



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



$$54 \cdot 10 = 540$$

$$14 + 14 = 28$$

1. [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.
4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-12; 24)$, $Q(3; 24)$ и $R(15; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$.
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



черновик

$$\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2 - a(x_1)}$$

$$a \cdot b = 2 \cdot 7$$

$$b \cdot c = 2 \cdot 4$$

$$a \cdot c = 2 \cdot 7$$

$$a \cdot b + b \cdot c = 2 \cdot 7$$

$$2x^2 - 5x + 3$$

$$x \cdot b = \frac{5}{4}$$

$$x_1 > x_2$$

$$4x_1 > 4x_2$$

$$-4x_1 < -4x_2$$

$$+ a \cdot b = 2 \cdot 7 \cdot k$$

$$b \cdot c = 2 \cdot 4 \cdot n$$

$$a \cdot b = 2 \cdot 7$$

$$b \cdot c = 2 \cdot 4$$

$$p = (2x^2 - 5x + 3)$$

$$f(x) = 2 - 4x$$

$$\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2 - a(x_1)} \cdot \sqrt{x_2} - \sqrt{x_2 - a(x_2)} \cdot \sqrt{x_2 + 3} =$$

$a \cdot b$

$$b(a+c) = 2 \cdot 7 \cdot (k + 2 \cdot 4 \cdot n)$$

$$\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2 - a} \cdot \sqrt{x_2} -$$

$$x_2 > x_1$$

$$\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1} > 0$$

$$\sqrt{x_2 - a(x_2)} - \sqrt{x_1 - a(x_1)} > 0$$

$$\begin{cases} a \cdot b = 2 \cdot 7 \cdot k \\ b \cdot c = 2 \cdot 4 \cdot n \\ a \cdot c = 2 \cdot 7 \cdot p \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} b = \frac{2 \cdot 7 \cdot k}{a} \\ \frac{2 \cdot 7 \cdot k}{a} \cdot c = 2 \cdot 4 \cdot n \\ \frac{k \cdot c}{a} = 2 \cdot 4 \cdot n \end{cases}$$

$$m \cdot 4 \cdot (a \cdot b \cdot c) \quad 2(x - \frac{5}{2})(x - 1)$$

$$\begin{cases} a \cdot b = 2 \cdot 7 \cdot 10 \\ b \cdot c = 2 \cdot 4 \cdot 17 \\ a \cdot c = 2 \cdot 7 \cdot 34 \end{cases} \quad \sqrt{(2x-3)(x-1)} \quad \frac{5}{a} = 2 \cdot 7 \cdot 10 \cdot n \quad 2 \cdot \frac{25}{16} - \frac{25}{4} + 3$$

$$a \cdot b \cdot c = 2 \cdot 7 \cdot 34 \quad c = 2 \cdot 7 \cdot p \cdot n \quad \frac{25}{8} - \frac{25}{4} + 3$$

$$a \cdot b \cdot c \quad (2x-5) \sqrt{2x^2-5x+3} - (2x+2) \sqrt{2x^2+2x+1} = 0$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Запишем условие: $a, b, c \in \mathbb{N}$; $ab = 2 \cdot 7^{14} \cdot 10^{10}$
 $bc = 2 \cdot 7^{14} \cdot 17^{17}$
 $ac = 2 \cdot 7^{20} \cdot 37^{37}$ } $\min(abc) = ?$

Рассмотрим $ab = 2 \cdot 7^{14} \cdot 10^{10} \Rightarrow ab = 2 \cdot 7^{14} \cdot k$, $k, e, n \in \mathbb{N}$
 Аналогично $bc = 2 \cdot 7^{14} \cdot l$, $ac = 2 \cdot 7^{20} \cdot m$

Тогда можно записать систему:

$$\begin{cases} ab = 2 \cdot 7^{14} \cdot k & (1) \\ bc = 2 \cdot 7^{14} \cdot l & (2) \\ ac = 2 \cdot 7^{20} \cdot m & (3) \end{cases}$$

Перемножим (1) и (2) и (3):
 $abc = 2 \cdot 7^{14+14+20} \cdot k \cdot l \cdot m = 2 \cdot 7^{48} \cdot k \cdot l \cdot m$

$$a^2 b^2 c^2 = 2^2 \cdot 7^{51} \cdot k^2 l^2 m^2$$

$\sqrt{a^2 b^2 c^2} = 7^{25} \cdot \sqrt{2 \cdot k^2 l^2 m^2}$; т.к. $a, b, c \in \mathbb{N}$, то $\sqrt{a^2 b^2 c^2} = abc$.

