



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



1. [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.
4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-12;24)$, $Q(3;24)$ и $R(15;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$.
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 4,5 и 2.



На одной странице можно оформить **ТОЛЬКО ОДНУ** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1
- 2
- 3
- 4
- 5
- 6
- 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 2x$$

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 2x + \sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1}$$

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 2x + \sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1}$$

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} = 2 - 2x + \sqrt{2x^2 - 5x + 3}$$

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 - 5x + 3} = 2 - 2x + \sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 - 5x + 3}$$

$$0 = 2 - 2x + \sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 - 5x + 3}$$

$$0 = 2 - 2x + \sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 - 5x + 3}$$

$$0 = 2 - 2x + \sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 - 5x + 3}$$

$$0 = 2 - 2x + \sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 - 5x + 3}$$

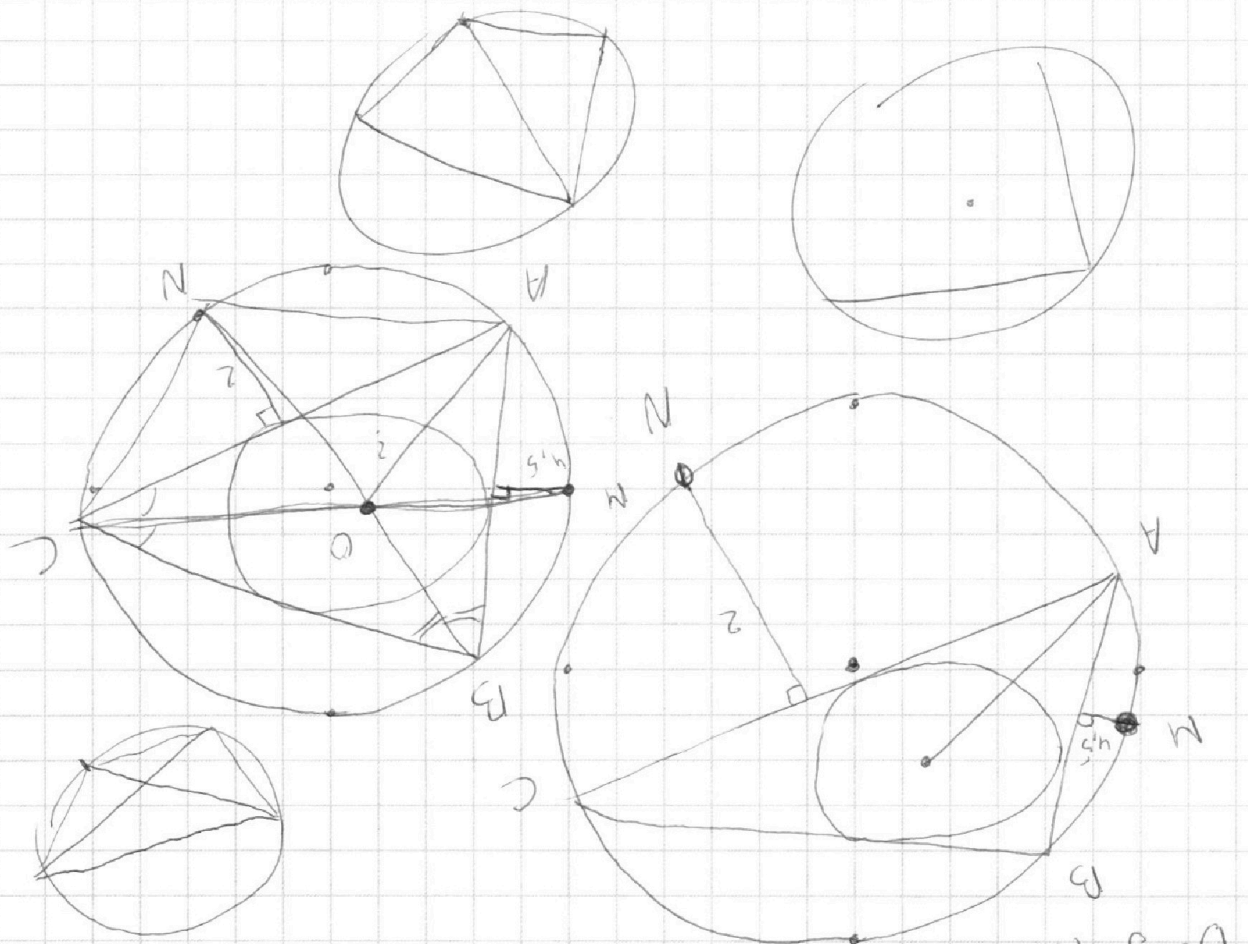
$$2 - 2x = (\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1})$$

