



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^6 3^{13} 5^{11}$, bc делится на $2^{14} 3^{21} 5^{13}$, ac делится на $2^{16} 3^{25} 5^{28}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой AC в точке A , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке E , а катет BC – в точке F . Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1,4$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$.
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5, \quad \text{и} \quad \log_{11}^4(0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,125y^3} (11^{-13}) - 5.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-15; 90)$, $Q(2; 90)$ и $R(17; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 180, $SA = BC = 20$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 6$, а радиус сферы Ω равен 8.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{№1. } ab = 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{11}, bc = 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{23}, ac = 2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{28}.$$

из данных выражений все 3 числа, две наименьших стороны равны двум равным произведению простых чисел в степени и условию.

$$a \cdot b \cdot c = 2^{36} \cdot 3^{59} \cdot 5^{52} \rightarrow abc = 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{26}$$

$$2^{18} \Rightarrow a \text{ содержит } 2^4, b - 2^2, c - 2^{12} \Rightarrow ab - 2^6, bc - 2^{14}, ac - 2^{16}$$

$$3^{30} \Rightarrow a - 3^5, b - 3^5, c - 3^{10} \Rightarrow ab - 3^{10}, bc - 3^{22}, ac - 3^{25}$$

$5^{24} \Rightarrow 5^{11} \cdot 5^{13} = 2^{24} < 5^{24}$, нам в левом случае всегда больше справа чем минимум в условии

$$b = 3^6, a = 5^{11}, c = 5^{14} \Rightarrow ab = 5^{11} : 5^{11}, bc = 5^{14} : 5^{13}, ac = 5^{24} : 5^{24} \Rightarrow$$

$$a = 2^4 \cdot 3^8 \cdot 5^{14}, b = 2^2 \cdot 3^5 \cdot 5^6, c = 2^{12} \cdot 3^{17} \cdot 5^{23} \Rightarrow abc = 2^{28} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28} \text{ - не подходит}$$

$$\text{Ответ: } 2^{24} \cdot 3^{30} \cdot 5^{26}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

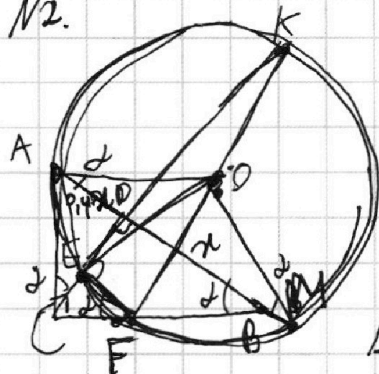
- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



N2.



М.к. $\frac{AB}{BP} = 1,4$ $AB = 1,4 BP$, пусть $BP = x$, тогда $AB = 1,4x \Rightarrow AD = 0,4x$

$AB \parallel EF \Rightarrow \angle FEB = \angle EPF = 90^\circ$, м.к. $\angle PEF = 90^\circ \Rightarrow FK$ - диаметр

М.к. AC - хорда $\Rightarrow \angle DAC = 90^\circ \Rightarrow \angle CBA = \angle CAD$, м.к.

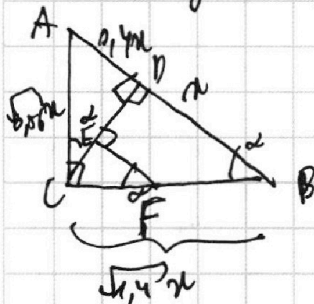
BC и AE - параллельны

М.к. CP - высота $\Rightarrow CP = \sqrt{AD \cdot DP} = \sqrt{0,4x \cdot x} = \sqrt{0,4}x$

$\triangle ACP \sim \triangle CEF$, м.к. $\angle CPA = \angle FEC = 90^\circ$, $\angle EFC = \angle ACP = \alpha \Rightarrow$

\Rightarrow эти треугольники относятся как квадраты коэф. подобия.