$abc = 7^{25} \cdot \sqrt{2 \cdot k^2 l^2 m^2}$
 натуральное натуральное $\Rightarrow \sqrt{2 \cdot k^2 l^2 m^2}$ - натуральное;

Тогда надо найти $\min(klm)$, что до $\sqrt{2 \cdot k^2 l^2 m^2} \in \mathbb{N}$

$k, l, m \in \mathbb{N} \Rightarrow \min(klm) = 2 \Rightarrow abc = 7^{25} \cdot 2$

Ответ: $\min(abc) = 7^{25} \cdot 2$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№ 2.

Заменим условие: $\frac{a}{b}$ - несократима ~~и взаимно просты~~

$$a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$$

Пусть $\max(m)$

$$\begin{cases} a+b : m & (1) \\ a^2 - 8ab + b^2 : m & (2) \end{cases}$$

Рассмотрим $a^2 - 8ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2 - 8ab = (a+b)^2 - 8ab$.

Тогда: $\begin{cases} a+b : m \\ (a+b)^2 - 8ab : m \end{cases}$ Если $a+b : m$, то $(a+b)^2 : m \Rightarrow$ в уравнении (2) $8ab$ тоже кратно m .

$\begin{cases} a+b : m & (1) \\ 8ab : m \end{cases}$ Если $a : m$, то из (1) следует, что $b : m$, тогда $\frac{a}{b}$ можно сократить на m , что противоречит условию.

Аналогично $b : m \Rightarrow 8 : m, m = \pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8$.

Рассмотрим пример: $a=3, b=5$:

$$\frac{3+5}{9-8 \cdot 3 \cdot 5+25} = \frac{8}{39-30 \cdot 3} = \frac{8}{39-90} = \frac{8}{-51} = \frac{8}{-7 \cdot 8} \Big|_{m=8} =$$

$$= -\frac{1}{7} \Rightarrow \exists \max(m) = 8$$

Ответ: $\max(m) = 8$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

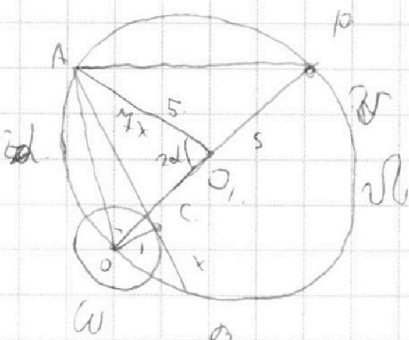
Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№3

дано:

$\omega; \Omega; O \in \Omega; O - \text{центр } \omega$

$A \in \Omega, A \in \omega, \omega \cap \Omega = C; \frac{AC}{CB} = 4$

$r(\text{радиус } \omega) = 1$

$R(\text{радиус } \Omega) = 5$

$AB = ?$

Решение:

Рассмотрим O_1 - центр ω . Прямая $OO_1 \cap \Omega = P$.

Рассмотрим $\triangle AOP$: $\angle OAP = 90^\circ$, т.к. OP - диаметр

$$AO_1^2 = OO_1 \cdot OP \quad OO_1 = OP = R$$

" " $\Rightarrow AO_1 \perp OP$. Рассмотрим $\triangle AO_1O$:

$\angle AO_1O = 90^\circ$, т.к. $AO_1 \perp OP$. По теореме Пифагора:

$$AO^2 = AO_1^2 + OO_1^2 = 50 \Rightarrow AO = 5\sqrt{2}$$

AB - касательная к $\omega \Rightarrow OC \perp AB$. Рассмотрим $\triangle ACO$:

$\angle ACO = 90^\circ$; $OC = r = 1$, тогда по теореме Пифагора:

$$AO^2 - OC^2 = AC^2; AC^2 = 49 \Rightarrow AC = 7 \Rightarrow CB = 1 \Rightarrow AB = 8$$

Ответ: $AB = 8$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№4.

Заменим, что $2x^2 - 5x + 3 = 2x^2 + 2x + 1 - (2 - 4x)$

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 - 5x + 3 - (2 - 4x)} = 2 - 4x$$

Если $2 - 4x = 0$, то $\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 - 5x + 3} = 0$ - решение.