$$\frac{BC}{\sin \alpha} = 2R$$

$$y = a + 10b \quad BC = 2R \sin \alpha$$

$$D = 9 - 12 - 4 = -7$$

$$x = \frac{2}{3}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



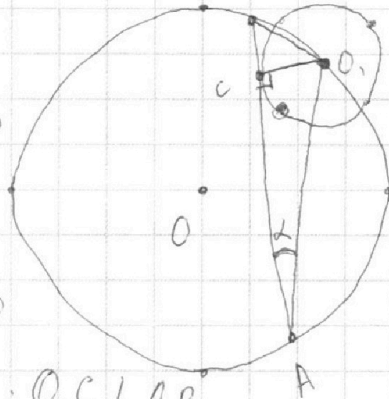
№3 Дано: $AC:CB = 7:1$; $r_\omega = 1$, $r_\Omega = 5$ $AB = ?$

Решение:

1) Пусть O - центр Ω , а O_1 - центр окружности ω ;

AB - касательная ω в точке C , то по

теореме о радиусе и касательной: $O_1C \perp AB$



2) Рассм. $\triangle ABO_1$: O_1B - диаметр Ω , то по теореме о вписанном угле:

$$\frac{O_1B}{\sin \angle BAO_1} = 2r_\Omega = 10, \text{ где } \angle BAO_1 = \alpha, \text{ то т.к.}$$

$$\triangle AOC - \text{н.т.р.} (O_1C \perp AB), \text{ то } \sin \alpha = \sin \angle BAO_1 = \frac{CO_1}{AO_1} = \frac{1}{AO_1},$$

$$\text{то } \frac{O_1B}{\sin \angle BAO_1} = O_1B \cdot AO_1 = 2r_\Omega = 10 \Rightarrow \underline{O_1B \cdot AO_1 = 10}$$

3) Рассм. $\triangle AOC$ и $\triangle BCO_1$. По теореме Пифагора:

$$AO_1^2 = CO_1^2 + AC^2 = 1 + AC^2 \quad (1) \quad AC:CB = 7:1, \quad AC = 7BC$$

$$BO_1^2 = O_1C^2 + BC^2 = 1 + BC^2 \quad (2) \quad \text{Дуга } BC \text{ а, то } AC = 7BC$$

$$\text{Умножим (1) на (2): } AO_1^2 \cdot BO_1^2 = (49BC^2 + 1)(BC^2 + 1), \text{ или:}$$

$$100 = 49BC^4 + 49BC^2 + BC^2 + 1 \quad 4) \text{ Г.о. } BC^2 = \frac{-25 \pm 49}{49} = 1 (BC = -1, \text{ не}$$

$$49BC^4 + 50BC^2 - 99 = 0 \quad (\text{находим корни уравнения}) \quad \underline{BC = 1}$$

$$D = 2500 + 99 \cdot 49 = 625 + 4851 = 5476 \quad \text{то } \underline{AB = 8BC = 8}$$

$$BC^2 = \frac{-25 \pm \sqrt{5476}}{49}, \quad (BC^2 = \frac{-25 - \sqrt{5476}}{49} \text{ не подходит по смыслу уравнения}) \quad \text{Ответ: } \underline{AB = 8}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



54) $\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x$; • Умно: $2x^2 + 2x + 1 \geq 0$

1) $2x^2 - 5x + 3 \geq 0$

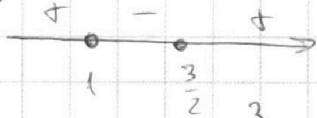
2) $2x^2 + 2x + 1 \geq 0$

$2x^2 - 5x + 3 \geq 0$

$(x-1)(x-\frac{3}{2}) \cdot 2 \geq 0$

$D < 0, a > 0, \Rightarrow$

• $4x^2 - 3x + 3 \leq 0$



$\Rightarrow x \in \mathbb{R}$

$(D < 0, a > 0), x \in \emptyset$

$x \in (-\infty; 1] \cup [\frac{3}{2}; +\infty)$ *

3) Домножим на сопряженное: $\frac{(\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1})(\sqrt{2x^2 + 2x + 1} + \sqrt{2x^2 - 5x + 3})}{\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1}}$

$= 2 - 7x$;

Умно: $\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = (2 - 7x)(\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1})$

$2x^2 - 5x + 3 - 2x^2 - 2x - 1 = (2 - 7x)(\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1})$

$2 - 7x = (2 - 7x)(\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1})$

При $x = \frac{2}{7}$, $0 = 0$ (Верно)

