



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



① [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

② [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

③ [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.

④ [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

* 5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-13;26)$, $Q(3;26)$ и $R(16;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$.

⑥ [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

* 7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

N1

$$a, b, c \in \mathbb{N}, \quad ab : 2^{15} \cdot 7^{11}, \quad bc : 2^{14} \cdot 7^{18}, \quad ac : 2^{23} \cdot 7^{39}.$$

$$\min(ab, c) = ?$$

Решение. Через $\nu_p(m)$ будем обозначать степень вхождения простого числа p в натуральное число m (например, $\nu_3(18) = 2$).

Заметим, что т.к. $ac : 2^{23} \cdot 7^{39}$, то

$$ab, c : 7^{39} \Leftrightarrow \nu_7(ab, c) \geq 39. \quad \text{Заметим,}$$

что из условия:
$$\begin{cases} \nu_2(a) + \nu_2(c) = \nu_2(ac) \geq 23 \\ \nu_2(b) + \nu_2(c) = \nu_2(bc) \geq 14 \\ \nu_2(a) + \nu_2(b) = \nu_2(ab) \geq 15 \end{cases}$$
 (даже, что $\nu_p(m) + \nu_p(n) = \nu_p(mn)$)

Сложив эти нер-ва, получим:

$$2(\nu_2(a) + \nu_2(b) + \nu_2(c)) = 2\nu_2(ab, c) \geq 55.$$

Число слева - четное, а справа - нечетное,

откуда (абсурдно) $2\nu_2(ab, c) \geq 56 \Leftrightarrow$

$$\nu_2(ab, c) \geq 28, \text{ и раз } \nu_7(ab, c) \geq 39, \text{ получим}$$

$$ab, c : 2^{28} \cdot 7^{39}, \text{ откуда } \min(ab, c) = 2^{28} \cdot 7^{39}.$$

Покажем, что минимум достигается. Дако, что

подходят числа $a = 2^{11} \cdot 7^{21}$, $b = 2^4$ и $c = 2^{18} \cdot 7^{13}$.

Дако, что при таких a, b, c все условия задачи выпол-
няются и $ab, c = 2^{28} \cdot 7^{39}$.

Ответ. $\boxed{2^{28} \cdot 7^{39}} \rightarrow$
 $= ab, c$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



N2

$$a, b \in \mathbb{N}, \frac{a}{b} - \text{кесокр.}; \quad m \in \mathbb{N}, \quad \frac{a+b}{a^2-4ab+b^2}$$

сокр. на m . $\max(m) = ?$

Решение. Ясно, что $\frac{a}{b} - \text{кесокр.}$

$\Leftrightarrow a, b$ взаимно-простые ~~кесокр.~~ $\Leftrightarrow$

$\text{НОД}(a; b) = 1$. Заметим, что

$a+b \vdots m$ и $a^2-4ab+b^2 \vdots m$, откуда

$$a^2-4ab+b^2 = (a+b)^2 - 6ab \vdots m, \text{ и раз}$$

$a+b \vdots m$, то $3ab \vdots m$. Докажем,

~~кесокр.~~ ~~кесокр.~~ что $\text{НОД}(a; m) = \text{НОД}(b; m) = 1$.

Пусть это не так, и $\text{НОД}(b; m) =$

$= n \in \mathbb{N}, n > 1$. Так $a+b \vdots m$ и

$m \vdots n$, то $a+b \vdots n$, и раз $b \vdots n$, то

$a \vdots n$, откуда $\text{НОД}(a; b) \geq n > 1$. Но

$\text{НОД}(a; b) = 1$, и мы пришли к противоре-

-чению. Значит, $\text{НОД}(b; m) = 1$. Аналогично

$\text{НОД}(a; m) = 1$. Следовательно тогда

$3ab \vdots m$ и $\text{НОД}(a; m) = \text{НОД}(b; m) = 1$,
(обратно) $\Rightarrow$ (тогда и только тогда)
что возможно лишь когда $3 \vdots m$. $\rightarrow$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Продолжение. Отсюда, $m=1$, $m=3$ или

$m=9$. Значит, $\max(m)=9$.

Покажем, что максимум достигается.

Возьмем $a=1$ и $b=17$. Ясно, что $\frac{a}{b} = \frac{1}{17}$ —

несокр. дроби того, $a+b=18:9=m$ и

$$a^2 - 4ab + b^2 = 289 - 4 \cdot 17 + 1 = 290 - 119 =$$

$$= 171 : 9 = m. \text{ Значит, и числитель,}$$

и знаменатель ~~являются~~ дробь

$$\frac{a+b}{a^2 - 4ab + b^2}$$

делятся на $m=9$, и

максимум $m=9$ достигается.