$x = \frac{2}{4}$. Покажем, что других нет:

$f(x) = 2x^2 - 5x + 3$; $x \in [\frac{2}{4}, +\infty)$ $f(x) \uparrow$; $x \in (-\infty, \frac{2}{4})$ $f(x) \downarrow$

$a(x) = 2 - 4x$ $x \in (-\infty, \infty)$ $a(x) \downarrow$.

Исходя из этого:

$\sqrt{f(x)}$, ($f(x) \geq 0$). \uparrow если $x \in [\frac{2}{4}, +\infty)$ $\wedge f(x) \geq 0$

$\sqrt{f(x) - a(x)}$ \uparrow если $f(x) - a(x) \geq 0 \wedge x \uparrow \Rightarrow$

$\sqrt{f(x)} - \sqrt{f(x) - a(x)}$ \uparrow $a(x) \geq 0$ если $a(x) \geq 0 \Rightarrow$ отню

$a(x) \downarrow \Rightarrow$ 1 решение. Если же $a(x) \leq 0$

$\sqrt{f(x)} - \sqrt{f(x) - a(x)}$ можно упрощать, но ~~если~~ функции

симметричны относительно начала координат:

но точка перегиба функции лежит выше $\frac{2}{4} \Rightarrow$

пересечения не будет. Значит $x = \frac{2}{4}$ - ед. решение.

Ответ. $x = \frac{2}{4}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№6 продолжение.

1) ~~если $\ell \cap \omega = A$ и $\ell \cap \Omega = B$~~
~~если~~

если $\ell \cap \omega = A$ и $\ell \cap \Omega = B$, то если ℓ — ось симметрии, то система имеет ровно два решения.

$$\begin{cases} (x+8)^2 + y^2 - 1 = ax + y + 10\beta = 0 \\ x^2 + y^2 = ax + y \end{cases}$$

$$\begin{cases} D((x+8)^2 + (ax+10\beta)^2 - 1) = 0, \quad D(f(x)) - \text{дискриминант от } f(x) \\ D(x^2 + (ax+10\beta)^2 - 4) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} D(x^2 + 16x + 64 + a^2x^2 + 20ax\beta + 100\beta^2 - 1) = 0 \\ D(x^2 + a^2x^2 + 20ax\beta + 100\beta^2 - 4) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} D(x^2(1+a^2) + x(16+20a\beta) + 63+100\beta^2) = 0 \\ D(x^2(1+a^2) + 20ax\beta + 100\beta^2 - 4) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (16+20a\beta)^2 - 4(1+a^2)(63+100\beta^2) = 0 \\ 400a^2\beta^2 - 4(1+a^2)(100\beta^2 - 4) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 256 + 640a\beta + 400a^2\beta^2 - 4(63 + 63a^2 + 100\beta^2 + 1000\beta^2) = 0 \\ 4000\beta^2 - 4(63 + 63a^2 + 100\beta^2 + 1000\beta^2) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 256 + 640a\beta - 252 - 252a^2 - 4000\beta^2 = 0 \\ -4000\beta^2 + 16 + 16a^2 = 0 \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№6

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 & (1) \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 & (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ax + 10b = y & (1) \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 & (2) \end{cases}$$

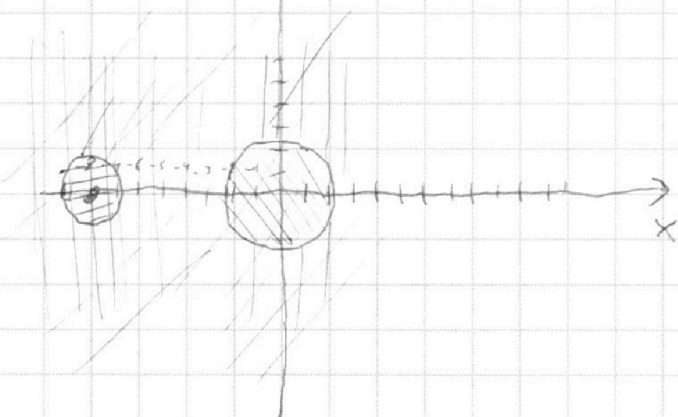
$$(2) : 1) (x+8)^2 + y^2 - 1 \geq 0 \wedge x^2 + y^2 - 4 \leq 0$$