М.к. AC - хорда, CK - диаметр $\Rightarrow AC^2 = CE \cdot CK$



$$AC = \sqrt{AD^2 + CD^2} = \sqrt{(0,4x)^2 + (\sqrt{0,4}x)^2} = \sqrt{0,16x^2 + 0,4x^2} = \sqrt{0,56}x$$

$$CB = \sqrt{CP^2 + DP^2} = \sqrt{(\sqrt{0,4}x)^2 + x^2} = \sqrt{1,4x^2} = \sqrt{1,4}x$$

$$EK = \sqrt{FK^2 - EF^2} = \sqrt{FK^2 - CP^2}$$

Пусть коэф. подобия $\triangle ACP$ и $\triangle CEF$ равен k , тогда $CF = AC \cdot k = \sqrt{0,56}x \cdot k$
 $CE = AD \cdot k = 0,4x \cdot k$; $EF = CP \cdot k = \sqrt{0,4}x \cdot k$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№3. $\arccos(\sin x) = 95 - 2x$ $0 \leq \arccos(x) \leq \pi \Rightarrow 0 \leq \frac{95-2x}{10} \leq \pi$

$\arccos(\sin x) = \frac{95-2x}{10}$

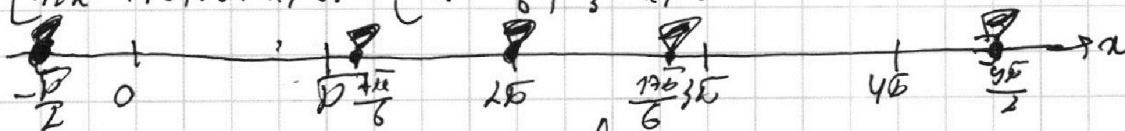
$\sin x = \cos\left(\frac{95-2x}{10}\right)$

$$\begin{cases} 95-2x \leq 6\pi \\ 95-2x \geq 0 \\ x \geq -\frac{95}{2} \\ x \leq \frac{95}{2} \end{cases}$$

$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\left(\frac{95-2x}{10}\right)$

$$\begin{cases} \frac{\pi}{2} - x = \frac{95-2x}{10} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ x - \frac{\pi}{2} = \frac{95-2x}{10} + 2\pi l, l \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5\pi - 10x = 95 - 2x + 20\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ 10x - 5\pi = 95 - 2x + 20\pi l, l \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8x = -4\pi + 20\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ 11x = 14\pi + 20\pi l, l \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} + \frac{5}{2}\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{7\pi}{6} + \frac{5}{3}\pi l, l \in \mathbb{Z} \end{cases}$$



С учетом ОДЗ имеем следующие решения:

$\arccos(\sin(-\frac{\pi}{2})) = 95 + 2 \cdot \frac{\pi}{2} \Rightarrow \arccos(-1) = 10\pi \Rightarrow 10\pi = 10\pi \checkmark \quad x = -\frac{\pi}{2}$

$\arccos(\sin(\frac{7\pi}{6})) = 95 - \frac{2 \cdot 7\pi}{3} \Rightarrow \arccos(-\frac{1}{2}) = \frac{20\pi}{3} \Rightarrow \frac{10-2\pi}{3} = \frac{20\pi}{3} \Rightarrow \frac{10\pi}{3} = \frac{20\pi}{3} \checkmark \quad x = \frac{7\pi}{6}$

$\arccos(\sin(2\pi)) = 95 - 2 \cdot 2\pi \Rightarrow \arccos(0) = 4\pi - 4\pi \Rightarrow 10 \cdot \frac{\pi}{2} = 5\pi \Rightarrow 5\pi = 5\pi \checkmark \quad x = 2\pi$

$\arccos(\sin(\frac{17\pi}{6})) = 95 - \frac{2 \cdot 17\pi}{3} \Rightarrow \arccos(\frac{1}{2}) = \frac{10\pi}{3} \Rightarrow \frac{10-\pi}{3} = \frac{10\pi}{3} \checkmark \quad x = \frac{17\pi}{6}$

$\arccos(\sin(\frac{9\pi}{2})) = 95 - \frac{2 \cdot 9\pi}{2} \Rightarrow \arccos(1) = 0 \Rightarrow 10 - 0 = 0 \Rightarrow 0 = 0 \checkmark \quad x = \frac{9\pi}{2}$

Ответ: $x = -\frac{\pi}{2}, x = \frac{7\pi}{6}, x = 2\pi, x = \frac{17\pi}{6}, x = \frac{9\pi}{2}$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

15. $\log_{11}^4 x - 6 \log_{11} x = \log_{11}^3 \frac{1}{121} - 5$ ОДЗ: $x > 0$
 $x \neq 1$
 $\log_{11}^4 x - \frac{6}{\log_{11} x} = -\frac{2}{3} \log_{11} 11 - 5 \Rightarrow \log_{11}^4 x - \frac{6}{\log_{11} x} = -\frac{2}{3} \log_{11} x - 5$
 пусть $\log_{11} x = t \Rightarrow t^4 - \frac{6}{t} = -\frac{2}{3}t - 5 \Rightarrow t^4 = \frac{16}{3}t - 5 \quad | \cdot 3$
 $3t^5 + 16t - 16 = 0$, $3t^5 + 16t - 16 = 0$, $t \neq 0 \Rightarrow \log_{11} x \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$.