Ответ.

$$\boxed{m=9}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



откуда $AQ = \sqrt{49 + 289x^2}$ и
 $BQ = \sqrt{49 + 49x^2}$. По теореме
синусов в $\triangle AQB$:

$$\frac{AB}{\sin \angle AQB} = \frac{24x}{\sin \angle AQB} = 2 \cdot 13 = 26,$$

откуда $\sin \angle AQB = \frac{12}{13} x \leq 1$,
и $0 < x \leq \frac{13}{12}$. Заметим.

$QC = 4$, $QC \perp AB$ как радиус

в точку касания, откуда:

$$\begin{aligned} S_{\triangle AQB} &= \frac{QC \cdot AB}{2} = 12 \cdot 4 \cdot x = \\ &= \frac{AQ \cdot QB \cdot \sin \angle AQB}{2} = \\ &= \frac{\frac{12}{13} x \sqrt{49 + 49x^2} \sqrt{49 + 289x^2}}{2}. \end{aligned}$$

Значит,

$$\sqrt{49 + 49x^2} \sqrt{49 + 289x^2} = 182.$$

Очевидно, что $\sqrt{49 + 49x^2}$ имеет

только 1 значение, т.е. наше ~~уравнение~~

только $0 < x \leq \frac{13}{12}$ в наших условиях

только может иметь только 1 значение.

Значит, при наших ~~условиях~~ x наше уравнение $\rightarrow$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Предложение.

имеет ~~только одно~~ ровно 1 решение.

Заметим, что подходит

$0 < x = 1 \leq \frac{13}{12}$. Действительно, при

$$x=1: \sqrt{49+49x^2} \sqrt{49+289x^2} = \sqrt{98} \sqrt{338} = \\ = \sqrt{33124} = 182, \text{ т.е. } x=1 - \text{корень.}$$

Значит, единственное решение

нашего уравнения это $x=1$.

Когда, $AB = 24x = 24$.

Ответ. $\boxed{AB=24}$

→



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N4

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 2x.$$

Решение. ~~итерация~~

Заметим. $1 - 2x = (3x^2 - 6x + 2) - (3x^2 + 3x + 1 + 1).$

Замена: $a := 3x^2 - 6x + 2$, $b := 3x^2 + 3x + 1$.
Тогда $1 - 2x = a - b$.

Отсюда: $\sqrt{a} - \sqrt{b} = a - b$, $a, b \geq 0$.

$$a - b = (\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}) = \sqrt{a} - \sqrt{b}$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b} - 1) = 0.$$

2 случая:

① $\sqrt{a} - \sqrt{b} = 0$. $\Leftrightarrow \sqrt{a} = \sqrt{b}$.

$$\Leftrightarrow a = b, a, b \geq 0. \quad \Leftrightarrow$$

$$a = b, a \geq 0. \quad \Leftrightarrow 3x^2 - 6x + 2 = 3x^2 + 3x + 1,$$
$$3x^2 + 3x + 1 \geq 0. \quad \text{Раскроем}$$

уравнение $3x^2 + 3x + 1 = 0$.

Его дискриминант D равен

$$D = 9 - 3 \cdot 4 = -3 < 0, \quad \text{значит,}$$

$$3x^2 + 3x + 1 > 0 \quad \text{при всех } x \in \mathbb{R}. \quad \rightarrow$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Продолжение.

отсюда $3x^2 + 3x + 1 = 3x^2 - 6x + 2$,

и отсюда $9x$ не равно 0, ибо $\forall x \in \mathbb{R}$

$3x^2 + 3x + 1 > 0$. Значит, $9x = 1$,

откуда $\boxed{x = \frac{1}{9}}$

② $\sqrt{a} + \sqrt{b} - 1 = 0$, т.е.

$\sqrt{a} + \sqrt{b} = 1, a, b \geq 0. \Leftrightarrow$

$a + 2\sqrt{a}\sqrt{b} + b = 1, a, b \geq 0. \Leftrightarrow$

$3x^2 - 6x + 2 + 2\sqrt{3x^2 - 6x + 2}\sqrt{3x^2 + 3x + 1} +$

$+ 3x^2 + 3x + 1 = 6x^2 - 3x + 3 +$

$+ 2\sqrt{a}\sqrt{b} = 1, a, b \geq 0.$

отсюда $2\sqrt{a}\sqrt{b} = 1 - 6x^2 + 3x - 3 \geq 0$.

Таким образом уравнение $6x^2 - 3x + 3 = 1$.

$\Leftrightarrow 6x^2 - 3x + 2 = 0$. Его дискриминант

равен $D = 9 - 6 \cdot 2 \cdot 4 = 9 - 48 = -39 < 0$,

значит, $6x^2 - 3x + 3 > 1$ при всех

$x \in \mathbb{R}$. Это значит (ваше решение) $\rightarrow$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

что $1 - 6x^2 + 3x - 3 = 2\sqrt{a}\sqrt{b} \geq 0,$

откуда $1 - 6x^2 + 3x + 3 > 1.$ Но

это невозможно $\Leftrightarrow x \in \emptyset.$

Значит, в этом случае

нет решений.

