МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω, хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB, если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2-5x+3}-\sqrt{2x^2+2x+1}=2-7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-12;24)$, $Q(3;24)$ и $R(15;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2-2x_1+y_2-y_1=12$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система

$$\begin{cases} ax-y+10b=0, \\ \left((x+8)^2+y^2-1\right)\left(x^2+y^2-4\right)\leqslant 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B. Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC, если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответсвенно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 [X] 2 [ ] 3 [ ] 4 [ ] 5 [ ] 6 [ ] 7 [ ]

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1.

$ab \vdots 2^{14}\cdot 7^{10}$

$bc \vdots 2^{17}\cdot 7^{17}$

$ac \vdots 2^{30}\cdot 7^{37}$

abc — min — ?

Числа a, b, c можно представить в следующем виде:

$a = 2^{\alpha_1}\cdot 7^{\beta_1}$
$b = 2^{\alpha_2}\cdot 7^{\beta_2}$
$c = 2^{\alpha_3}\cdot 7^{\beta_3}$

, т.к. — мы хотим, чтобы abc — min, то в разложении чисел a, b, c должны отсутствовать другие простые делители, кроме 2, 7

Заметим, что $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ — целые и неотрицательные.

Тогда $a\cdot b = 2^{\alpha_1+\alpha_2}\cdot 7^{\beta_1+\beta_2}$, аналогично составными. Т.о. можно составить следующие нер-ва

$$\begin{cases} \alpha_1+\alpha_2 \geq 14 & (1)\\ \beta_1+\beta_2 \geq 10 & (2)\\ \alpha_2+\alpha_3 \geq 17 & (3)\\ \beta_2+\beta_3 \geq 17 & (4)\\ \alpha_1+\alpha_3 \geq 30 & (5)\\ \beta_1+\beta_3 \geq 37 & (6)\end{cases}$$

, т.к. произв. делится, то сумма степеней показателей должна быть не меньше показателя степень простого числа, на которое делится

$abc = 2^{\alpha_1}\cdot 7^{\beta_1}\cdot 2^{\alpha_2}\cdot 7^{\beta_2}\cdot 2^{\alpha_3}\cdot 7^{\beta_3} = 2^{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}\cdot 7^{\beta_1+\beta_2+\beta_3}$

1. Сложим (1), (3), (5) нер-ва:

$2(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3) \geq 61$

чтобы $abc \to \min$, нужно, чтобы $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 \to \min$

$\beta_1+\beta_2+\beta_3 \to \min$

т.к. $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$ — целое, то

$\min(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3) = \frac{62}{2} = 31$

2. сложим (2), (4), (6) нер-ва:

$2(\beta_1+\beta_2+\beta_3) \geq 64$, т.е. $\min(\beta_1+\beta_2+\beta_3) = 32$

Т.о. $\min(abc) = 2^{31}\cdot 7^{32}$.

Ответ: $2^{31}\cdot 7^{32}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

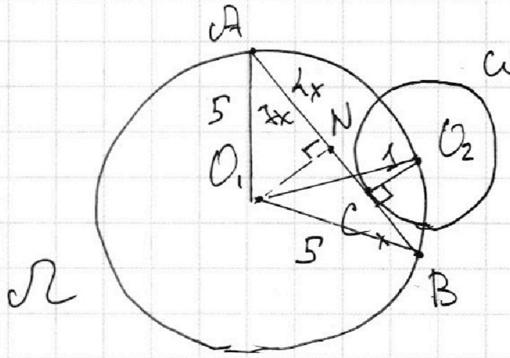
N3.

$\omega:\ r = 1$

$\Omega:\ R = 5$

$AC : CB = 7$

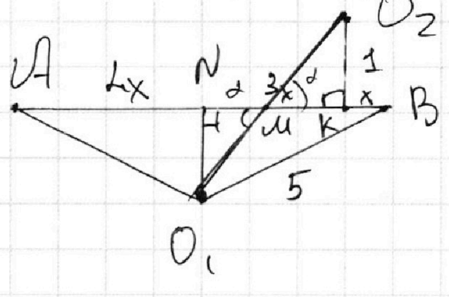
$AB - ?$



r – радиус ω, R – радиус Ω

Пусть $CB = x$, тогда $AC = 7x$

1. Центр окружн. O_1 Ω находится на серединн. $\perp$ к AB, тогда $AN = 4x$ $BN = 4x$. Пусть O_1 где-то на серед $\perp$ к AB, $NC = 3x$, $BC = x$
2. O_1A, O_1B – радиусы R
3. Проведем O_1O_2 – радиус R



1) по т. Пифагора для ΔAO_1N:

$25 = 16x^2 + O_1N^2$

2) $\angle NMO_1 = \angle O_2MK = \alpha$

$$\sin\alpha = \frac{O_1N}{\cancel{NM}\,O_1M},\quad \sin\alpha = \frac{1}{O_2M} \Rightarrow O_1M = \frac{O_1N}{\sin\alpha},\quad O_2M = \frac{1}{\sin\alpha} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow O_1M + O_2M = 5 = \frac{1}{\sin\alpha}(O_1N + 1) \quad (1)$$