При $x \neq \frac{2}{7}$, сократим на $(2 - 7x)$: $1 = \sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1}$

4) Обе части ≥ 0 , то возведем в квадрат:

$1 = \sqrt{2x^2 - 5x + 3} + 2\sqrt{(2x^2 - 5x + 3)(2x^2 + 2x + 1)} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1}$

$1 = 2x^2 - 5x + 3 + 2x^2 + 2x + 1 + 2\sqrt{(2x^2 - 5x + 3)(2x^2 + 2x + 1)}$

$1 = 4x^2 - 3x + 4 + 2\sqrt{(2x^2 - 5x + 3)(2x^2 + 2x + 1)}$

$-4x^2 + 3x - 3 = 2\sqrt{(2x^2 - 5x + 3)(2x^2 + 2x + 1)}$

$$\begin{cases} -4x^2 + 3x - 3 \geq 0 \\ 4(2x^2 - 5x + 3)(2x^2 + 2x + 1) = (-4x^2 + 3x - 3)^2 \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

(N6)
$$\begin{cases} y = ax + 10b & (1) \\ ((x+8)^2 + (y^2) - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 & (2) \end{cases}$$

1) $y = ax + 10b$ - уравнение прямой

2) $((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (x+8)^2 + y^2 - 1 \geq 0 & (2.1) \\ x^2 + y^2 - 4 \leq 0 \end{cases}$

2.1) $(x+8)^2 + y^2 \geq 1 \Leftrightarrow (x+8)^2 + y^2 - 1 \leq 0$ (2.2)

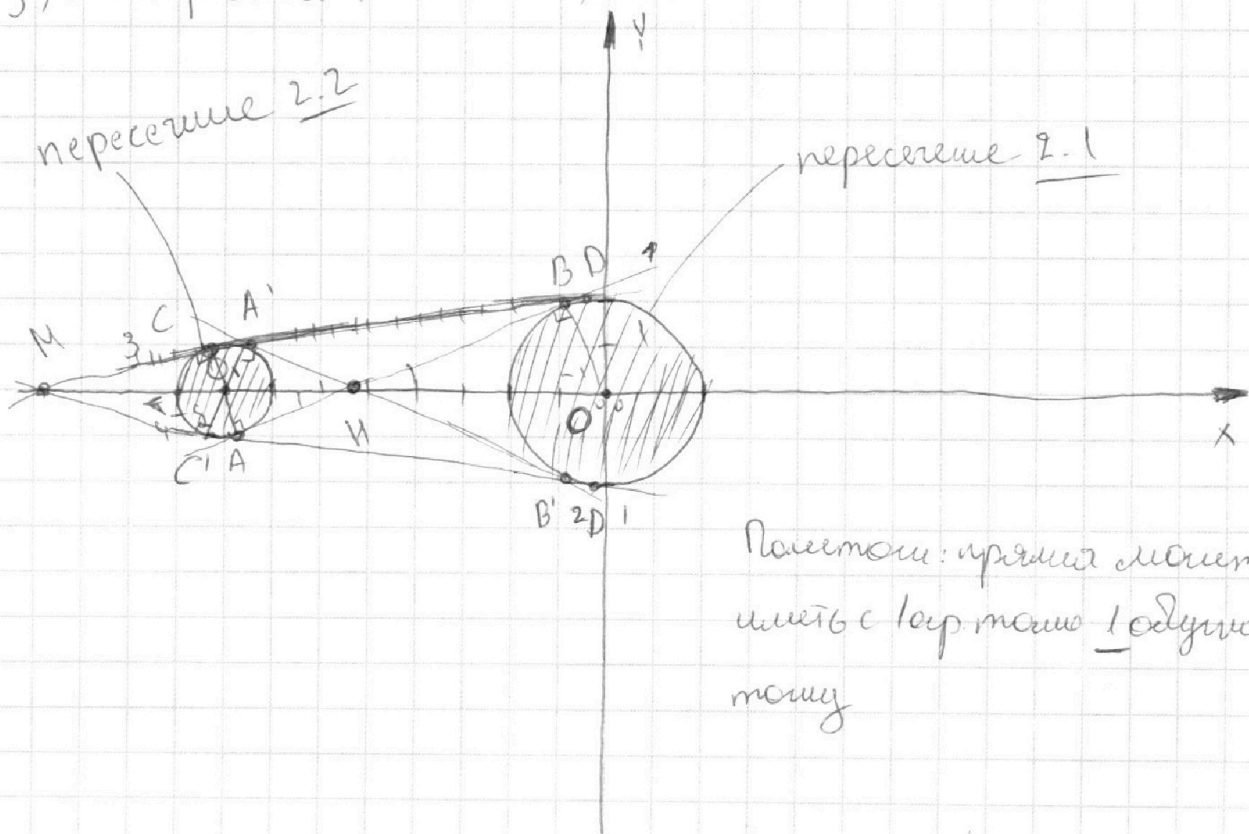
- уравнение окружности с центром $(-8, 0)$

