касаться, а пересекать обе окружности $\Rightarrow k<k_1$ подходит

найдём k_1 и c_1

если прямая $y=kx+c$ касается окружности $x^2+y^2=9$, то у уравнения

$$x^2+(kx+c)^2=9 \quad \text{дискриминант} = 0$$

$$x^2(k^2+1)+x\cdot 2ck+c^2-9=0$$

$$D=\cancel{4c^2k^2}-\cancel{4c^2k^2}-c^2\cdot 4+36k^2+36=0$$

~~$c^2=3$~~ $\Downarrow$

$$c^2\cdot 4=36k^2+36$$

$$c^2=9k^2+9$$

$$c=\pm 3\sqrt{k^2+1}$$

Очевидно второе касание произойдёт при меньшем c, поэтому $c_1=-3\sqrt{k^2+1}$

если прямая $y=kx+c$ касается окр. $(x-6)^2+y^2=4$, то у уравнения

$$(x-6)^2+(kx+c)^2=4 \quad \text{дискриминант равен 0.}$$

$$x^2-\cancel{36x}\,12x+36+k^2x^2+2xkc+c^2-4=0$$

$$x^2(k^2+1)+x(2kc-12)+c^2-4=0$$

$$D=\cancel{4k^2c^2}-48kc+144-\cancel{4k^2c^2}+16k^2-4c^2+16=0$$

$$16k^2+160=48kc+4c^2 \quad |:4$$

$c^2+12kc=4k^2+40$, чтобы получить общую касательную, подставим $c=-3\sqrt{k^2+1}$

$$9k^2+9-36k\sqrt{k^2+1}=4k^2+40$$

$5k^2-31=36k\sqrt{k^2+1}$ | возведём обе части в квадрат |

$$25k^4-310k^2+961=1296k^4+1296k^2$$

~~1296~~ $1271k^4+1606k^2-961=0$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

[ ] [ ] [ ] [x] [ ] [ ] [ ]

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$k^2 = \frac{-1606 + \sqrt{1606^2 + 4 \cdot 1241 \cdot 901}}{2 \cdot 1241}$$

отрицательный ~~дек~~ дискриминант не берём, т.к. $k^2 > 0$

т.к. $k > 0$ =>

$$k_1 = \sqrt{\frac{-1606 + \sqrt{1606^2 + 4 \cdot 1241 \cdot 901}}{2 \cdot 1241}}$$

Ага при $k < k_1$ система имеет 4 решения.

~~симметрично~~ $-\frac{a}{2} < k_1 \Rightarrow a > -2k_1$

~~a~~

Аналогично при $k < 0$ при $k > k_1$ система будет иметь 4 решения, итого

$-2k_1 < a < 2k_1 \Rightarrow$ включая $a = 0$

Ответ: ~~...~~

$$-2\sqrt{\frac{-1606 + \sqrt{1606^2 + 4 \cdot 1241 \cdot 901}}{2 \cdot 1241}} < a < 2\sqrt{\frac{-1606 + \sqrt{1606^2 + 4 \cdot 1241 \cdot 901}}{2 \cdot 1241}}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№ 31

$$5\arcsin(\cos(x)) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$\arcsin(\cos(x)) = \frac{x}{5} + \frac{\pi}{10}$$

если ~~arcsin(a) = b~~

некоторые $a = b$, но и

$\sin(a) = \sin(b)$ $\le \frac{x}{5} + \frac{\pi}{10} \le 2\pi k$

$$\sin(\arcsin(\cos(x))) = \sin(\frac{x}{5} + \frac{\pi}{10})$$

$$\cos(x) = \sin(\frac{x + \frac{\pi}{2}}{5})$$

$$\cos(x) - \sin(\frac{x}{5} + \frac{\pi}{10}) = 0$$

$$\cos(x) - \cos(\frac{4\pi}{10} - \frac{x}{5}) = 0$$

$\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$

$$\sin(\frac{a+\beta}{2})(\sin(\frac{a-\beta}{2}) =$$

$$= (\sin\frac{a}{2}\cos\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{a}{2})(\sin\frac{a}{2}\cos\frac{\beta}{2} - \cos\frac{a}{2}\sin\frac{\beta}{2})$$

$$\sin^2\frac{a}{2}\cos^2\frac{\beta}{2} - \sin^2\frac{\beta}{2}\cos^2\frac{a}{2}$$

$$\sin^2\frac{a}{2}\cos^2\frac{\beta}{2} - \cos^2\frac{a}{2} + \cos^2\frac{\beta}{2}\cos^2\frac{a}{2}$$

$$\cos^2\frac{\beta}{2} - \cos^2\frac{a}{2} = \frac{\cos 2a + 1}{2} - \frac{\cos 2\beta + 1}{2}$$

$$-2\sin(\frac{6x}{10} + \frac{\pi}{20}) \cdot \sin(\frac{4x}{10} - \frac{\pi}{20}) = 0$$