↑ y

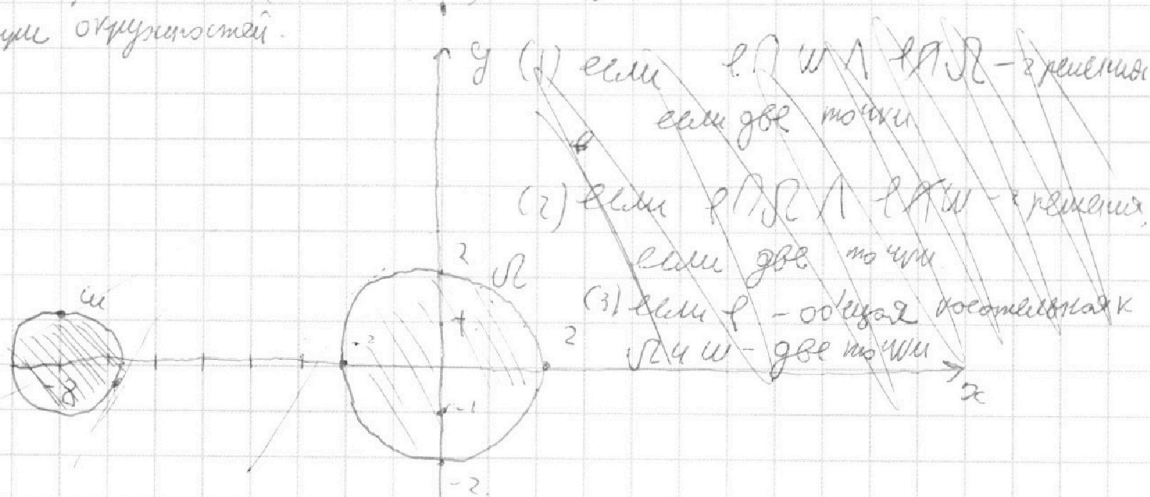
/// и /// для 1 случая; ||| и ≡ для второго

$$2) (x+8)^2 + y^2 - 1 \leq 0 \wedge x^2 + y^2 - 4 \geq 0$$

будет малая ω, а большая Ω. Прямая y = ax + 10b будет l



Знают решения $((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0$ являются области внутри окружностей.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