и радиусом 1

$x^2 + y^2 = 4$ - уравнение окружности с центром $(0, 0)$ и радиусом 2

2.2) То же самое

3) Построим (2.1) и (2.2) в ДПСи $xO'y$:



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№0 (продолжение)

т.е. ~~будет~~ ^{система} будут иметь решения в том случае, если прямая

$y = ax + b$ будет проходить \neq 2 точки данных окружностей

4) Расшифруем неизвестную \perp : $\Delta OAB \sim \Delta O, KA$ (по 2 углам)

то: $\frac{OA}{OB} = \frac{OK}{OA} = \frac{1}{2}$ (по условию) $\Rightarrow \begin{cases} OK = 20,4 \\ OK + OA = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} OK = 20,4 \\ 30,4 = 8 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} OK = 20,4 \\ OA = \frac{8}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} OK = \frac{16}{3} \\ OA = \frac{8}{3} \end{cases}$, то ΔOAB и $\Delta O, KA$ - подобные

то по м. Пифагора: $AB = \sqrt{\frac{259}{9} - 4}$

$= \sqrt{\frac{259 - 36}{9}} = \sqrt{\frac{220}{9}} = \frac{2\sqrt{55}}{3}$; $AK = \sqrt{\frac{64}{9} - 1} = \sqrt{\frac{55}{9}} = \frac{\sqrt{55}}{3}$

Пусть $B(x_B; y_B)$, то: $\begin{cases} (x_B)^2 + y_B^2 = 4 & (1) \\ \frac{220}{9} = (x_B + \frac{16}{3})^2 + y_B^2 & (2) \end{cases}$

Вычтем из (1) - (2):

$x_B + y_B - x_B + \frac{32}{3} + y_B - \frac{256}{9} + y_B^2 = 4 - \frac{220}{9}$
 $\frac{32}{3}x_B - \frac{256}{9} = 4 - \frac{220}{9}$

$\frac{32}{3}x_B = \frac{259 + 36 - 220}{9} = \frac{75}{9} = 25$

$\Rightarrow x_B = \frac{25}{32}$; то: $y_B^2 = 4 - \frac{625}{1024} \Rightarrow y_B = \frac{\sqrt{3481}}{32}$

5) Пусть $A(x_A; y_A)$

$\begin{cases} (x_A + 5)^2 + y_A^2 = 1 \\ (x_A - \frac{16}{3})^2 + y_A^2 = \frac{55}{9} \end{cases}$

Вычтем: $-\frac{32}{3}x_A + \frac{250}{9} =$

$-\frac{16}{3}x_A = \frac{55}{9} - 1$

$\frac{32}{3}x_A + 16x_A = \frac{259}{9} - \frac{55}{9} + 1$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



~~№6 (предложение):~~

~~$32+48 \cdot \pi = \frac{204+9}{9} = \frac{213}{9}$~~

~~$10 \cdot \pi = \frac{213}{3} \Rightarrow \pi = \frac{71}{10}$~~

~~то $y_A = 1 - \left(\frac{21}{10} + 8\right)^2$~~

~~$y_A = \frac{(32+48) \cdot \pi}{9} = \frac{204+9}{9} = \frac{213}{9}$~~

~~$x_A = \frac{71}{10}, y_A = 1 - \left(\frac{71+80}{10}\right)^2$~~

6) Точки A и A' будут иметь одинаковые координаты по x и противоположные по y, симметричные B и B'

То: $B\left(\frac{25}{32}; \frac{\sqrt{3471}}{32}\right); B'\left(\frac{25}{32}; -\frac{\sqrt{3471}}{32}\right)$, с точкой A