$\frac{6x}{10} + \frac{\pi}{20} = \pi k$

$x = -\frac{\pi}{12} + \frac{10}{6}\pi k$

$x = \frac{\pi}{8} + \frac{10}{4}\pi k$

$\frac{x}{5} + \frac{\pi}{20} = \pi - \frac{x}{5} + \frac{\pi}{5}$ $x = 2\pi$

$2x + \pi = 4\pi$

$2x = 3\pi$

$\frac{x}{5} + \frac{\pi}{10} = -\frac{x}{5} - \frac{\pi}{10}$ $\beta = a - \frac{\pi}{2}$

$\frac{2x}{5} = -\frac{\pi}{5}$ $\frac{\pi}{2} + \frac{a}{2} = 2\pi/2$

$x = -\frac{\pi}{2}$

$\frac{\pi}{2} - a$

$\frac{\pi}{2} + \pi = a$

$\frac{\pi}{2} - \pi$

$a = \pi + \pi$ $\pi - a$

$\beta = \pi - a$ $a - \pi$

$\pi - a$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

~~отберём из наших x, те которые лежат в I и IV четвертях~~

~~для $x = -\frac{\pi}{2} + \frac{5}{2}\pi k$, очевидно каждые 4 значения k четверти углов x будут повторяться, тогда рассмотрим только первые 4 k.~~
~~$k = 0 \quad x = -\frac{\pi}{2}$~~
~~$k = 1$~~
~~$k = 2$~~
~~$k = 3$~~

arcsin x - возвращает угол от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$, тогда

~~5 arcsin ( ) возвращает угол от $-\frac{5\pi}{2}$ до $\frac{5\pi}{2}$, тогда~~

~~5 arcsin ( ) $-\frac{\pi}{2}$ возвращает угол от~~

тогда произведём отбор корней x_x таких, что

~~$-\frac{\pi}{2} \leq \frac{x + \frac{\pi}{2}}{5} \leq \frac{\pi}{2}$ и $\frac{x + \frac{\pi}{2}}{5}$ — в I или IV четверти~~
~~(углы от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$ всегда в I или IV четверти, так что это условие будет выполняться)~~

~~при $x = -\frac{\pi}{2} + \frac{5}{2}\pi k$:~~

~~$-\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2} k \leq \frac{\pi}{2}$~~ $\quad k = -1, 0; 1.$

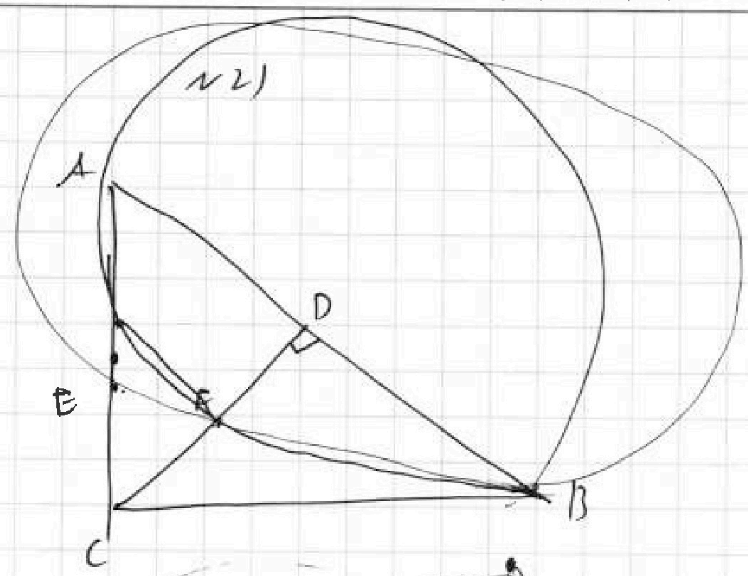
$\cos(\pi + \frac{\pi}{3}) = -\cos(\frac{\pi}{3}) = -\frac{1}{2}$