Положим $x = \frac{1}{9}.$

ответ.

$$\boxed{x = \frac{1}{9}}$$





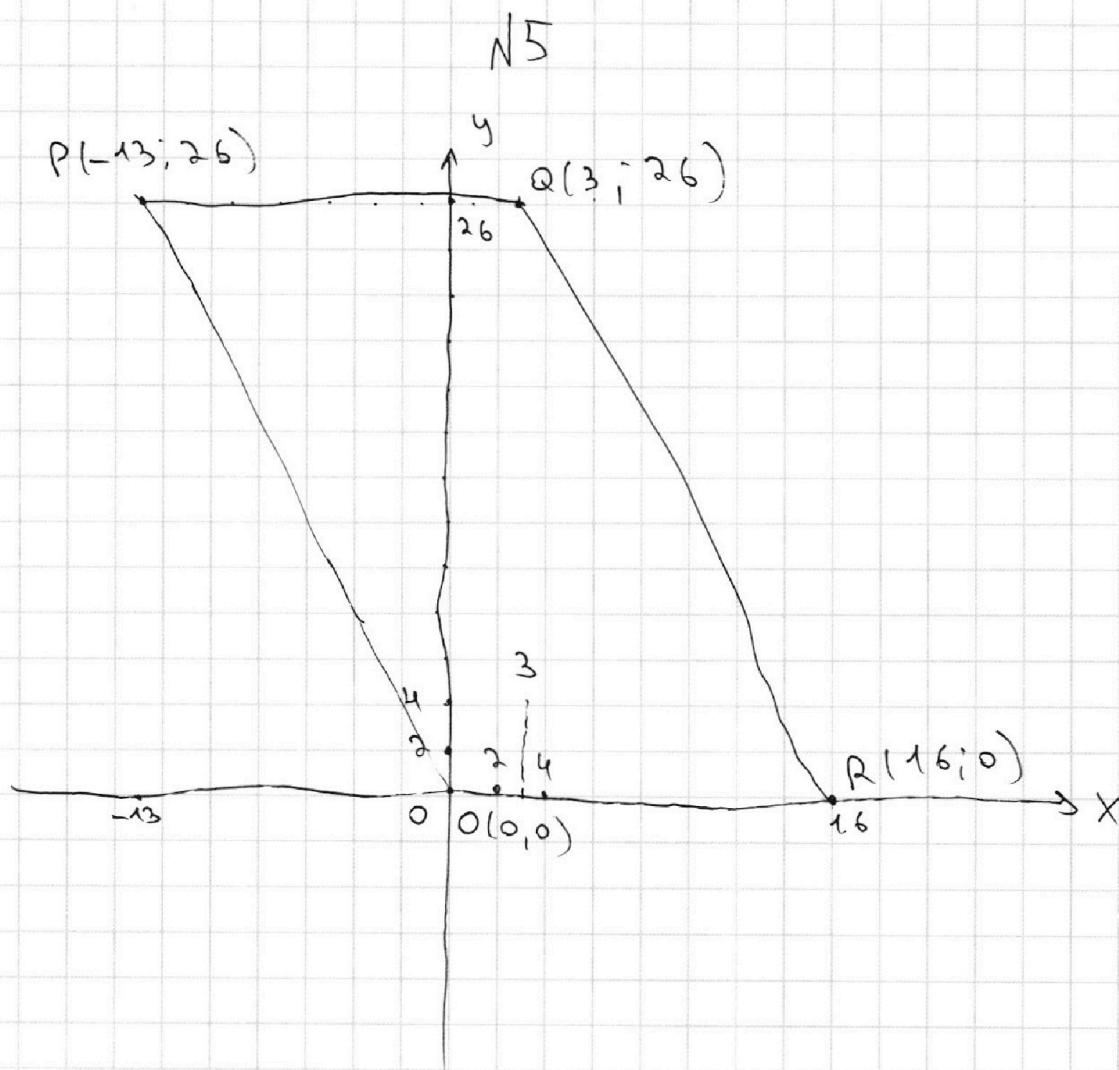
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Решение. ОР задается ур-нем

~~или~~ $y=0$; PQ — ур-нем $y=26$,

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N 6

Найти все a , при котор. $\exists b$: сист. имеет

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

ровно 2 реш.

Решение. Первое уравнение: $y = -ax + 8b$

~~прямая~~ - прямая вида $y = kx + c$.

Второе нер-во:

$x^2 + y^2 = 1$ - окр-ть w_1 (центром $O_1(0; 0)$)

радиуса $R_1 = 1$; $x^2 + (y - 12)^2 = 16$ - окр-ть

w_2 (центром $O_2(0; 12)$) радиуса $R_2 = 4$.

Изно, что w_1 и w_2 не имеют общих

точек. Очевидно, что второе неравенство

~~выполняется~~ выполняется:

- На границах окр-тей ~~выполняется~~ w_1 и w_2 .
- Внутрь окр-тей w_1 и w_2 .