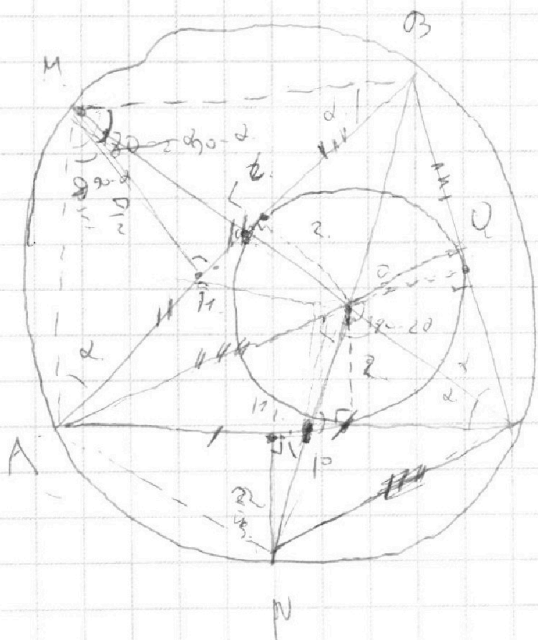
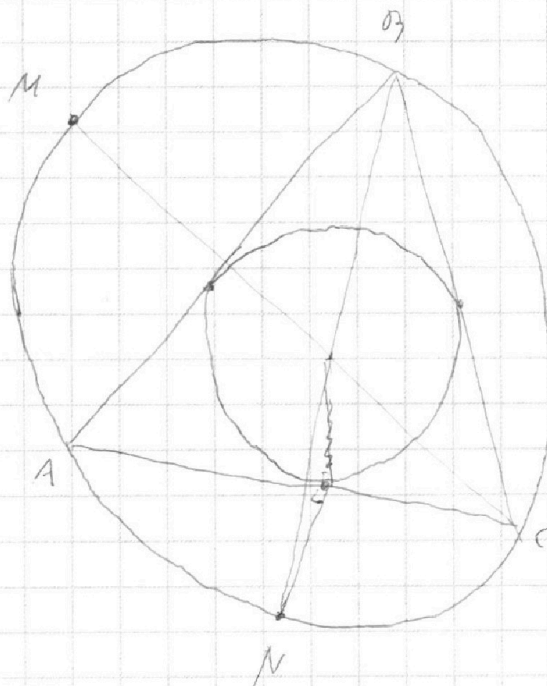
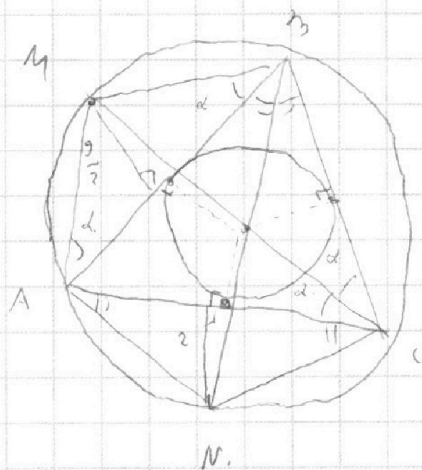
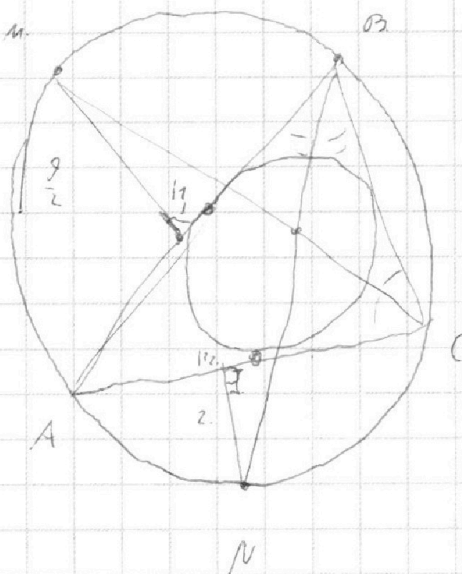
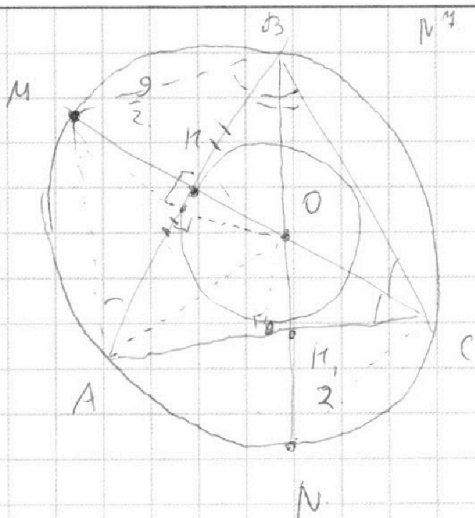
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{aligned}
 \frac{g}{2} \cdot \frac{1}{2} &= \frac{ML}{LO} \\
 \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} &= \frac{MP}{PO} \\
 \frac{1}{4} &= \frac{MP}{PO} \\
 \frac{1}{4} \cdot PO &= MP
 \end{aligned}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

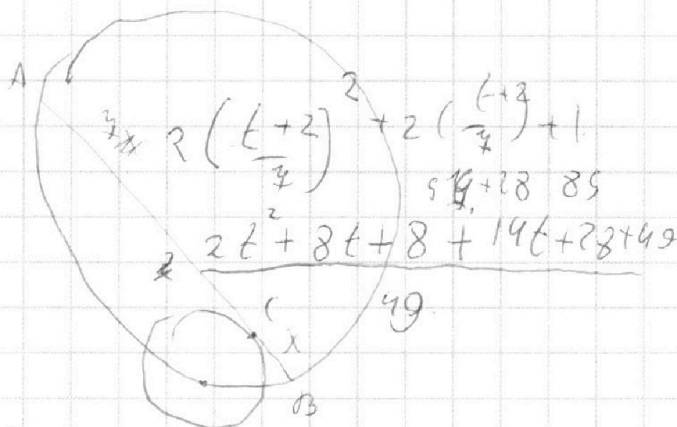
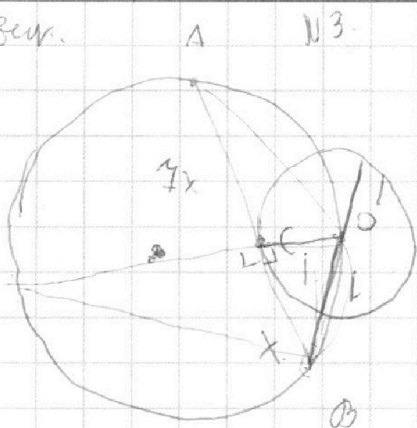
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