Затем мы просто подставляем координаты в $y = 10x + 106$

ищем a и b

7) Длинна стороны BC и $C'D$, $\triangle MOC, C \sim \triangle MOD$

$\Rightarrow \frac{MO_1}{MO} = \frac{1}{2}$, где $MO_1 = MF + 1$
 $MO = MF + 9$

$(MF + 1)^2 = MF + 9$

$2MF + 2 = MF + 9$

$MF = 7$, то $M(-16; 0) = \sqrt{63}$; то $MD = 2\sqrt{63}$

Для точки C: $\Rightarrow MC = CD = 2\sqrt{63}$

$(x_C + 16)^2 + y_C^2 = 63$

$(x_C)^2 + y_C^2 = 4$

$(x_D + 16)^2 + y_D^2 = 4 \cdot 63$

$(x_D)^2 + y_D^2 = 4$

Ищем координаты точек C и D, затем подставляем в уравнение $y = ax + 106$

ищем a и b - получим значения a

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

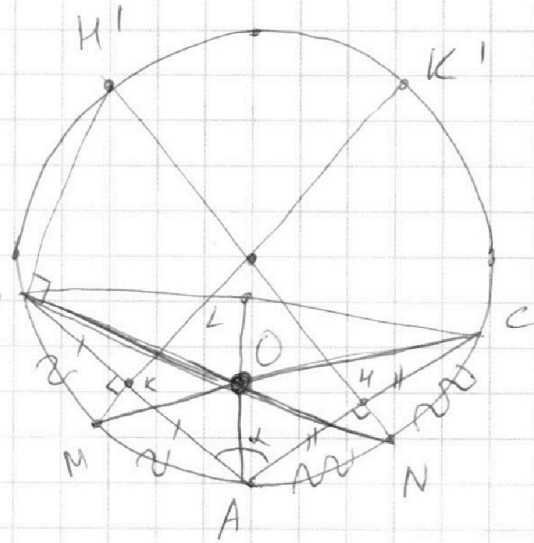
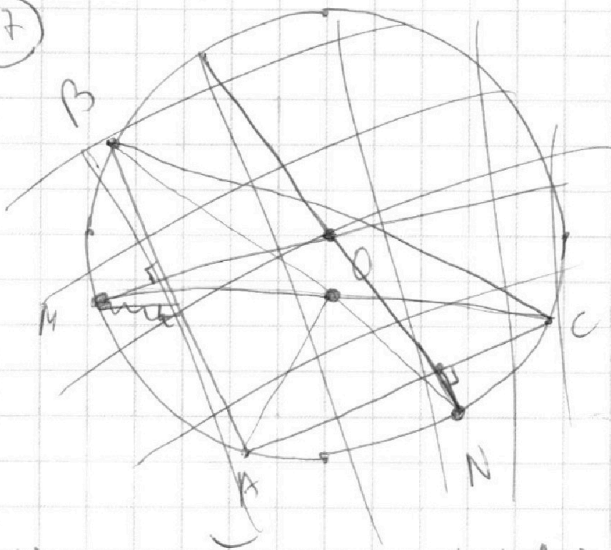
1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



27



1) N -серуши AC , т.е. $NK \perp AC$, то по теореме N -серуши AC автоматически N -серуши AB ; CM -бисектриса $\angle C$ (т.е. M -серуши AB) автоматически BN -бисектриса $\angle B$, то $\angle CM \cap BN = O$, O -центр вкл. Опр., т.е. AO -?

2) $NK \cap AC = K$, то $NK \cdot KK' = AK \cdot KC$, $2 \cdot (2R - 2) = (\frac{1}{2} AC)^2$
 $4R - 4 = \frac{AC^2}{4}$; $16R - 16 = AC^2$, то: $AC = 4\sqrt{R-1}$;

Аналогично: $4,5 \cdot (2R - 4,5) = (\frac{1}{2} AB)^2$

$$9R - \frac{81}{4} = \frac{AB^2}{4}$$

$$36R - 81 = AB^2 \Rightarrow AB = 3\sqrt{4R-9}$$

3) $AO = \frac{2}{3} AL$, где AL -бисектриса $\angle A$; Пусть $\angle A = \alpha$, то по т. косинусов:

$$BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2AC \cdot AB \cdot \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{36R - 81 + 16R - 16 - BC^2}{2 \cdot 4\sqrt{R-1} \cdot 3\sqrt{4R-9}}$$

$$\sqrt{0}: AL = \frac{2AC \cdot BA \cdot \cos \frac{\alpha}{2}}{a+b} =$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№1) $ab: 2^{14} \cdot 7^{10}$, $bc: 2^{12} \cdot 7^{17}$, $ac: 2^{20} \cdot 7^{37}$; a, b, c — числа? — ?