$\log_{11}^4(0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,125y}^3(11^{-13}) - 5$ ОДЗ: $y > 0$; $0,125y \neq 11$ $y \neq 2$
 $\log_{11}^4(0,5y) + \frac{1}{\log_{11}(0,5y)} = \frac{-13}{3 \cdot \log_{11}(0,5y)} - 5$, пусть $\log_{11}(0,5y) = m$
 $m^4 + \frac{1}{m} = \frac{-13}{3m} - 5 \quad | \cdot 3$ $\frac{3m^5 + 15m + 16}{m} = 0$, $3m^5 + 15m + 16 = 0$, $m \neq 0$
 $\log_{11}(0,5y) \neq 0$ $0,5y \neq 1$ $y \neq 2$
 $\begin{cases} 3t^5 + 15t - 16 = 0 \\ 3m^5 + 15m + 16 = 0 \end{cases}$ $(t^5 + m^5) + 5(t+m) = 0 \Rightarrow (t+m)(t^4 - t^3m + t^2m^2 - tm^3 + m^4) + 5(t+m) = 0$
 $3(t^5 + m^5) + 15(t+m) = 0 \quad | :3$ $(t+m)(t^4 - t^3m + t^2m^2 - tm^3 + m^4 + 5) = 0$
 $t+m=0 \Rightarrow \log_{11} x + \log_{0,5y} 11 = 0 \Rightarrow \log_{11}(0,5xy) = 0$ $0,5xy = 1 \Rightarrow \boxed{xy = 2}$
 $t^4 - t^3m + t^2m^2 - tm^3 + m^4 + 5 = 0$ $(t^2 + m^2)^2 - t^2m^2 - tm(t^2 + m^2) + 5 = 0$
 пусть $t^2 + m^2 = a$, $tm = b$ $a^2 - b^2 - ab + 5 = 0$
 $a^2 - ab - b^2 + 5 = 0$ $\Delta = b^2 + 4b^2 - 20 = 5b^2 - 20 = 5(b^2 - 4)$
 $a = \frac{b \pm \sqrt{5(b^2 - 4)}}{2} = \frac{b \pm \sqrt{5(b-2)(b+2)}}{2}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{3} \cdot 10 \arccos\left(\frac{5\sqrt{3}\pi}{10}\right) = 9\sqrt{5} - 2\pi$$

$$\arccos\left(\frac{5\sqrt{3}\pi}{10}\right) = \frac{9\sqrt{5} - 2\pi}{10}$$

$$0 \leq \frac{9\sqrt{5} - 2\pi}{10} \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\arccos\left(\frac{5\sqrt{3}\pi}{10}\right) = \alpha$$

$$\arccos\left(\frac{5\sqrt{3}\pi}{10}\right) = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3} \quad \frac{5\sqrt{3}\pi}{10} = \frac{1}{2}$$

$$9\sqrt{5} - 2\pi \leq 10 \cdot \frac{\pi}{2}$$

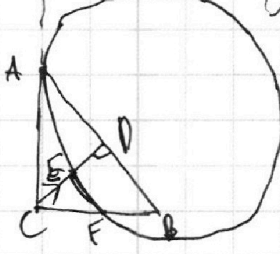
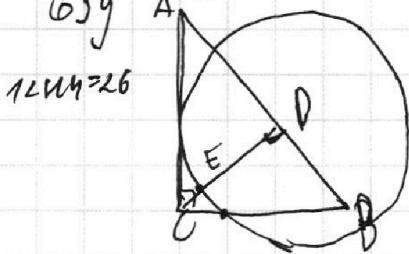
$$2\pi \leq \frac{9\sqrt{5}}{5}$$

$$9\sqrt{5} - 2\pi \geq 0$$

$$\frac{9\sqrt{5}}{2} \geq \pi$$

$$\arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$$

$$\frac{9\sqrt{5} - 2\pi}{10} = \frac{\pi}{3}$$



$$\cos\left(\frac{9\sqrt{5} - 2\pi}{10}\right) = \frac{5\sqrt{3}\pi}{10}$$

$$\cos\left(\frac{9\sqrt{5} - 2\pi}{10}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0$$