Нарисуем графики:

→

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

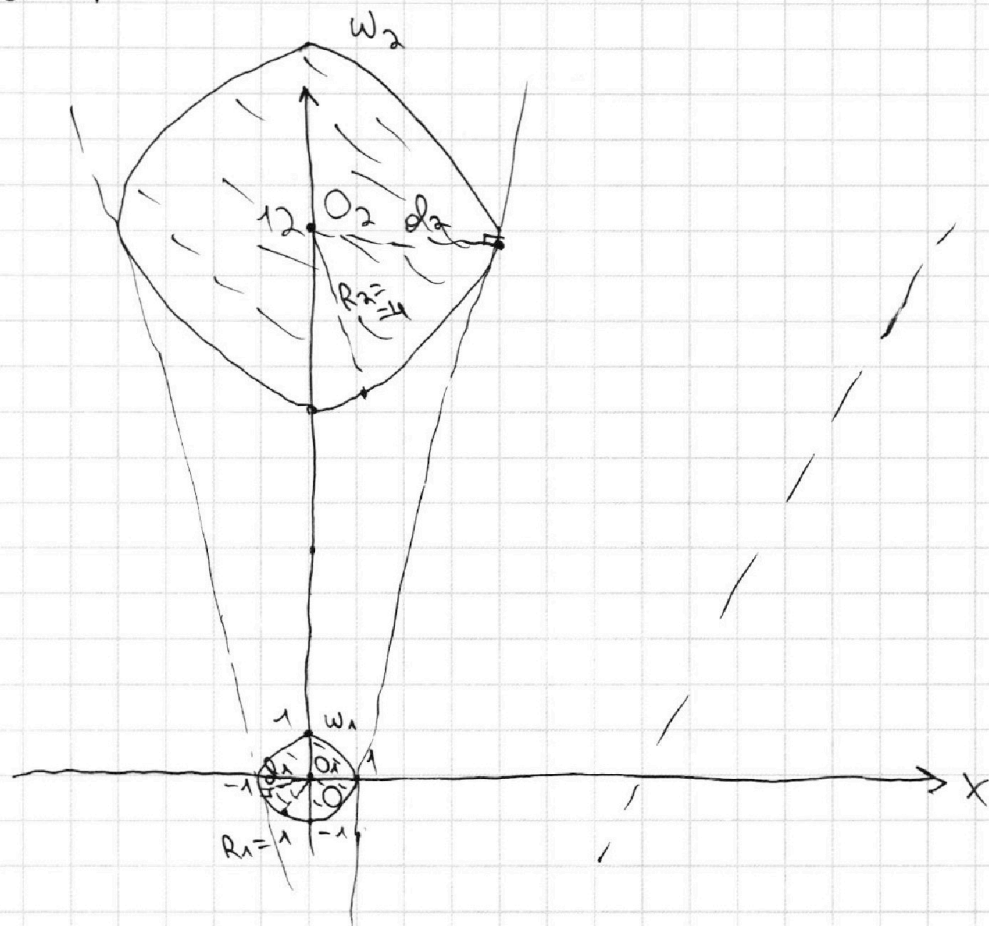
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Продолжение.



Очевидно, что ~~на~~ равно два решения
будет $\Leftrightarrow$ ρ касается W_1 и W_2 .

Почему? Если ρ внешне пересек. одну из
окр-тей W_1 и W_2 , то ясно, что будет ∞
реш., значит, она может либо касаться,
либо не иметь общих точек (каждая
из окр-тей W_1 и W_2 . По т.к. окр-ти
две и решения два, то ясно, что $\rightarrow$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

прямая ℓ касается именно касательных
двух окружностей. Знаю, что w_1 и w_2
имеют 4 ^{общие} касательных $\Rightarrow y$ ^(соеб.) как

и значения a . Значит их.

План решения. Расстояние d от точки (x_0, y_0)

до прямой $ax+by+c=0$ равно

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

т.к. ℓ касается

w_1 и w_2 , то для d_1 и d_2 - расстояния

- от O_1 и O_2 до ℓ соответственно,

то $d_1 = R_1$ и $d_2 = R_2$. Знаю:

$$\begin{cases} d_1 = \frac{18b}{\sqrt{a^2+1}} = R_1 = 1 \\ d_2 = \frac{18b+12}{\sqrt{a^2+1}} = R_2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 18b = \sqrt{a^2+1} \\ 18b+12 = 4\sqrt{a^2+1} \end{cases}$$

~~Знаю~~ Знаю. 3 случая:

① $b \geq 0$. Тогда $8b = \sqrt{a^2+1}$ и $12+8b = 4\sqrt{a^2+1}$, откуда $12+8b = 12+\sqrt{a^2+1} = 4\sqrt{a^2+1}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{a^2+1} = 4 \Leftrightarrow a^2+1=16 \Leftrightarrow a = \pm\sqrt{15}$$

$$\text{и тогда } b = \frac{1}{8}\sqrt{a^2+1} \quad (b = \frac{1}{8} \geq 0) \rightarrow$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Продолжение.