Решение:

$$\frac{a+b}{(a-b)^2 - 4ab}$$

1) Если a, b, c — простые, то $a, b, c = 2^{14} \cdot 7^{10}$ (1)

2) Попробуем (2) и (3):

bc — числа = $2^{17} \cdot 7^{17}$ (2)

ac — числа = $2^{20} \cdot 7^{37}$ (3)

$$\frac{bc}{ac} = \frac{2^{17} \cdot 7^{17}}{2^{20} \cdot 7^{37}} = \frac{1}{2^3 \cdot 7^{20}}$$

то: $b = \frac{a}{2^3 \cdot 7^{20}} \Rightarrow a = 2^3 \cdot 7^{20} \cdot b$ то: $ab = 2^{14} \cdot 7^{10} = b \cdot 2^3 \cdot 7^{20}$

$b^2 = \frac{2^{11}}{7^{10}}$

$ab = k \cdot 2^{14} \cdot 7^{10}$

$c = \frac{2^9 \cdot 7^{30} \cdot 2^3 \cdot 7^7}{1 \cdot 2^{12} \cdot 7^{32}}$

$bc = m \cdot 2^{12} \cdot 7^{17}$

$\frac{a}{c} = \frac{k \cdot 7}{m \cdot 2^3 \cdot 7^7} \Rightarrow c = \frac{a \cdot m}{k} \cdot 2^3 \cdot 7^7$

$ac = p \cdot 2^{20} \cdot 7^{37}$

$ac = p \cdot 2^{20} \cdot 7^{37}$

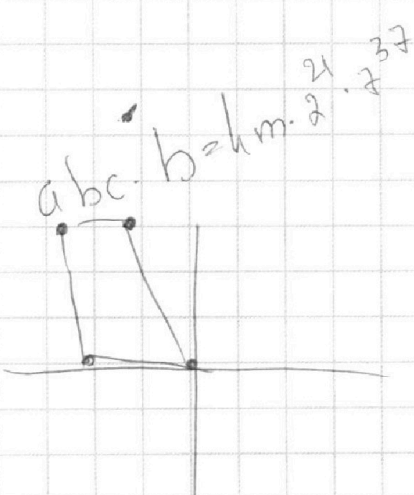
$m \Rightarrow 30$
 $k = 1$
 $p = 2$

$a \cdot \frac{m}{k} \cdot 2^3 \cdot 7^7 = p \cdot 2^{20} \cdot 7^{37}$

$a = \frac{k \cdot p}{m} \cdot 2^{17} \cdot 7^{30} = \frac{k \cdot p \cdot 2^{12} \cdot 7^{30}}{m}$

$a = 2^{15} \cdot 7^{30}$ $a = 2^9$

$a = \frac{1 \cdot 2}{2} \cdot 2^{17} \cdot 7^{30}$, $a = 2^{15}$



$2(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 12$ $b = \frac{k \cdot 2^{14} \cdot 7^{10}}{2^9} = 2^5 \cdot 7^{10}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№4 (проценты)

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \in \emptyset \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \underline{x \in \emptyset}$$

$$4(2x^2 - 5x + 3)(2x^2 + 2x + 1) = (4x^2 - 3x + 3)^2$$

По: $x = \frac{2}{7}$ в ответе *

Ответ: $x = \frac{2}{7}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~~A~~

$$a + b = m$$

$$a^2 - 6ab + b^2 = m$$

~~a~~
~~b~~
~~1~~

$$\frac{2}{3}$$

$$\frac{36}{13} \\ \frac{23}{23}$$

~~a~~
~~b~~
~~m~~

$$\frac{a}{b} = 1$$

$$\frac{2+3}{4-36+9} = \frac{5}{23}$$

$$\frac{a}{b} a - 6a + b$$

$$4 - 6 \cdot 6 + 9$$

$$4 - 36 + 9$$

$$= \frac{5}{23}$$

$$1 \\ \frac{a+b - \frac{6ab}{a+b}}{a+b}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

