



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-12;24)$, $Q(3;24)$ и $R(15;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} ab:2^{14} \\ bc:2^{17} \\ ac:2^{20} \end{cases} \Rightarrow ab \cdot bc \cdot ac:2^{14+17+20} \Rightarrow a^2 b^2 c^2:2^{51} \Rightarrow abc:2^{26}$$

$$ac:7^{37} \Rightarrow abc:7^{37}$$

Значит abc не меньше $2^{26} \cdot 7^{37}$. $abc = 2^{26} \cdot 7^{37}$ к примеру

если $b = 2^6 = 64$, $a = 2^9 \cdot 7^{10}$, $c = 2^{11} \cdot 7^{27}$. Легко заметить,
что в этом случае все условия по делимости выполняются.

$$\text{Ответ: } abc = 2^{26} \cdot 7^{37}.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

| | | | | | | |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2-8ab} \quad m \text{ должно являться делителем } a+b$$

~~$\frac{a}{b}$ несократима $\Rightarrow a$ и b взаимно просты~~

Докажем, что $m \leq 8$. Погдем от противного. Пусть $m > 8$.

$$(a+b) \div m \Rightarrow (a+b)^2 \div m \Rightarrow 8ab \div m \quad (m \cdot k \cdot ((a+b)^2 - 8ab) \div m)$$

Значит m ~~не~~ не взаимно просто с a и/или b . Без ограничения общности скажем, что m не взаимно просто с a .

Обозначим их НОД за x ($x > 1$). $a+b \div x$ (м.к. $a+b \div m$)
 $a \div x$ $\Rightarrow b \div x$.

То тогда a и b имеют общий делитель больше 1 и $\frac{a}{b}$ не может быть несократимой дробью. Противоречие. Значит $m \leq 8$.

$m=8$ при $a=3, b=5$. Действительно, $\frac{a}{b}$ несократима и:

$$\frac{3+5}{3^2-6 \cdot 3 \cdot 5+5^2} = \frac{8}{9-90+25} = -\frac{8}{56} = -\frac{1 \cdot 8}{7 \cdot 8} = -\frac{1}{7}$$

Ответ: $m=8$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

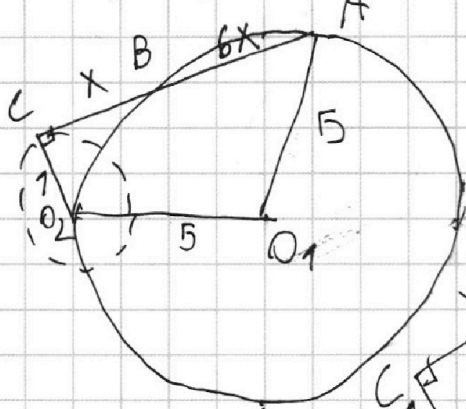
| | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

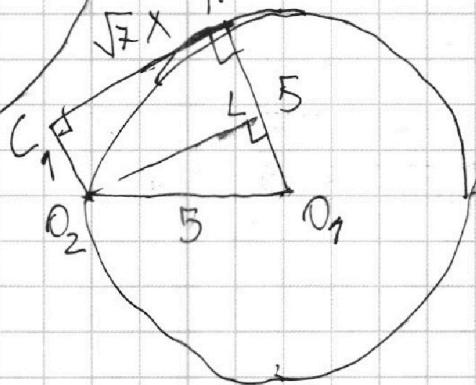
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{AC}{BC} = 7 \Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{AC - BC}{BC} = \frac{AC}{BC} - 1 = 6$$



Опустили из точки C
касательную. Она будет
равна ~~какой-то длине~~ $(6+1)x \cdot x = \sqrt{7}x$.



$O_2L \perp CL$

1) $ML = CO_2 = 1$ (м.к. $CMLO_2$ - прямоугол.)