$$(2) \quad -\frac{3}{2} \leq b \leq 0. \quad \text{и тогда}$$

$$-8b = \sqrt{a^2 + 1} \quad \text{и} \quad 12 + 8b = 4\sqrt{a^2 + 1}, \quad \text{откуда}$$

$$8b = -\sqrt{a^2 + 1} \quad \text{и} \quad 12 = 5\sqrt{a^2 + 1}, \quad \text{а значит}$$
$$a^2 + 1 = \frac{144}{25} \quad \Leftrightarrow \quad a^2 = \frac{119}{25} \quad \Leftrightarrow \quad a = \pm \frac{\sqrt{119}}{5}.$$

$$(\text{и тогда} \quad -\frac{3}{2} \leq b = -\frac{3}{10} \leq 0)$$

$$(3) \quad b \leq -\frac{3}{2}. \quad \text{и тогда} \quad -8b = \sqrt{a^2 + 1}$$

$$\text{и} \quad -12 - 8b = 4\sqrt{a^2 + 1}, \quad \text{откуда}$$

$$12 = -3\sqrt{a^2 + 1} \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{a^2 + 1} = -4.$$

$$\sqrt{a^2 + 1} \geq 0, \quad \text{но} \quad -4 \leq 0. \quad \text{и следовательно,}$$

$$0 \leq \sqrt{a^2 + 1} = -4 < 0, \quad \text{что невозможно}$$

$$\Leftrightarrow a \in \emptyset. \quad \text{Значит,} \quad a = \pm \sqrt{15}$$

$$\text{и} \quad a = \pm \frac{\sqrt{119}}{5}.$$

Ответ.

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{при} \\ a = \sqrt{15}; -\sqrt{15}; \frac{\sqrt{119}}{5}; -\frac{\sqrt{119}}{5} \end{array}}$$