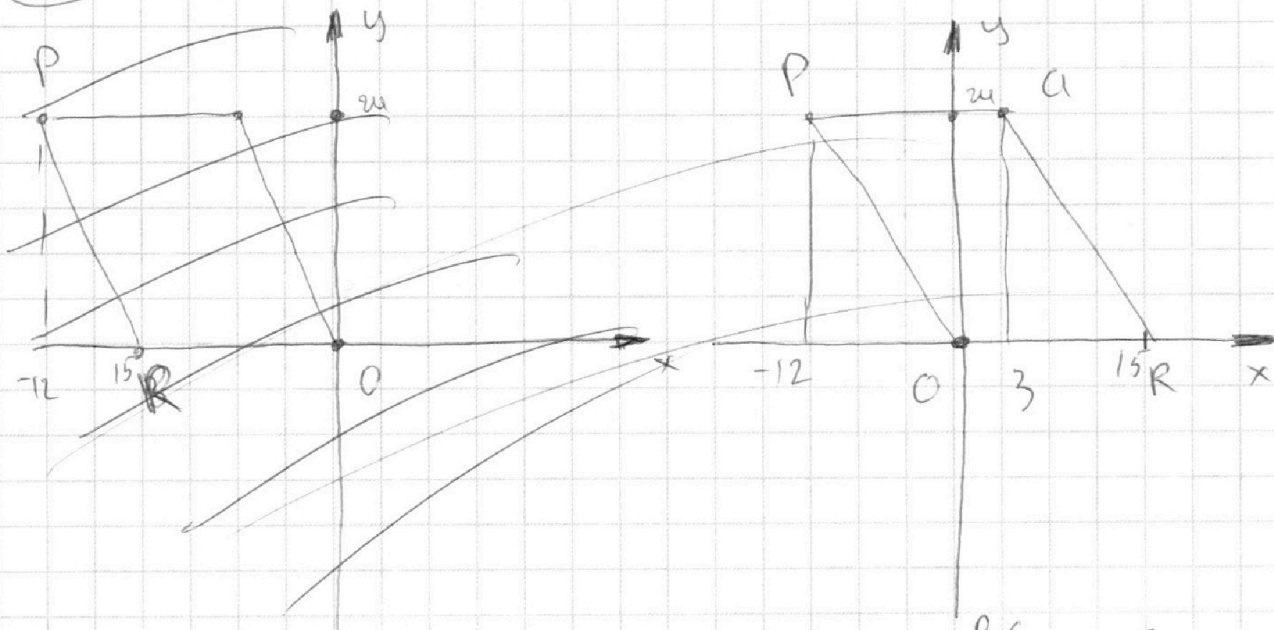
1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



(N5) $O(0; 0)$, $P(-12; 21)$, $Q(3; 21)$, $R(15; 0)$



$$AL = \frac{2 \cdot 4\sqrt{R-1} + 3 \cdot 4\sqrt{R-9} \cdot \cos \alpha}{4\sqrt{R-1} + 3\sqrt{4R-9}}$$

$$\frac{BC}{\sin \alpha} = 2R$$

$$\alpha = \frac{\pi/3}{4}$$

$$BC^2 = 16R - 16 + 36R - 81 - 24\sqrt{R-1}\sqrt{4R-9} \cdot \cos \alpha$$

$$4R^2 \sin^2 \alpha = 52R - 97 - 24\sqrt{R-1}\sqrt{4R-9} \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{-4R^2 \sin^2 \alpha + 52R - 97}{24\sqrt{R-1}\sqrt{4R-9}}$$

$$AL = \frac{52R - 4R^2 \sin^2 \alpha - 97}{4\sqrt{R-1} + 3\sqrt{4R-9}}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$AC = \frac{7}{8}a \Rightarrow$$

$$BC = \frac{1}{8}a$$

$$AO_1^2 = AC^2 + 1$$

$$BO_1^2 = BC^2 + 1$$

$$\sin \alpha = \frac{1}{AO_1}$$

$$\frac{BO_1}{\sin \alpha} = 10$$

$$BO_1 \cdot AO_1 = 10$$

$$BC = a$$

$$AC = 7a$$

$$\begin{array}{r} 23 \\ 75 \\ \hline 75 \\ 375 \\ \hline 525 \\ \hline 5625 \\ \hline 4900 \\ \hline 625 \\ \hline 5525 \end{array}$$

~~$$100 = (AC^2 + 1)(BC^2 + 1)$$~~

~~$$100 = \frac{49}{64}$$~~

$$100 = (49a^2 + 1)(a^2 + 1)$$

$$100 = 49a^4 + 49a^2 + a^2 + 1$$

$$49a^4 + 50a^2 - 100 = 0$$

$$D_1 = \sqrt{225 + 4900} = 625 + 4900 =$$

$$-25 + \sqrt{5325}$$

$$-25 + 5\sqrt{221}$$

$$AB = 8BC$$

$$40(\sqrt{221} - 5)$$

$$1248$$

$$74$$

$$174$$

$$246$$

$$518$$

$$5476$$

$$1848$$

$$968$$

$$189$$

$$69$$

$$69$$

$$8$$

$$\begin{array}{r} 5525 \overline{) 25} \\ 50 \\ \hline 52 \\ 50 \\ \hline 25 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 221 \overline{) 2} \\ 21 \\ \hline 11 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 221 \overline{) 13} \\ 13 \\ \hline 91 \\ 91 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 14 \\ 24 \\ 25 \\ \hline 49 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 891 \\ 396 \\ \hline 4851 \\ 625 \\ \hline 5476 \end{array}$$

$$625 + 49 \cdot 99$$

$$\begin{array}{r} 1848 \\ \hline 968 \\ 968 \\ \hline 189 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 151 \\ 01 \\ \hline 12 \end{array}$$