2) $LO_1 = MO_1 = ML = 4$

3) $O_2L = \sqrt{O_1O_2^2 - LO_1^2} = 3$

4) $CM = O_2L = 3 = \sqrt{7}x \Rightarrow x = \frac{3}{\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{7}}{7}$

5) $AB = 6x = \frac{6 \cdot 3\sqrt{7}}{7} = \frac{18\sqrt{7}}{7}$

Ответ: $AB = \frac{18\sqrt{7}}{7}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{2x^2+2x+1} = 2-7x \quad | \cdot \sqrt{2x^2-5x+3} + \sqrt{2x^2+2x+1}$$

$$2x^2-5x+3 - (2x^2+2x+1) = (2-7x) \left(\sqrt{2x^2-5x+3} + \sqrt{2x^2+2x+1} \right)$$

$$2-7x = (2-7x) \left(\sqrt{2x^2-5x+3} + \sqrt{2x^2+2x+1} \right)$$

$$(2-7x) \left(\sqrt{2x^2-5x+3} + \sqrt{2x^2+2x+1} - 1 \right) = 0$$

$$2-7x = 0$$

$$\sqrt{2x^2-5x+3} + \sqrt{2x^2+2x+1} = 1$$

$$\sqrt{2x^2-5x+3} + \sqrt{2x^2+2x+1} = 1 \quad | \wedge 2$$

$$4x^2-3x+4 + 2\sqrt{(2x^2-5x+3)(2x^2+2x+1)} = 1$$

$$(4x^2-3x+3) + 2\sqrt{(2x^2-5x+3)(2x^2+2x+1)} = 0$$

Заметим, что первая скобка строго
положительна ($a > 0$, $D < 0$); вторая

неотрицательна (квадратный корень) и в сумме давать ноль не могут
(их сумма положительна).

$$2-7x=0$$

$$x = \frac{2}{7}$$

Корень удовлетворяет ОДЗ.

$$\text{Ответ: } x = \frac{2}{7}$$

ОДЗ:

$$\sqrt{2x^2-5x+3} \neq 0$$

$$\begin{cases} 2x^2+2x+1 \geq 0 \\ 2x^2-5x+3 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ x \leq 1 \\ x \geq 1,5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ x \geq 1,5 \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \\ y = ax + 10b \end{cases}$$

$$((x+8)^2 + (ax+10b)^2 - 1)(x^2 + (ax+10b)^2 - 4) \leq 0$$

$$(x^2 + 16x + 64 + a^2x^2 + 20axb + 100b^2 - 1)(x^2 + 20axb + a^2x^2 + 100b^2 - 4) \leq 0$$

$$((a^2+1)x^2 + (20ab+16)x + (100b^2+63))((a^2+1)x^2 + 20abx + (100b^2-4)) \leq 0$$

При заданных a и b каждому значению x соответствует ровно одно значение y . \Rightarrow нам необходимо, чтобы неравенство выше имело ровно 2 решения. Это возможно в 2 случаях:

1) корни обоих многочленов в скобках равны. Но это невозможно т.к. по Т. Виета произведение их корней разное.

2) Дискриминанты обоих ~~этих~~ трёхчленов равны ~~и~~ их корни не равны (последнее верно в силу Т. Виета) $\neq 0$

$$D_1 = 100a^2b^2 + 160ab + 64 - 100a^2b^2 - 63a^2 - 100b^2 - 63 = 160ab - 63a^2 - 100b^2 + 1$$

$$D_2 = 100a^2b^2 - 100a^2b^2 + 9a^2 - 100b^2 + 4 = 9a^2 - 100b^2 + 4$$

$$\begin{cases} 160ab - 63a^2 - 100b^2 + 1 = 0 \\ 9a^2 - 100b^2 + 4 = 0 \end{cases}$$

$$690ab - 252a^2 - 400b^2 + 4 = 0$$

$$640ab - 256a^2 - 300b^2 = 0$$

$$69a^2 - 160ab + 75b^2 = 0 \quad | :b^2$$

$$69\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 160\frac{a}{b} + 75 = 0$$