→

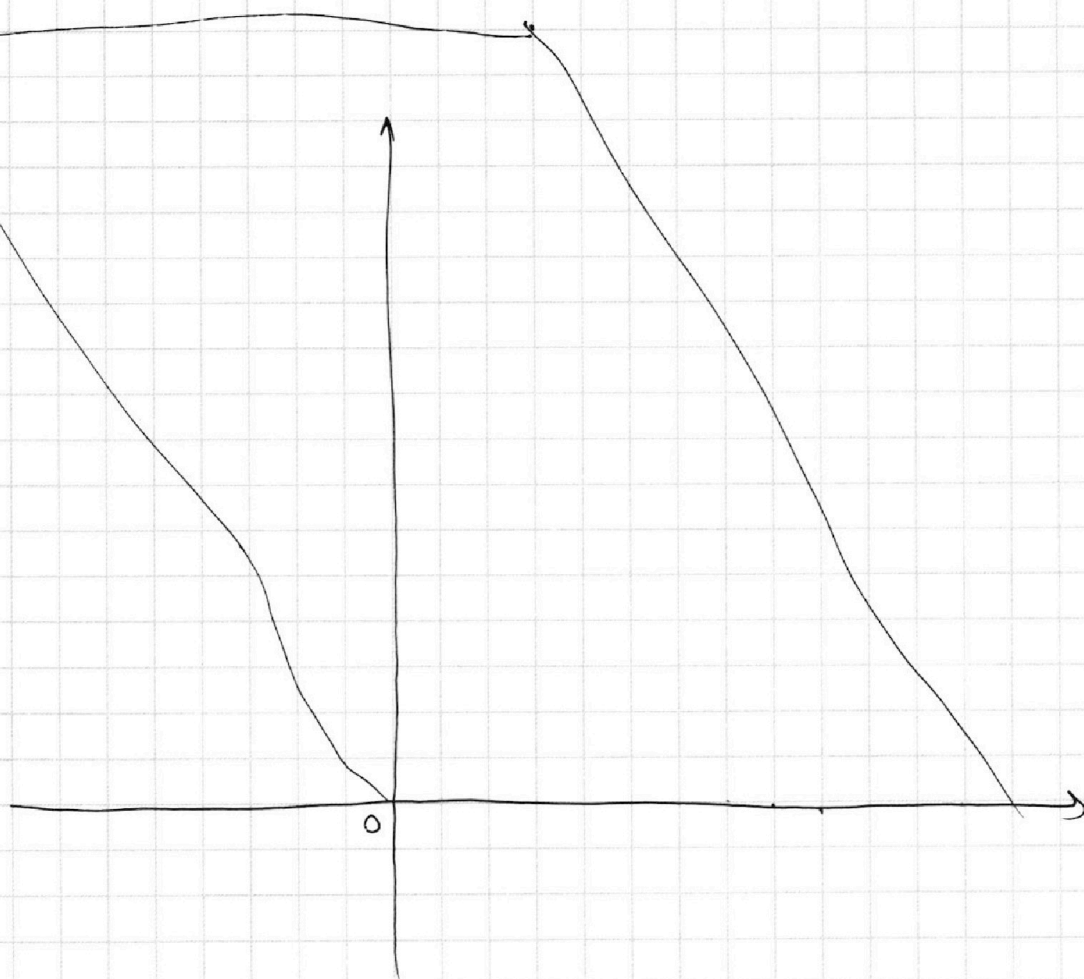


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



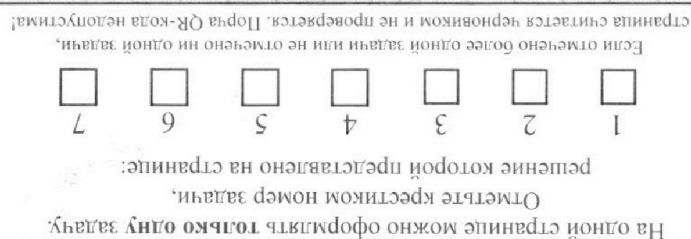
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



αKX .

$$K \cdot -13 = 26$$

$$K = -2.$$



ИГФИ

□ □ □ □ □ □ □
7 6 5 4 3 2 1

7

9

□

□
3

2

I

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2}$$

$$-\sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 2x$$

$$\frac{e^{2\pi i \alpha} - 1}{2\pi i \alpha}$$

$$-T_{12} \cdot T_2 - \gamma + 68^\circ$$

54. 52-052-

W: 200-1201

4. 806

$$(a, m) = (a', m') = 1$$

W. 205

46:6

• 5-44

$$n=9, S=0$$

$$+ r_1 \cdot h_1 - r_2 \cdot h_2$$

1. 2024

$$r_{\text{r.gh}} - \sigma_{\text{w}} r =$$

$$-9r + n \cdot 5 \cdot \frac{1}{2} - 5e$$

$$= \frac{1}{2} \ln \frac{1}{1 - r^2} = -\frac{1}{2} \ln(1 - r^2)$$

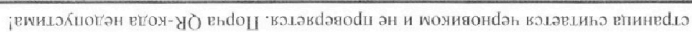
66 - 201-12

$$0 \leq v_{\mu} = g \quad \text{for } \mu \in \text{int}(V) = \emptyset$$

$$0.8e - 0.6nh = 0.07h - 0.6nh = 0.07 \cdot 2.0 \cdot 2 - 0.6 \cdot 1 + 0.02h$$

$\begin{array}{r} 9 \\ 11 \\ 2 \\ + \\ 2 \\ \times \\ - \\ 2 \\ \times \\ 6 \end{array}$

$$6 \times 2 \times 3 \times 13 =$$



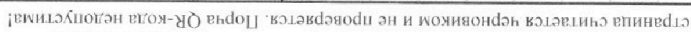
Отметьте крестиком номер задания, решение которой представлено на странице:

□ □ □ □ □ □ □
7 6 5 4 3 2 1

Если отмечено более одной задачей или не отмечено ни одной задачи,

странния считается черновиком и не проверяется. Поша QR-кода недоступна!





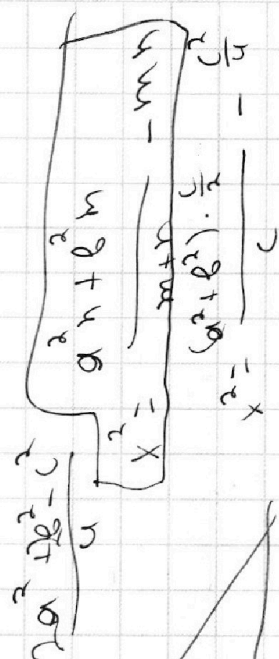
Если отмечено более одной задачи или ни одной задачи, то отмечено ни одной задачи,

□ □ □ □ □ □ □
7 6 5 4 3 2 1

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

На одной странице можно оформить только одну задачу.

ИТФМ



$$\sqrt{527} = 23$$

$$\begin{aligned} r_{T_2} &= 9 \text{ V} \\ r_{T_2} &= 9 \text{ V} \end{aligned}$$