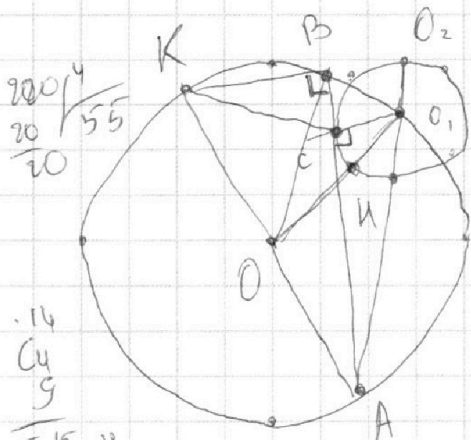
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{AC}{CB} = \frac{7}{1}$$

$$r_1 = 5$$

$$r_{O1} = 1$$

$$AB = ?$$

$$\frac{49}{a^2} = \frac{1}{1024}$$

$$49 \cdot 1024 = a^2$$

$$a = \sqrt{49 \cdot 1024} = 7 \cdot 32 = 224$$

$$AU \cdot (AU + 2) = AC^2 = AO_1^2 - 1$$

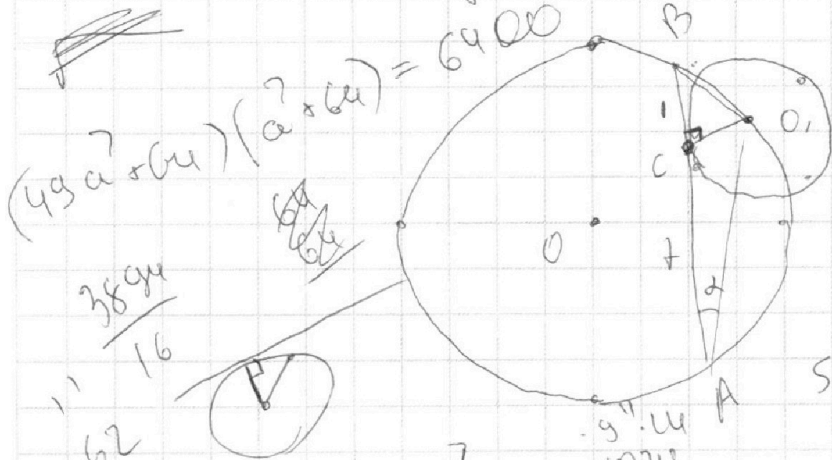
$$AU^2 + 2AU = (AU + 1)^2 - 1$$

$$AU^2 + 2AU = AU^2 + 2AU$$

$$49a^2 = 64 \cdot 49a^2 + 64a^2 = 10000$$

$$49a^2 + 49a^2 + 49a^2 + 50a^2 - 36 = 0$$

$$\sin \alpha = \frac{1}{AO_1} = \frac{1}{10} = \frac{225 + 6 \cdot 49}{16}$$



$$(49a^2 + 64)(a^2 + 64) = 6400$$

$$\frac{384a}{16}$$

$$\frac{62}{62}$$

$$\frac{32}{64}$$

$$\frac{96}{1024}$$

$$\frac{1024}{96}$$

$$\frac{384}{16}$$

$$AC = \frac{7}{8} a$$

$$BC = \frac{1}{8} a$$

$$AC^2 + 1 = AO_1^2$$

$$BC^2 + 1 = BO_1^2$$

$$(x - o)^2 + (y - o)^2 = r^2$$

$$BO_1 = AO_1 = 10$$

$$a + 1 = AO_1^2$$

$$\frac{1}{64} a^2 + 1 = BO_1^2$$

$$\left(\frac{49}{64} a^2 + 1\right) \left(\frac{1}{64} a^2 + 1\right) = 100$$

$$\frac{102449}{64} a^2 + 1024 = 10000$$

$$\frac{102449}{64} a^2 = 9976$$

$$a^2 = \frac{9976 \cdot 64}{102449}$$

$$a = \sqrt{\frac{9976 \cdot 64}{102449}}$$

На одной странице можно оформить **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи.
Решение которой представлено на странице.

- 1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Поня OK-кода неопустима!



МФТИ

(Handwritten mathematical work on graph paper, including algebraic manipulations, trigonometric identities, and a table of values for a+b and (a+b)^2.)

Table of values:

$a+b$	4	6	10	14	18	22	26	30	34	38	42	46	50
$(a+b)^2$	16	36	100	196	324	484	676	900	1156	1444	1764	2116	2500

Other notes include: 'abc?', 'abw = 2', 'bcw = 2', 'acw = 2', and various trigonometric expressions like 'sqrt(1-cos alpha)'.