3) $$tg\alpha = \frac{O_1N}{NM},\quad tg\alpha = \frac{1}{MK} \Rightarrow NM = \frac{O_1N}{tg\alpha},\quad MK = \frac{1}{tg\alpha} \Rightarrow NM + MK = 3x = \frac{1}{tg\alpha}(O_1N + 1) \quad (2)$$

(1) : (2):

$$\frac{5}{3x} = \frac{1}{\sin\alpha}\cdot\frac{tg\alpha}{1} = \frac{1}{\sin\alpha}\cdot\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1}{\cos\alpha} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{9x^2}{25} \quad (*)$$

из (1): $$\sin\alpha = \frac{O_1N+1}{5} \Rightarrow \sin^2\alpha = \frac{(O_1N+1)^2}{25} \quad (**)$$

$(*) + (**)$: $$1 = \frac{9x^2}{25} + \frac{(O_1N+1)^2}{25} \Rightarrow 25 = 9x^2 + (O_1N+1)^2$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№3 Продолжение.

$(O_1N+1)^2=25-9x^2 \Rightarrow O_1N+1=\sqrt{25-9x^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow O_1N=\sqrt{25-9x^2}-1$, $O_1N^2=(\sqrt{25-9x^2}-1)^2$ при $25\geq 9x^2$

подстав. в 1) т. Пифагора:

$\cancel{25}=16x^2+\cancel{25}-9x^2-2\sqrt{25-9x^2}+1 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2\sqrt{25-9x^2}=7x^2+1 \Rightarrow$

$\Rightarrow 100-36x^2=49x^4+14x^2+1 \Rightarrow$

$\Rightarrow 49x^4+50x^2-99=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x^2=1 \\ x^2=-\frac{99}{49}\ \varnothing \end{array}\right. \Rightarrow$

$\Rightarrow x=1$

нер-во $25-9x^2\geq 0$ выпол.
все рассужд. справедл.

т.о. $x=1$, а $AB=7x+x=8x \Rightarrow$

$\Rightarrow AB=8$

Ответ: $AB=8$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

~~№4.~~ №2 Решал №2!!! Чистовик

$\frac{a}{b}$ - несократима, $\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$

$a\in N,\ b\in N$

$\overline{\qquad}$ т→max

если $\frac{a}{b}$ - несократимая дробь, то в числителе или в знаменателе остались простые числа, которых нет либо вверху, либо внизу

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}=\frac{a+b}{(a+b)^2-8ab},$$ если разделить на ab:

$$\frac{\frac{a+b}{ab}}{\frac{(a+b)^2}{ab}-8},$$ если $a+b\vdots ab$, то и $(a+b)^2\vdots ab$

в дроби $\frac{a}{b}$ находятся a и b, которые взаимопросты по отношению друг к другу

$a+b\vdots ab$

~~Для $\frac{a}{b}$ - несокр., то такого быть не может~~

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}=\frac{a\left(1+\frac{b}{a}\right)}{a\left(a-6b+\frac{b^2}{a}\right)}=\frac{\cancel{ab}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{a}\right)}{\cancel{ab}\left(\frac{a}{b}-6+\frac{b}{a}\right)}$$

т.о. можно сократить

Ответ. 6

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N4.

$$\sqrt{2x^2-5x+3}-\sqrt{2x^2+2x+1}=2-7x$$

Замена:

$$\sqrt{2x^2-5x+3}=a,\ a\geq 0$$
$$\sqrt{2x^2+2x+1}=b,\ b\geq 0$$

$2x^2-5x+3=a^2$ (1) . Вычтем из (1) (2), т.е.
$2x^2+2x+1=b^2$ (2) ; (1)−(2):
$-7x+2=a^2-b^2$

$$a-b=a^2-b^2 \Leftrightarrow (a-b)(a+b)-(a-b)=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (a-b)(a+b-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=b \\ a+b=1 \end{array}\right.$$

т.о. $\left[\begin{array}{ll} \sqrt{2x^2-5x+3}=\sqrt{2x^2+2x+1} & (1) \\ \sqrt{2x^2-5x+3}+\sqrt{2x^2+2x+1}=1 & (2) \end{array}\right.$

Для (1):

$$\sqrt{2x^2-5x+3}=\sqrt{2x^2+2x+1} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2-5x+3=2x^2+2x+1 \Leftrightarrow \\ 2x^2+2x+1\geq 0 \end{cases}$$
(выполн. всегда, т.к. $D<0$)

$\Leftrightarrow 7x=2 \Leftrightarrow x=\frac{2}{7}$.