$$r + 10 = 28$$

$$\underbrace{v + e^{10} v}_n = 28 + 2v$$

$$\underbrace{v + w}_e = 1881$$

$$\underbrace{r_{\text{top}}}_f = (98 + 2)$$

$$\frac{1000}{100 + 20}$$

$$r = \frac{r_{\text{vib}}}{128} = r_p$$

$$\frac{2a^2 + a}{a + 2} \cdot \frac{1}{2}$$

1720

$$188 + 2v \cdot v + 0 \cdot w$$

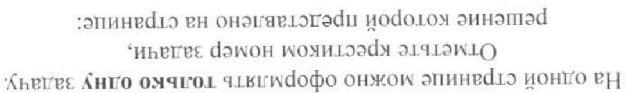
$$0 = 88 + 4 + x \cdot w$$

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}$$

$$98 + 10 = 6$$

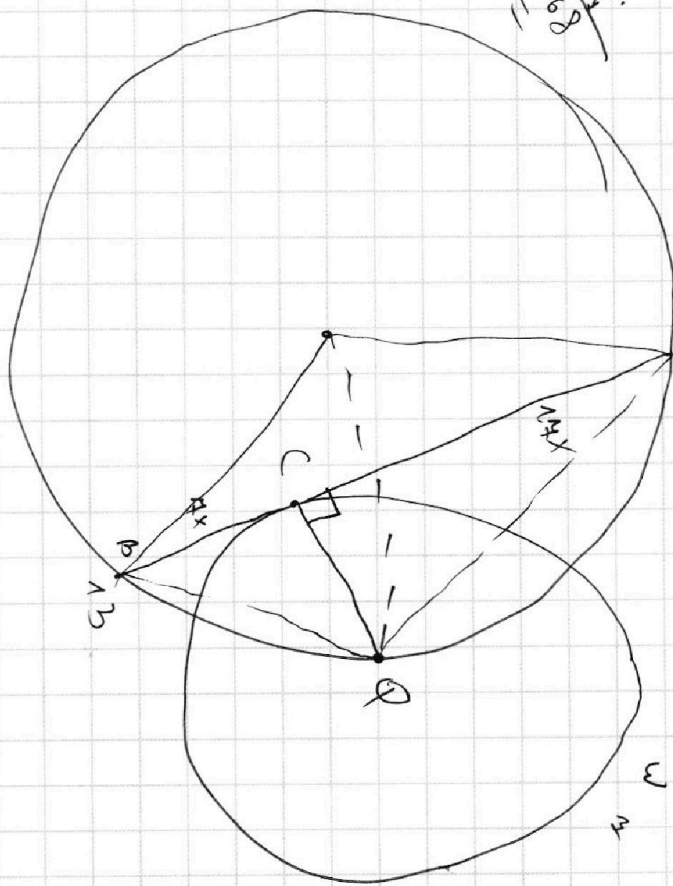
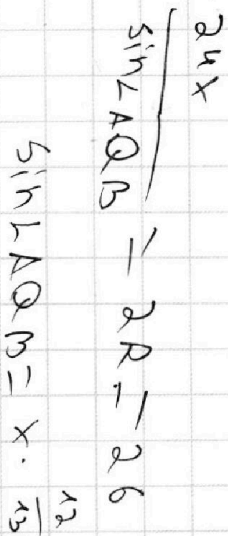
9.9.20

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}$$



□ □ □ □ □ □ □
7 6 5 4 3 2 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



12/22

$$A = \frac{\sqrt{49+289x^2}}{\sqrt{49+49x^2}}$$

$$\begin{array}{r} 2.24.13 \\ 14.13 \\ \hline 22 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 26 \\ 26 \end{array}$$

Handwritten notes on lined paper, including a large '2' and some scribbles.

20
21
22
23
24
25
26
27
28
29
30
31
32
33
34
35
36
37
38
39
40
41
42
43
44
45
46
47
48
49
50
51
52
53
54
55
56
57
58
59
60
61
62
63
64
65
66
67
68
69
70
71
72
73
74
75
76
77
78
79
80
81
82
83
84
85
86
87
88
89
90
91
92
93
94
95
96
97
98
99
100

$$-65 + 68x + 6x^2 - 11$$

1
2

$$\begin{array}{r} \text{222} \\ \times 800 \\ \hline 1776 \\ 17760 \\ 177600 \\ \hline 177600 \end{array}$$

cos LAG 20

11
14
217
x

$$\begin{array}{r} 593 \\ 282 \overline{) 17154} \\ \underline{1136} \\ 5794 \\ \underline{564} \\ 154 \end{array}$$

س	۶
س	۵
س	۴
س	۳
س	۲
س	۱

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☒	☒	☒	☒	☒	☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



№1
 $a, b, c \in \mathbb{N}$, $ab: 2^{15} 7^{11}$, $bc: 2^{14} 7^{18}$, $ac: 2^{23} 7^{39}$.

$\min(ab, bc, ac) = ?$

Решение. Пусть $t := \min(ab, bc, ac)$. Перенесем

числа ab, bc и ac . Получим

$ab \cdot bc \cdot ac = a^2 b^2 c^2 = (abc)^2 = t^2$. Из

условия, $ab: 2^{15} 7^{11}$, $bc: 2^{14} 7^{18}$, $ac: 2^{23} 7^{39}$,

откуда $t: 2^{45} 7^{68}$. Заметим,

что раз t^2 — квадрат натур. числа $t \in \mathbb{N}$,

$t^2: 2^{90}$ и 90 — четное, то $t^2: 2^{46}$, так

как простые числа могут входить в

квадраты натур. чисел только в четных

степенях. Значит, $t^2: 2^{46} 7^{68}$.