$$\cos\left(\frac{9\sqrt{5} - 2\pi}{10}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0$$

$$\frac{9\sqrt{5} - 2\pi + 5\sqrt{3}\pi - 10\pi}{2} = 0$$

$$\frac{9\sqrt{5} - 2\pi - 5\sqrt{3}\pi + 10\pi}{2} = 0$$

$$\frac{9\sqrt{5} - 2\pi - 5\sqrt{3}\pi + 10\pi}{2} = 0$$

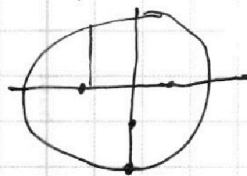
$$5\sqrt{3}\pi - 10\pi = 2\pi - 9\sqrt{5} + 2\pi$$

$$5\sqrt{3}\pi - 10\pi = 2\pi - 9\sqrt{5} + 2\pi$$

$$5\sqrt{3}\pi - 10\pi = 2\pi - 9\sqrt{5} + 2\pi$$

$$\begin{cases} 5x = 2k, k \in \mathbb{Z} \\ 4x = 6 + 2k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

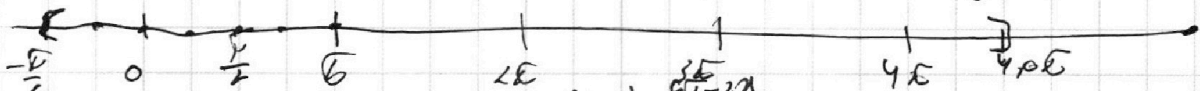
$$\begin{cases} x = \frac{2k}{5}, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{6 + 2k}{4}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$



$$\frac{9\sqrt{5}}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3} \quad \frac{9\sqrt{5}}{2} = \frac{\pi}{3}$$

$$9\sqrt{5} - 2\pi = \frac{10\pi}{3}$$



$$10 \arccos\left(\frac{5\sqrt{3}\pi}{10}\right) = 9\sqrt{5} - 2\pi$$

$$\arccos\left(\frac{5\sqrt{3}\pi}{10}\right) = \frac{9\sqrt{5} - 2\pi}{10}$$

$$\frac{5\sqrt{3}\pi}{10} = \cos\left(\frac{9\sqrt{5} - 2\pi}{10}\right)$$

$$\frac{5\sqrt{3}\pi}{10} = \cos\left(\frac{9\sqrt{5} - 2\pi}{10}\right)$$

$$\frac{5\sqrt{3}\pi}{10} = \frac{1}{2}$$

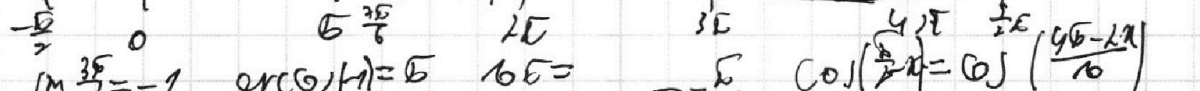
$$\frac{5\sqrt{3}\pi}{10} = \frac{1}{2}$$

$$5\sqrt{3}\pi = 5\sqrt{3}\pi$$

$$5\sqrt{3}\pi = 5\sqrt{3}\pi$$

$$6\sqrt{3}\pi = 6\sqrt{3}\pi$$

$$6\sqrt{3}\pi = 6\sqrt{3}\pi$$



$$10 \arccos\left(\frac{5\sqrt{3}\pi}{10}\right) = 9\sqrt{5} - 2\pi$$

$$\arccos\left(\frac{5\sqrt{3}\pi}{10}\right) = \frac{9\sqrt{5} - 2\pi}{10}$$

$$\frac{5\sqrt{3}\pi}{10} = \cos\left(\frac{9\sqrt{5} - 2\pi}{10}\right)$$

$$\frac{5\sqrt{3}\pi}{10} = \cos\left(\frac{9\sqrt{5} - 2\pi}{10}\right)$$

$$\frac{5\sqrt{3}\pi}{10} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{5\sqrt{3}\pi}{10} = \frac{1}{2}$$

$$5\sqrt{3}\pi = 5\sqrt{3}\pi$$

$$5\sqrt{3}\pi = 5\sqrt{3}\pi$$

$$6\sqrt{3}\pi = 6\sqrt{3}\pi$$

$$6\sqrt{3}\pi = 6\sqrt{3}\pi$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