Для (2): т.к. обе части неотриц.

$$\sqrt{2x^2-5x+3}+\sqrt{2x^2+2x+1}=1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2x^2-5x+3+2x^2+2x+1+2\sqrt{2x^2-5x+3}\cdot\sqrt{2x^2+2x+1}=1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4x^2-3x+4+2\sqrt{2x^2-5x+3}\cdot\sqrt{2x^2+2x+1}=1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4x^2-3x+3+2\sqrt{2x^2-5x+3}\cdot\sqrt{2x^2+2x+1}=0 \quad (3);$$

1. рассмотрим $4x^2-3x+3$ – оно всегда больше 0, т.к. $D=9-3\cdot4\cdot4<0$, т.е. $4x^2-3x+3>0$
2. произведение корней всегда неотрицательно, т.е. $2\sqrt{2x^2-5x+3}\cdot\sqrt{2x^2+2x+1}\geq 0$

Оценим левую и правую части выражения (3)
Прав. ч.: 0
Лев. ч.: $2\cdot\sqrt{2x^2+2x+1}\cdot\sqrt{2x^2-5x+3}+4x^2-3x+3>0$

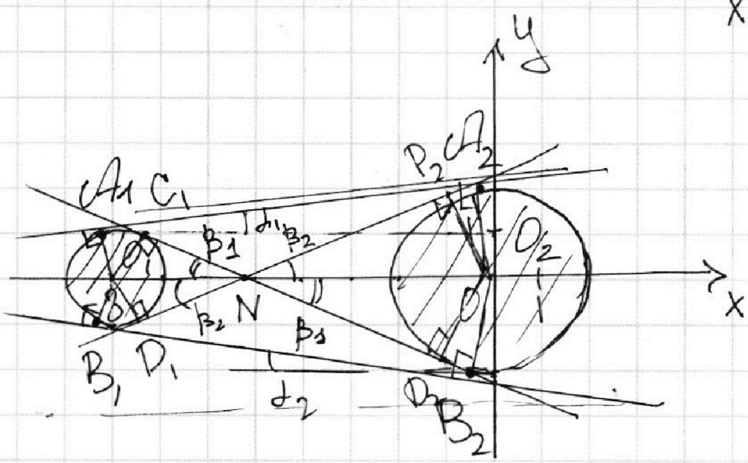
Как видно равенство не достигается.
т.о. остается только один корень из (1) $x=\frac{2}{7}$

Ответ: $\frac{2}{7}$.

№6.

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 \quad (1) \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \quad (2) \end{cases}$$

Изобразим на плоскости $(x+8)^2 + y^2 \leq 1$, круг, радиуса
$x^2 + y^2 \leq 4$ - круг, радиуса 2



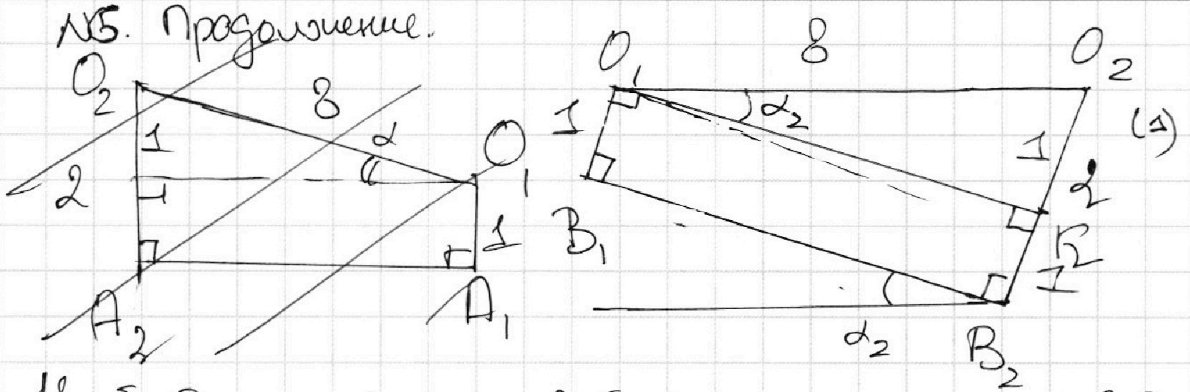
Подставив некоторые значение $(x;y)$ во (2) нер-во, можно получить, что (2) нер-во задает 2 круга, радиуса 1 и радиуса 2

Закрасим область, которую задает (2) нер-во
/// - такой штриховкой

(1) ур-ие задает прямую $y = ax + 10b$, где
a - задает угловой коэфф. наклона прямой a
$10b$ - точка на оси Oy при $x = 0$, т.е. смещение прямой y вдоль Oy.

Проведем 2 касательные к двум окр. радиуса 1 и радиуса 2 (к закрашенным фигурам)
2 общие касательные в т. $A_1 A_2$ и в т. $B_1 B_2$,
(т. A_1 и B_1 и A_2 и B_2 - симметр. отн. осях)
Проведем радиусы в точки касания
в (радиус, проведенный в т. касания $\perp$ касательной в т. касания)
Получилось, что $A_1 A_2 O_2 O_1$ и $B_1 O_1 O_2 B_2$ -
- трапеции

№5. Продолжение.



Необходимо найти угловой наклон прямых A_1A_2 и B_1B_2.