$x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 24}}{6} = \frac{6 \pm \sqrt{12}}{6}$

$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 1}}{2}$

$3x^2 - 6x + 2 = 3x^2 + 3x + 1 + 2(1 - 2x)\sqrt{3x^2 + 5x + 1}$

$12 = -3\sqrt{3x^2 + 5x + 1} + 1 + 81x^2 - 18x$

$12 + 8 = -4\sqrt{3x^2 + 5x + 1}$

$\frac{3}{10}$

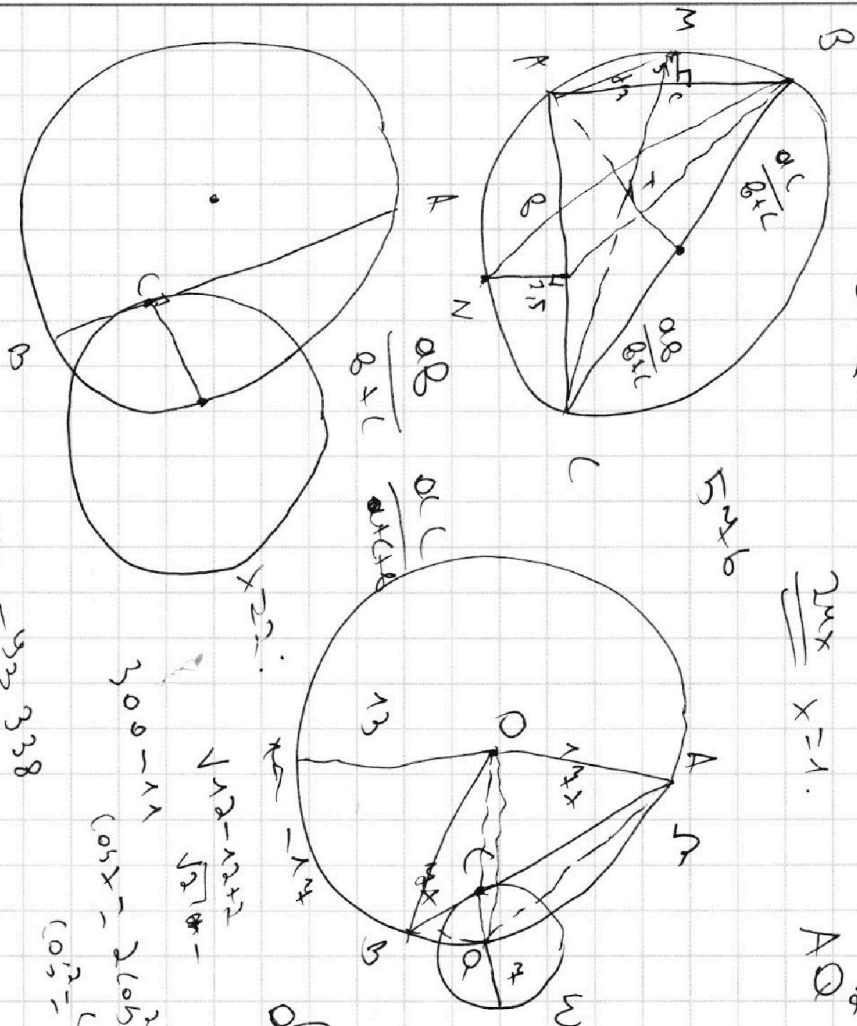
$\frac{12}{40} = \frac{3}{10}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



5(49)

10(49)

5(49)

-1

$$\frac{2x}{x} = 1.$$

AO

$$13 + 6 + 2$$

$$- \sqrt{3-3}$$

$$49x^2 - 2 \cdot 169 - 2 \cdot 169 \cdot \cos \angle BOA$$

$$\cos \angle BOA = 49 + 49x^2$$

$$49x^2 = BO^2 - 49$$

$$BO^2 = 49 + 49x^2$$

$$BO = 7\sqrt{1+x^2}$$

$$AO^2 = 49 + 289x^2$$

$$\angle BOA = -14x \cdot 14x =$$

$$OL^2 = R^2 - 15^2 =$$

$$\cos x = \frac{2 \cos^2 x - 1}{\cos x} = \frac{OL^2 - 169}{169 - 149x^2}$$

$$OL^2 = 169 - 149x^2$$

$$2x \cdot 1 - 2x \cdot 1 = -2x \cdot 338 - 338$$

$$\cos \angle BOA = \cos \angle BOA$$

$$\cos \angle BOA = 1 - \frac{49 + 49x^2}{2 \cdot 169}$$

$$\frac{\cos \angle BOA}{\cos \angle BOA} = \frac{3x^2 - 14x + 1}{\frac{289 - 49x^2}{338}}$$

$$\sqrt{12 + 12x^2}$$