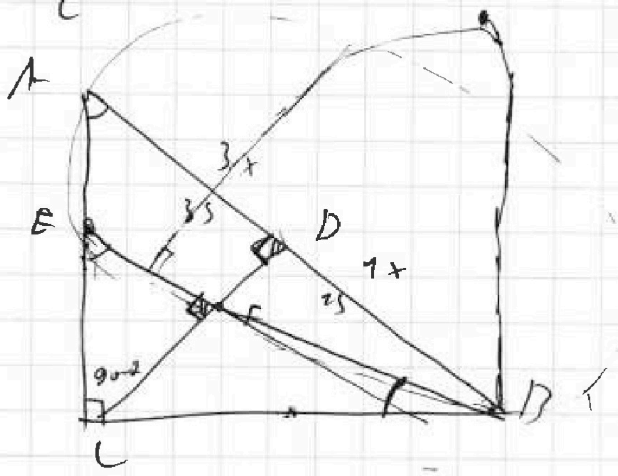
$\arcsin(-\frac{1}{2}) = -\frac{\pi}{6}$

$-\frac{4}{3}\pi + \frac{\pi}{2} = -\frac{8}{6}\pi + \frac{3}{6}\pi =$

МФТИ

№21

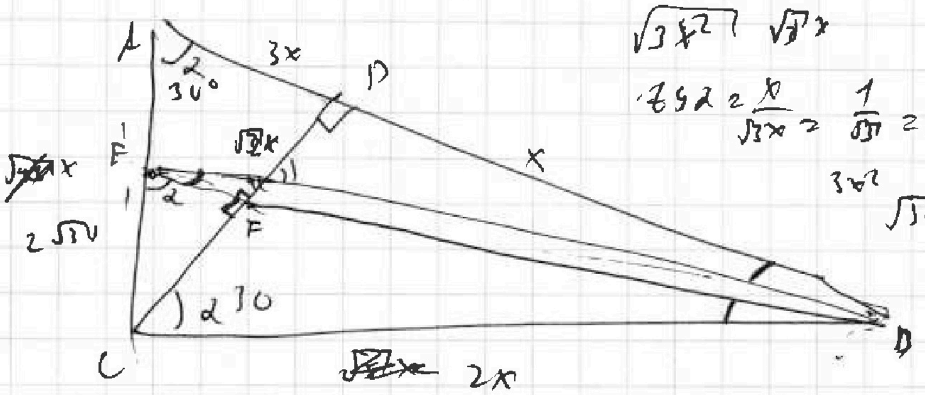




$AD : DB = \frac{3}{7}$

$\frac{S_{ABC}}{S_{CEF}}$

$S_{ABC} = 4S$



$\sqrt{3x^2}$ $\sqrt{3}x$

$tg\,\alpha = \frac{x}{\sqrt{3}x} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \alpha = 30^\circ$