$$D_1 = 6400 - 75 \cdot 69 = 25 \cdot 64$$

$$\frac{a}{b} = \frac{80 \pm \sqrt{25 \cdot 64}}{69} \Rightarrow \begin{cases} 69a = 120b \\ 69a = 40b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8a = 15b \\ 8a = 5b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 64a^2 = 225b^2 \\ 64a^2 = 25b^2 \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~~$40a^2 - 90a^2 + 1 = 0$~~ $a^2 - 25b^2 + 1 = 0$
 ~~$90a^2 - 64a^2 + 1 = 0$~~
 ~~$90a^2 - 64a^2 + 1 = 0$~~

$$\begin{cases} a^2 - 64a^2 + 1 = 0 \\ 90a^2 - 64a^2 + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = \frac{1}{63} \\ a^2 = \frac{1}{55} \end{cases} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{cases} a = \sqrt{\frac{1}{63}} \\ a = -\sqrt{\frac{1}{63}} \\ a = \sqrt{\frac{1}{55}} \\ a = -\sqrt{\frac{1}{55}} \end{cases}$$

ответ: $\sqrt{\frac{1}{63}}; -\sqrt{\frac{1}{63}}; \sqrt{\frac{1}{55}}; -\sqrt{\frac{1}{55}}$

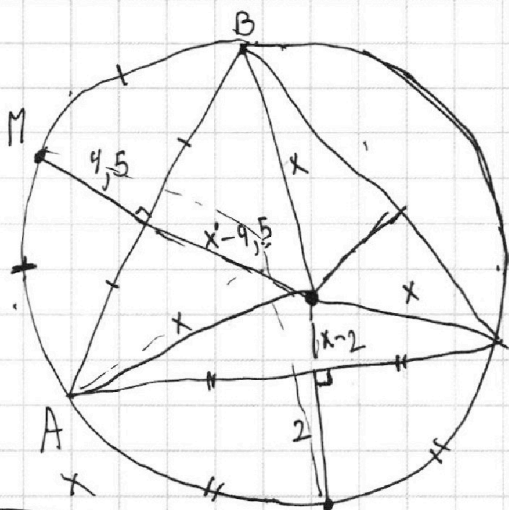
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

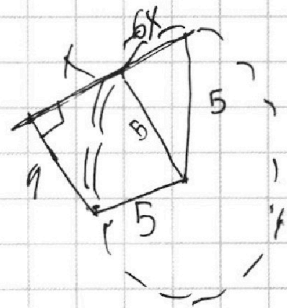
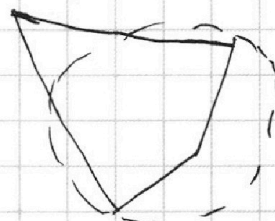
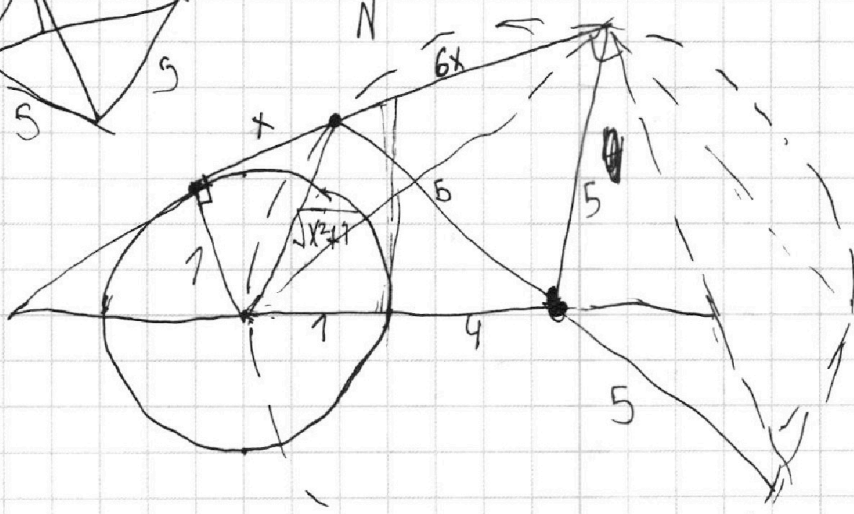
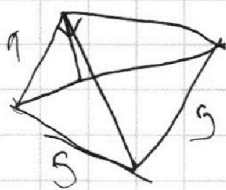
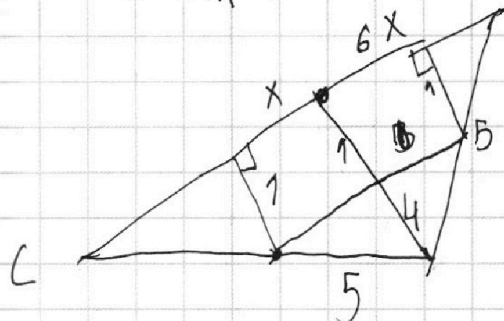
- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