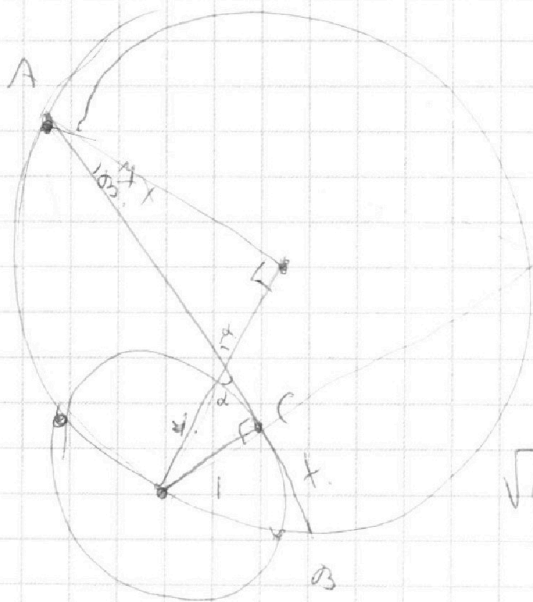
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Черновик.



$$x^2 - y^2 = y \cdot (y+2)$$

$$2t^2 + 22t + 85$$



$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 4x + 1} = 2 - 4x$$

$$D_1 = 5^2 - 24 = 1$$

$$D_2 = 4^2 - 2 \cdot 4 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm 1}{4} = \left[\frac{6}{4} \right]$$