~~$\sin\alpha = \frac{1}{8}$~~

Необходимо, что наша прямая касалась двух окружностей, $r_1=1$ и $r_2=2$. Иначе, кол-во общих точек (точек пересечения) будет не 2

Необходимо рассмотреть все общие касательные к двум окружностям на плоскости

Общими касательными будут A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2, D_1D_2. Необходимо найти tg угла наклона общей касательной к оси OX это и будет искомым a.

Для случая (1):

$O_1O_2 \parallel$ оси OX $\angle(B_1B_2; O_1O_2)$.

Проведем $O_1K \perp O_2B_2 \Rightarrow O_1B_1B_2K$ – прямоуг. (все 4 угла по 90°), т.о. $O_1B_1 = 1 = KB_2 \Rightarrow O_2K = 1$.

т.о. $\sin\alpha_2 = \frac{1}{8}$, O_1K по т. Пиф. для $\triangle O_1O_2K$:

$O_1K = \sqrt{64-1} = \sqrt{63}$, т.о. $\operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{63}} = \frac{1}{\sqrt{9\cdot 7}} = \frac{1}{3\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}}{21}$

Мы получаем одно из возможных a для случая с касательной B_1B_2, такое же a по модулю получится для аналогичной касательной A_1A_2, но со знаком „–" (график убывает)

т.к. $a_1 = \frac{\sqrt{7}}{21}$,

$a_2 = -\frac{\sqrt{7}}{21}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
					X	

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№6. Продолжение.

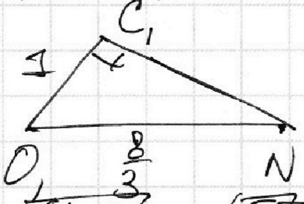
Рассмотрим теперь треугольники O_1C_1N, O_2D_2N, O_1D_1N, O_2D_2N

Возьмем, к примеру, ΔO_1D_1N и ΔO_2D_2N (они подобны) по 2м углам ($\angle O_1D_1N = \angle O_2D_2N = 90^\circ$ (радиусы в т. касания)) и $\angle O_1ND_1 = \angle O_2ND_2 = \beta_2$

т.о. $\frac{O_1D_1}{O_2D_2} = \frac{O_1N}{O_2N} \Rightarrow \frac{O_1N}{O_2N} = \frac{1}{2} \to 2O_1N = O_2N$

$O_1N + O_2N = O_1O_2 = 8 \Rightarrow 3O_1N = 8 \Rightarrow O_1N = \frac{8}{3}$

Найдем $tg\beta_2$ (или a_3)



по т. Пифагора для ΔO_1C_1N:

$$C_1N = \sqrt{\frac{64}{9} - 1} = \sqrt{\frac{64-9}{9}} = \sqrt{\frac{55}{9}} = \frac{\sqrt{55}}{3}$$

т.о. $tg\beta_2 = a_3 = \frac{1}{\sqrt{55}} \cdot 3 = \frac{3}{\sqrt{55}}$

$tg\beta_1 = tg\beta_2$ $\beta_1 = \beta_2$, но для β_1 график убывает, поэтому $a_4 = -\frac{3}{\sqrt{55}}$

т.о. $a_3 = \frac{3}{\sqrt{55}} = \frac{3\sqrt{55}}{55}$

$a_4 = -\frac{3}{\sqrt{55}} = -\frac{3\sqrt{55}}{55}$

При других a кроме a_1, a_2, a_3, a_4 не будет 2 точки пересечения прямой и двух кругов

Ответ: $\cancel{\pm\frac{3}{\sqrt{55}}; \pm\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}}; \pm\frac{\sqrt{7}}{21}}$

$\pm\frac{3\sqrt{55}}{55}$; $\pm\frac{\sqrt{7}}{21}$.

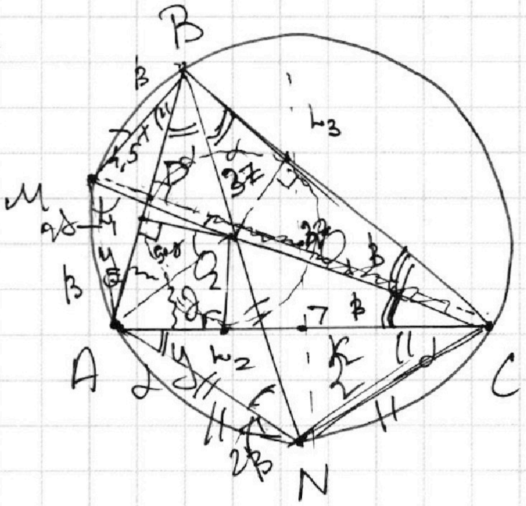
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№7.



$MD = 4{,}5$
$NK = 2$
$\rho(A; O_2) - ?$

1) серединный перпендикуляр к AC и AB проходят соответственно через точки N и M.

2) Центр вписанной окружности лежит на пересечении биссектрис. O_2 - центр вписанной окр. BO_2 - биссектрисса $\angle B$ но еще $B\ O_2\ N$ - на одной прямой (на равные дуги опираются равные углы)

3) O_1 - центр описанной окружн.