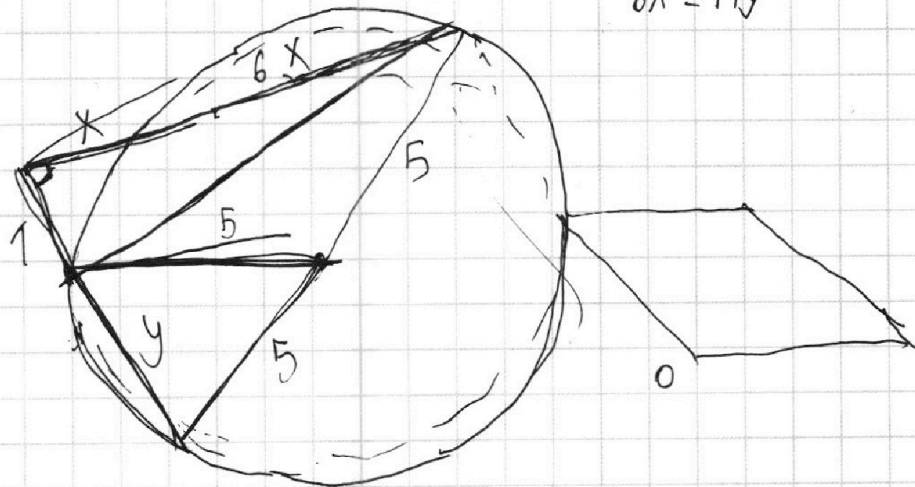
$$x^2 - x^2 + 4x - 4 = \sqrt{4x - 4}$$



$$y_2 = 12 + y_1 + 2x_1 - 2x_2$$

$$6x^2 = 1 + y$$

~~Handwritten scribble~~



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1) $ab: 2^{14}$ $m=14$
 $bc: 2^{17}$
 $ac: 2^{20}$