$3x^2$

$\sqrt{7}x$

$2\sqrt{7}x$

$60-2\beta$

$\frac{ED}{FB} = 2 \Rightarrow EB = 2FB$

$CE = \frac{1}{2}FC$

$\frac{AE}{CF} = 2$ $AE = 2CF$

$AC = 2\sqrt{3}x = AE + EC$

$2\sqrt{3}x = \frac{3}{2}EF$

$CF = \frac{\sqrt{3}}{3}x$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

6) 36
216
36+60+1200
1296
1296 −

$6^4k^2 > \cancel{41^2k^2+9^2}$

$-35k^2 - 2\cdot 41\cdot 9k^4 - 81 > 0$

$6^4k^2 - 41k^2 - 2\cdot 41\cdot 9\cdot k^2 - 81 > 0$

$x^2 + k^2x^2 + 2kxc + c^2 = 9$

$\log_3^4 x + 6\log_x 3 = 8$

$x^2(k^2+1) + x\cdot 2kc + c^2 - 9 = 0$ 328

$6^4k^2 + 6^4k - 41^2k^2 - 18\cdot 41k - 81 > 0$

$y = kx + c$

$D = 4k^2c^2 - \ldots$

$4k^2c^2 + 36k^2 - 4c^2 + 36 = 0$

$-328k^2$

$x^2 + (kx+c)^2 = 9$

$\log_3^4 x + 6\log_x 3 = \frac{1}{2}\cdot 4\cdot\log_x 3 - 8$

$36k^2 + 36 = 4c^2$

$t^4 + 4t + 8 = 0$

$ax + 2y = 3b$

$8^2\cdot(k^2+1) = 4c^2$

$9(k^2+1) = c^2$

$6^4k^4 + 6^4k^2 > 41^2k^4$

$\frac{4}{t}$

$x^2 + y^2 = 9$

$k_1 > k$

$t^4 + \frac{4}{t} + 8 = 0$

$4 > 36k\sqrt{k^2+1} + 41k^2 + 9$

$x^2 - 12 + 36 + y^2 = 4$

$k_1 > k$

$(x-6)^2 + y^2 = 4$

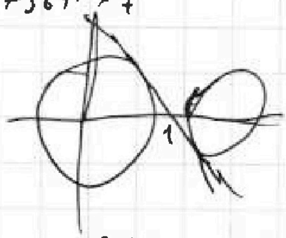
$36k\cdot\sqrt{k^2+1} > 41k^2 + 5$

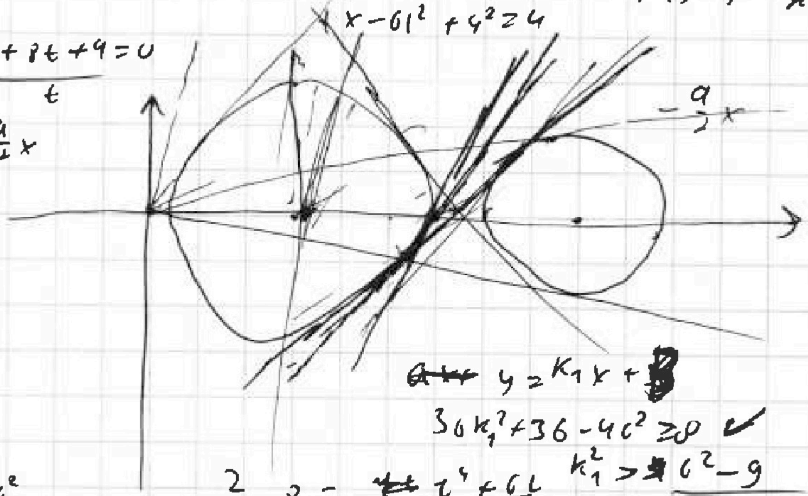
$\frac{t^5 + 8t + 4 = 0}{t}$

$y = \frac{3}{2}b - \frac{a}{2}x$

$-\frac{a}{2}x$

$x^2 - 12x + 36 + k^2x^2 +$





$y = k_1x + b$

$36k_1^2 + 36 - 4c^2 \geq 0$

$x^2 - 12x + 36 + k^2x^2 + 2kxc + c^2 = 4$

$\frac{2}{t} - 8 = t^4 + \frac{6}{t}$

$k_1^2 > \frac{c^2 - 9}{9}$

$x^2(1+k^2) + x(2kc - 12) + 32 + c^2 = 0$

$t^5 + 8t + 4 = 0$

$t^4 + \frac{4}{t} + 8 = 0$

$D = 4k^2c^2 - 48kc + 144 - 128 - 128k^2 - 4c^2k^2 - 4c^2$

$k_1 > \frac{c^2}{9} - 1$

$t^4 + \frac{6}{t} = \frac{2}{t} - 8$

$k_1 = \frac{c^2}{9} - 1$

$c^2 = 9k^2 + 9$

$16 > 48kc + 128k^2 + 4c^2$

$c = 3\sqrt{k^2+1}$

$4 > 12kc + 32k^2 + c^2$

$t^4 + \frac{4}{t} + 8 = 0$

$k^4 + \frac{4}{k} - \frac{11}{k} + 8 = 0$

$t^5 + 8t + 4 = 0$

$32k^2 + 12kc + c^2 - 4 = 0$

$k^4 - \frac{7}{2k} + 8 = 0$

$D = 144c^2 - 128c^2 + 512$

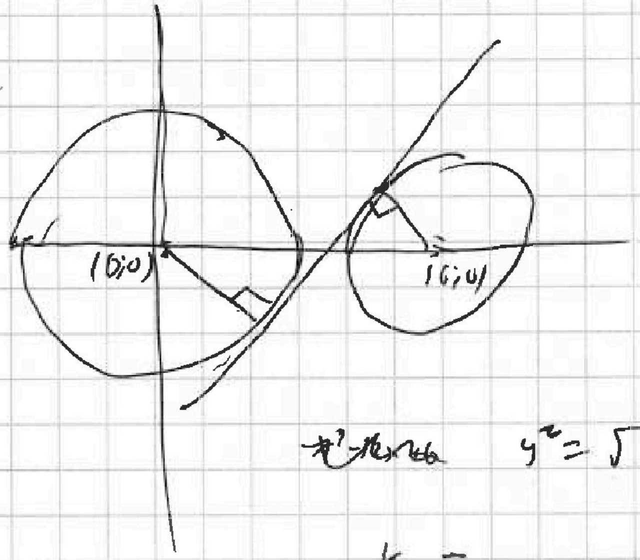
$2k^5 + 16k - 7 = 0$

$16c^2 + 512 = 16(c^2 + 32)$

$k^4 + \frac{2}{k} = \frac{11}{2k} - 8$

$k = \frac{-12c \pm 4\sqrt{c^2+32}}{64}$

$y = kx + 3\sqrt{k+1}$



$y^2 = \sqrt{4-(x-6)^2}$

$k =$