4) аналогично CM - биссектр. $\angle C$

5) Пусть $BL_1 = x$, то $BL_3 = x$ и $AL_1 = y$, то $AL_2 = y$

6) $\angle CAN = \angle CBN = \angle ABN = \alpha$ (вписанные)

7) $\triangle ANC$ - р/б, то $AN = NC$ (отсекают равные дуги)

8) по th. sin: $\dfrac{AN}{\sin\alpha} = 2R \Rightarrow AN = 2R\sin\alpha$

9) $MA = MB$ (отсекают равные дуги)

10) $\angle MAB = \angle ABM = \angle ACM = \angle MCB = \beta$

11) по th. sin $\dfrac{MA}{\sin\beta} = 2R \Rightarrow MA = 2R\sin\beta$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№7. Продолжение.

12) по т. Пифагора для $\triangle AKN$ и AO_1K:

$$\left.\begin{array}{l} AK^2 + KN^2 = AN^2 \\ AK^2 + O_1K^2 = AO_1^2 \end{array}\right| \Rightarrow O_1K^2 - 4 = AO_1^2 - AN^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (R-2)^2 - 4 = R^2 - 4R^2\sin^2\alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cancel{R^2} - 4R + \cancel{4} - \cancel{4} = \cancel{R^2} - 4R^2\sin^2\alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R\sin^2\alpha = 1 \quad (1)$$

13) по т. Пифагора для $\triangle AMD$ и $\triangle AO_1D$

$$\left.\begin{array}{l} AD^2 + 4{,}5^2 = AM^2 \\ AD^2 + (R-4{,}5)^2 = R^2 \end{array}\right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cancel{R^2} - 9R + \cancel{4{,}5^2} - \cancel{4{,}5^2} = \cancel{R^2} - 4R^2\sin^2\beta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9 = 4R\sin^2\beta \quad (2)$$

Делим (1) на (2): $\frac{1}{9} = \frac{R\sin^2\alpha}{4R\sin^2\beta} \Rightarrow \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \sqrt{\frac{4}{9}} \Rightarrow$

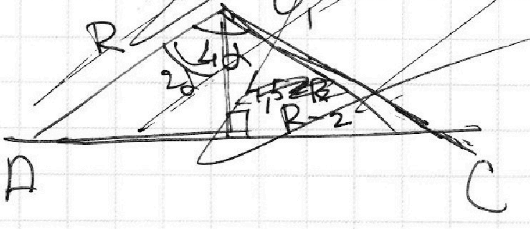
$$\Rightarrow \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{2}{3}$$

14) по т. синусов для $\triangle AO_2B$ и $\triangle AO_2C$:

$$\left.\begin{array}{l} 1.\ \frac{AO_2}{\sin\beta} = \frac{CO_2}{\sin\angle CAO_2} = \frac{CO_2}{\sin\gamma} \\ 2.\ \frac{AO_2}{\sin\gamma} = \frac{BO_2}{\sin\gamma} \end{array}\right| \Rightarrow \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{CO_2}{BO_2} = \frac{2}{3}$$

~~Пусть $CO_2 = 2z$, то $BO_2 = 3z$~~

~~$\cos\alpha = \frac{R-2}{R}$~~



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

N7. Продолжение.

13) $BH_3 = 3z \cdot \cos\alpha = BH_1$

14) $CH_3 = 2z \cdot \cos\beta = CH_2$, т.к. высоты окружностей

17) $2R = \dfrac{z(3\cos\alpha + 2\cos\beta)}{\sin 2\gamma}$

18) $\sin\gamma = \dfrac{z}{AO_2}$

$AC = 2AN \cdot \cos\alpha = 2 \cdot 2R\sin\alpha \cdot \cos\alpha = 2R\sin 2\alpha$

$AH_2 = 2R\sin 2\alpha - 2z\cos\beta$

из 14.1. $\sin\gamma = \dfrac{BO_2}{AO_2} \cdot \sin\alpha = \dfrac{3z}{AO_2} \cdot \sin\alpha$

$\sin\gamma$

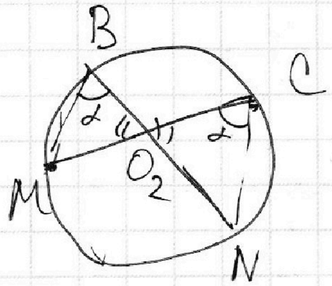
$\dfrac{z}{AO_2} = \dfrac{3z}{AO_2} \cdot \sin\alpha \Rightarrow z = 3z\sin\alpha$

$z = \dfrac{z}{3\sin\alpha}$

$\cos\gamma = \dfrac{AH_2}{AO_2}$

$4R\sin\gamma \cdot \cos\gamma = z(3\cos\alpha + 2\cos\beta)$

$4R \cdot \dfrac{z}{AO_2} \cdot \dfrac{AH_2}{AO_2}$



$\dfrac{MO_2}{NO_2} = \dfrac{BO_2}{CO_2} = \dfrac{3}{2} = \dfrac{MB}{CN}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№7. Продолжение.