$b = 3$ $c = 6$

$b = b+3$ $b+6$

$b = 6$ $c = 2^{11}$
 $a = 9$

$2p = 6$ $2a = 9$ $2c = 11$

$2(ab+bc+ac) = 57$

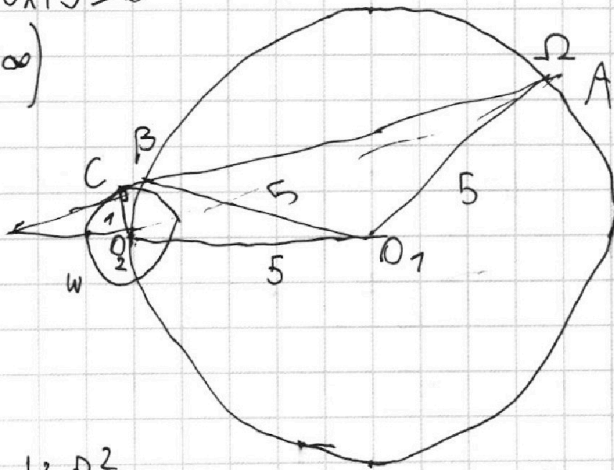
$ab+bc+ac = 26$

$\beta_a = 10$ $\beta_c = 27$

~~...~~

$3: 2x^2 - 5x + 3 \geq 0$

$(-\infty; 1] \cup [\frac{3}{2}; +\infty)$



$\frac{AC}{CB} = 7$

$R_w = 1$

$R_{\Omega} = 5$

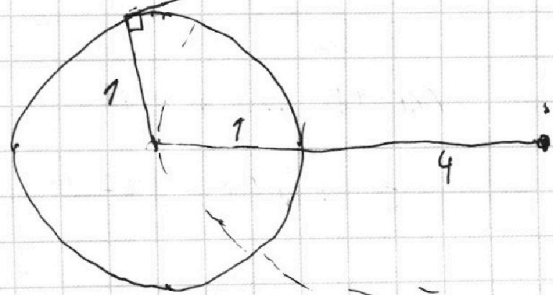
$AB = ?$

$\frac{AB}{BC} = 6$

$AC \cdot BC = d^2 - R^2$

$7BC^2 = d^2 - R^2$

$AC^2 = (AO_2 - 1)(AO_2 + 1) = AO_2^2 - 1 = 9$



2) ~~...~~ a, b - взаимно простые
 $a+b = 253$
 $a^2 - 6ab + b^2 = (a+b)^2 - 6ab$
 Диаметр $a+b$ не делит a, b $m=8$

$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x$

$2x^2 - 5x + 3 - 2x^2 - 2x - 1 =$

$(2-7x)(\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1}) - 7x + 2 = (2-7x)$

$4x^2 - 3x + 4 + 2\sqrt{\dots} = 9$

$\frac{4}{99} - \frac{10}{9} + 3 = -\frac{66}{99} + 3$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\left((x+8)^2 + (ax+10b)^2 - 1 \right) (a^2 + 1) (ax+10b)^2 = 4 \leq 0$$

$$(x^2 + 16x + 64 + a^2x^2 + 20abx + 100b^2 - 1) (x^2 + a^2x^2 + 20abx + 100b^2 - 4) \leq 0$$

$$(a^2+1)x^2 + 4(5ab+4)x + (100b^2+63)$$

$$D_1 = 25a^2b^2 + 90ab + 16 - 100a^2b^2 + 160ab + 64 - 100a^2b^2 - 63a^2 - 100b^2 - 63$$

$$= 160ab - 63a^2 - 100b^2 + 1$$

$$(a^2+1)x^2 + 20abx + (100b^2 - 4)$$

$$D_1 = 100a^2b^2 - 100a^2b^2 + 4a^2 - 100b^2 + 4$$

$$D_1 = 4a^2 - 100b^2 + 4 \quad 90a < 75b$$

$$160ab - 63a^2 - 100b^2 + 1 = 0$$

$$4a^2 - 100b^2 + 4 = 0$$

$$a^2 + 1 = 25b^2$$

$$160a \sqrt{\frac{a^2+1}{25}} - 63a^2 - 9a^2 - 9 + 1 = 0$$

$$32a \sqrt{a^2+1} - 67a^2 - 3 = 0$$

$$32a \sqrt{a^2+1} = 67a^2 + 3$$

$$32^2 a^2 + 32^2 a^2 = 67^2 a^4 + 6 \cdot 67 a^2 + 9$$

$$640ab - 64 \cdot 9a^2$$

$$D_1 = 6400 - 75 \cdot 64 = 25 \cdot 64 \Rightarrow \sqrt{D_1} = 90$$

$$\frac{80 \pm 90}{64}$$