$\angle ANO_2 = 2\beta$ (вписанный угол)

$\angle AO_2N = 180 - 90 + \alpha - 90 + \gamma = \alpha + \gamma \Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle AO_2N$ — р/б $\quad \angle ANB = 2\beta$ (вписанн).

$AO_2 = 2AN \cdot \sin\beta \Rightarrow \begin{cases} AO_2 = 4\dfrac{\sin\beta}{\sin\alpha} \\ AO_2 = \dfrac{9\sin\alpha}{\sin\beta} \end{cases} \Rightarrow$

аналогично

$AO_2 = 2AM \cdot \sin\alpha$

$AM = \cancel{R}\ \dfrac{4{,}5}{\sin\beta} \qquad \Rightarrow AO_2^2 = 36 \Rightarrow$

$AN = \dfrac{2}{\sin\alpha} \qquad \Rightarrow \boxed{AO_2 = 6}$

Ответ: $AO_2 = 6$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

черновик

$$\sqrt{2x^2-5x+3}+\sqrt{2x^2+2x+1}=1$$

$$\min\ 2x^2+2x+1=y$$

$$x_в=-\frac{b}{2a}=-\frac{2}{2\cdot 2}=-\frac{1}{2}$$

$$2\cdot\frac{1}{4}+2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+1=\frac{1}{2}$$

$$4x^2-3x+4 \qquad x=\frac{3\pm\sqrt{9-}}{8}$$

$$2x^2-5x+3+2x^2+2x^2+2x+1+2\sqrt{2x^2-5x+3}\cdot\sqrt{2x^2+2x+1}$$

$$=1 \qquad 4x^2-3x+4+2\sqrt{2x^2-5x+3}\cdot\sqrt{2x^2+2x+1}=$$

$$=1 \qquad \underbrace{4x^2-3x+3}_{>0}+2\sqrt{2x^2-5x+3}\cdot\sqrt{2x^2+2x+1}=0$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Черновик

N1 $ab \vdots 2^{14} 7^{10}$ $\quad a = 2^{\alpha_1} \cdot 7^{\alpha_2}$ $\quad abc \to \min$ - ?

$bc \vdots 2^{17} \cdot 7^{17}$ $\quad b = 2^{\beta_1} \cdot 7^{\beta_2}$

$ac \vdots 2^{20} \cdot 7^{37}$ $\quad c = 2^{\gamma_1} \cdot 7^{\gamma_2}$

$$\begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 \geq 14 \\ \alpha_2 + \beta_2 \geq 10 \\ \beta_1 + \gamma_1 \geq 17 \\ \beta_2 + \gamma_2 \geq 17 \\ \gamma_1 + \alpha_1 \geq 20 \\ \gamma_2 + \alpha_2 \geq 37 \end{cases} \quad 34 \quad +$$

$abc = 2^{\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1} \cdot 7^{\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2}$

$\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 \to \min$

$\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 \to \min$

$2\alpha_1 + 2\beta_1 + 2\gamma_1 + 2\alpha_2 + 2\beta_2 + 2\gamma_2 \geq$

$\geq$

$\alpha_1 + \gamma_1 + \alpha_1 + \beta_1 + \beta_1 + \gamma_1 \geq \overset{31}{17+14} + 20$

$2(\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1) \geq 51 \Rightarrow 2(\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1) = 52$, т.к. $\{\alpha_1; \beta_1; \gamma_1\} \in N$

N2 $\frac{a}{b}$ $\quad a \in N, b \in N$ $\quad \frac{a+b}{a^2 - 6ab + b^2} =$ $\quad m_{max}$ - ?

$$= \frac{a+b}{a^2 + 2ab - 8ab + b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2 - 8ab} =$$

$$= \frac{\frac{a+b}{m}}{\frac{(a+b)^2}{m} - \frac{8ab}{m}} \qquad \frac{b\left(1 + \frac{a}{b}\right)}{b^2\left(\frac{a^2}{b^2} - 6\frac{a}{b} + 1\right)}$$

можно сократить на b

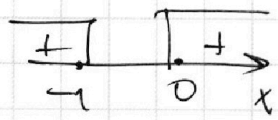
$\overbrace{4+4+4}^{12} + \overbrace{5+5+5}^{15} + 6 = 18 + 15 = 33$

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{\underbrace{2x^2 + 2x + 1}_{>0}} = 1$$

при каких $x \geq 1$:

$2x^2 + 2x + 1 \geq 1$

$2x(x+1) \geq 0$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№4. Черновик

$\sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{2x^2+2x+1} = 2-7x$

$\sqrt{2(x-1)(x-\frac{3}{2})} - \sqrt{2x^2+2x+1} = 2-7x$

Замена:

$2-7x = t$

Замена: $\sqrt{2x^2-5x+3} = a,\ a \geq 0$

$\sqrt{2x^2+2x+1} = b,\ b \geq 0$

$a^2 = 2x^2-5x+3$
$b^2 = 2x^2+2x+1$ $\Rightarrow a^2-b^2 = 2-7x$

$a-b = a^2-b^2 \Leftrightarrow (a-b)-(a-b)(a+b)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (a-b)(1+a+b)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a-b=0 \\ a+b+1=0\ (2) \end{array}\right.$

т.к. $a \geq 0,\ b \geq 0$, то $a+b+1 \geq 1$, т.о. не подходит (2)

$a = b$

т.о. $\sqrt{2x^2-5x+3} = \sqrt{2x^2+2x+1} \Leftrightarrow$

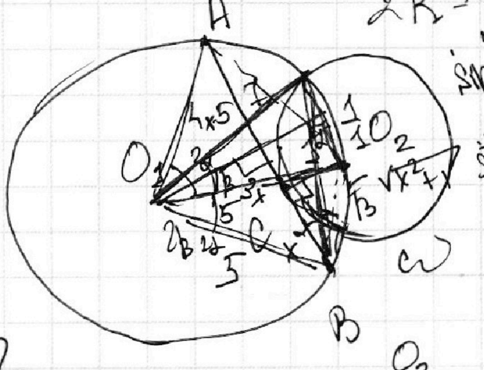
$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2-5x+3 = 2x^2+2x+1 \\ 2x^2+2x+1 \geq 0 \text{ — всегда} \end{cases} \Leftrightarrow 7x = 2 \Leftrightarrow x = \frac{2}{7}$

$1 + x_1^2 = y_1^2$

$1 + x_2^2 = y_2^2$

$\sqrt{x_2^2+1} + \sqrt{1+x_1^2} = 5$

№3.



$2R = \frac{a}{\sin\alpha}$

$\sin\beta =$

$\frac{1}{\sin\beta} = 27$

$AC : CB = 7$

$r_\omega = 1$

$r_\Omega = 5$

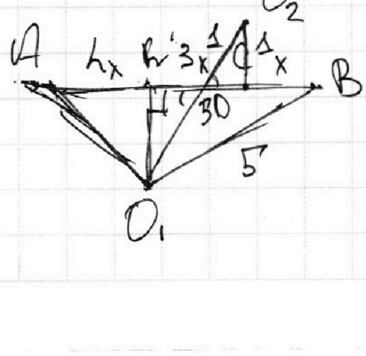
AB - ?

$3x = \frac{O_1K}{tg\alpha} \cdot \frac{1}{tg\alpha}$

$8x$ - ? $\quad tg\alpha = \frac{O_1K}{y_1};\ tg\alpha = \frac{1}{y_2}$

x - ?

$\sin\alpha = \frac{O_1K}{O_1D};\ \sin\alpha = \frac{1}{O_2D}$



$5 = \frac{O_1K}{\sin\alpha} + \frac{1}{\sin\alpha}$

$O_1K^2 + 16x^2 = 25$

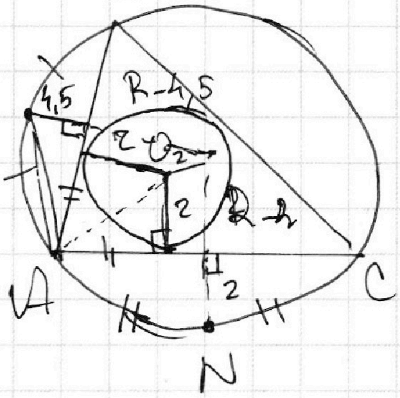
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

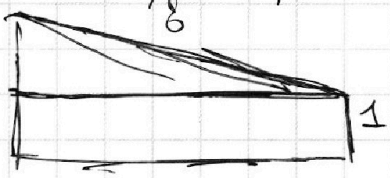
Черновик:



$\rho(A \cdot O_2) - 8$

$\rho(M \cdot AB) = 4,5$

$\rho(N \cdot AC) = 2$

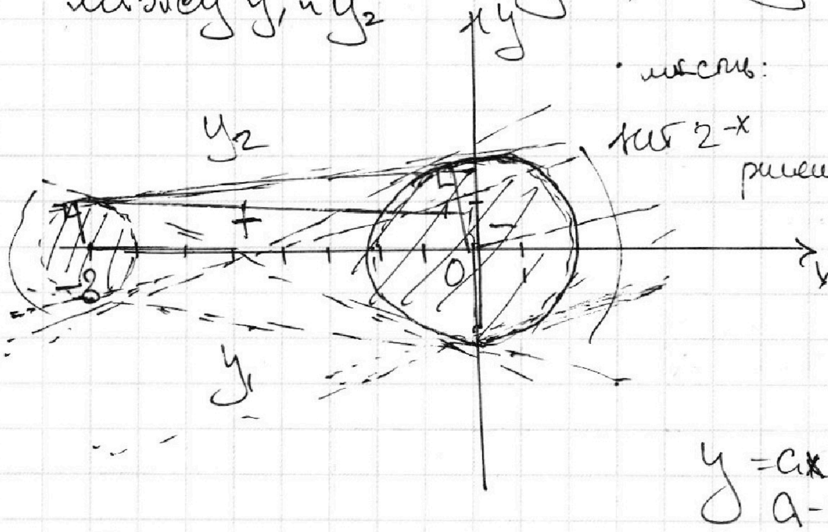


$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = ax + 10b \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \le 0 \end{cases}$

$\left[\begin{cases} (x+8)^2 + y^2 \le 1 \\ x^2 + y^2 \ge 4 \end{cases} \quad \begin{cases} (x+8)^2 + y^2 \ge 1 \\ x^2 + y^2 \le 4 \end{cases}\right.$

между y_1 и y_2



• мысль:

нет 2-х решений

$(-8; 0)$

$(7; 0)$

$(6; 0)$

$(0; 1)$

$(8 + 1 - 1)(0 + 1 - 4) \le 0$

$(3; 4)$

$y = ax + 10b$ $\frac{5}{3}$

a - угл. коэфф.

$\frac{\frac{10}{3}}{\frac{25}{9} - 6 \cdot \frac{25}{9} + \frac{25}{9}} = -\frac{\frac{10}{3}}{\frac{4 \cdot 25}{9}} = ~~\frac{3 \cdot 10}{}~~ \frac{10 \cdot 9}{3 \cdot 100} = 3/10$

где никаких не будет двух решений:
при $a = 0$, не найдется такой точки
$x = 0$, $y = 10b$, - отвечает только за сдвиг
по оси y $\quad \frac{1+1}{1-6+1} = \frac{2}{-4} = 2$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$3x = \frac{1}{tg\,\alpha} \cdot (O_1K+1)$

$5 = \frac{1}{\sin\alpha} \cdot (O_1K+1)$

$\frac{5}{3x} = \frac{tg\,\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{\cos\alpha}$

$\frac{5}{\cancel{(O_1K+1)}}$

$\frac{(O_1K+1)^2}{5^2} = \sin^2\alpha \quad + \quad \frac{9x^2}{25} \quad \cos^2\alpha$

$\frac{(O_1K+1)^2}{25} + \frac{9x^2}{25} = 1$

$\begin{cases} (O_1K+1)^2 = 25 - 9x^2 \\ O_1K + 1 = \sqrt{25-9x^2} \end{cases}$

$\cancel{25} - 9x^2 - 2\sqrt{25-9x^2} + 1 + 16x^2 = \cancel{25}$

$7x^2 - 2\sqrt{25-9x^2} + 1 = 0$

$7x^2 + 1 = 2\sqrt{25-9x^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow 49x^4 + 14x^2 + 1 = 100 - 36x^2$

$49x^4 + 50x^2 - 99 = 0$

$x^2 = 1 \to \boxed{x=1}, \quad AB = 8x \Rightarrow \boxed{AB = 8}$

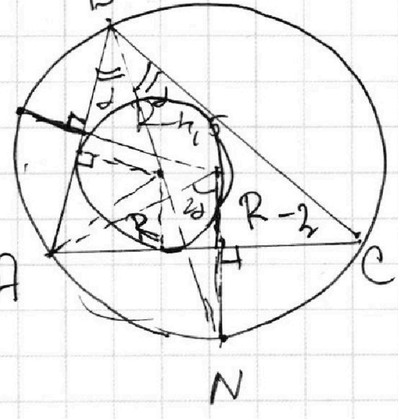
$x_1 \cdot x_2 = -\frac{99}{49}$

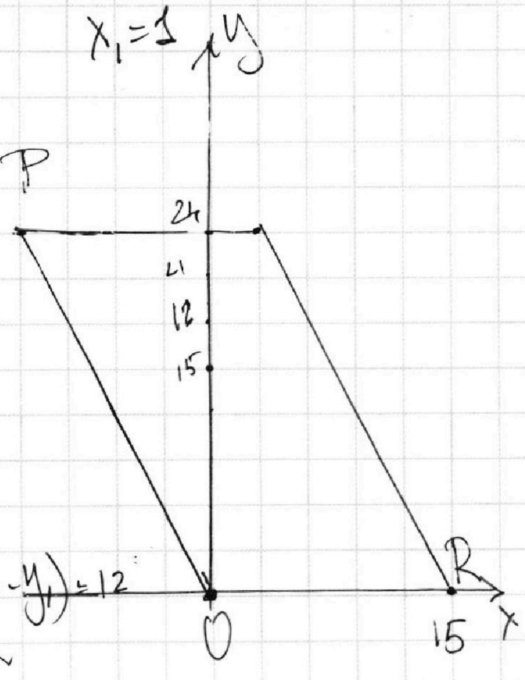
$x_1 = 1$

N2. $\frac{a+b}{a^2 - 6ab + b^2}$, состоит из

$\frac{a}{b}$ – несокр. т.о. a – прост. чисел

b – состоит из простых чисел





$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$

$2(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 12$

$(-12; 24)$, $2(-12 - x_1) + (24 - y_1) = 12$

$-2x_1 - y_1 = 12$