$$2 \left(x - \frac{3}{2} \right) (x - 1)$$

$$2x^2 - 2x - x + 3$$

$$\sqrt{(2x-3)(x-1)} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 4x$$

$$t = x - 1 \quad \sqrt{(2t-1)(t+1)} - \sqrt{2(t+2)(t+3)+1} = 2 - 4(t+1)$$

$$2t - 1 = 2(x - 2) - 1$$

$$\sqrt{(2t-1)t} - \sqrt{2(t^2 + 5t + 6) + 1}$$

$$25 - 24$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

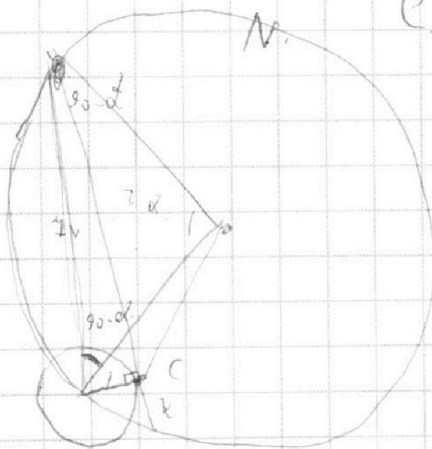
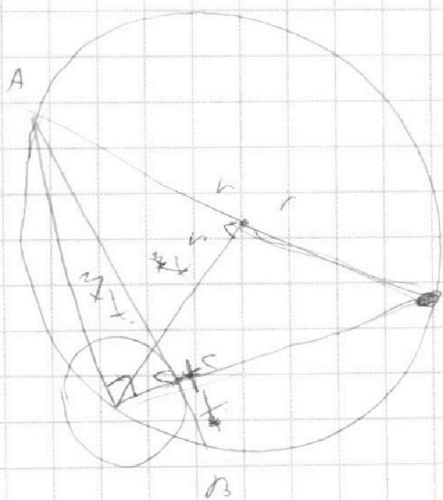
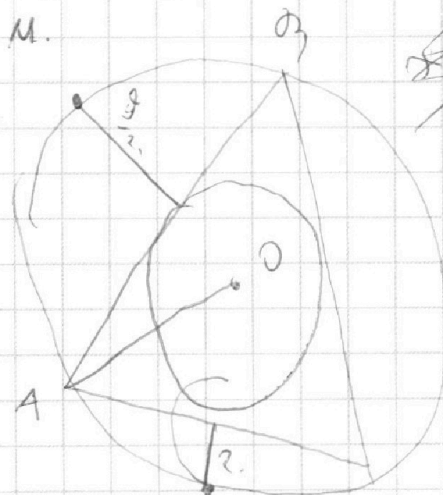
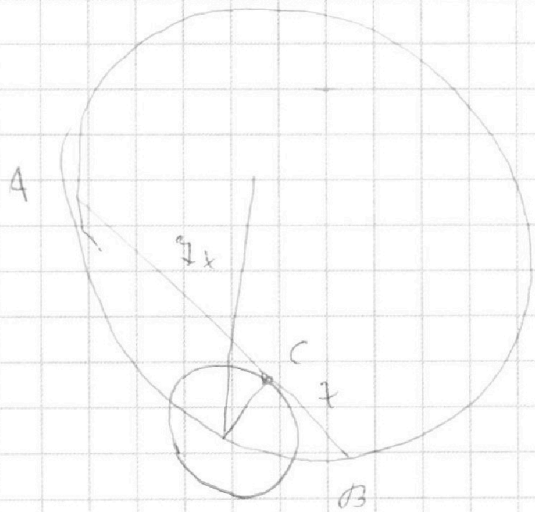
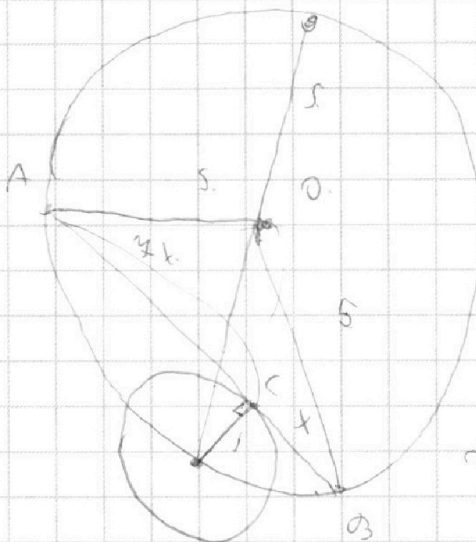
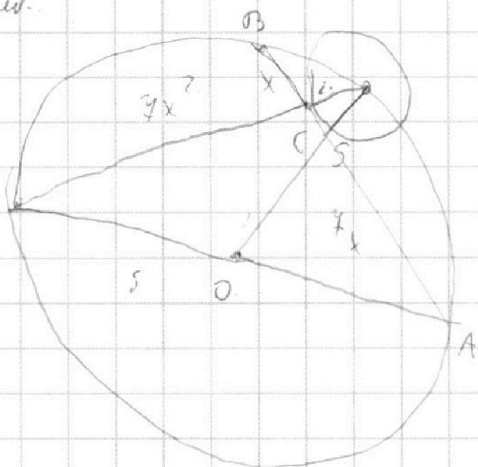
Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

черновик



$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3}$$

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - 2x$$

$$2x^2 - 5x + 3 = 4x^2$$

$$-2x^2 - 5x + 3 = 0$$

$$2x^2 + 5x - 3 = 0$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 24}}{4} = \frac{-5 \pm 7}{4}$$

$$x_1 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$x_2 = \frac{-12}{4} = -3$$

$$x = \frac{1}{2}$$

$$\sqrt{2 \cdot \frac{1}{4} - 5 \cdot \frac{1}{2} + 3}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{5}{2} + 3} = \sqrt{1} = 1$$

$$2 \cdot \frac{1}{2} - 5 \cdot \frac{1}{2} + 3 = 1 - 2.5 + 3 = 1.5$$

$$\sqrt{1.5} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$1 - \frac{\sqrt{6}}{2}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



N° 4.

черновик

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 4x \quad | \quad \uparrow^2 \quad 2x^2 - 5x + 3 = t \quad 2 - 4x$$

$$2x^2 - 5x + 3 - 2\sqrt{2x^2 - 5x + 3}\sqrt{2x^2 + 2x + 1} + (2 - 4x)^2 - 2x^2 - 2x - 1 = (2 - 4x)^2$$

$$2 - 4x - 2\sqrt{2x^2 - 5x + 3}\sqrt{2x^2 + 2x + 1} = (2 - 4x)^2 \quad 2x^2 - 5x + 3 - t = 0$$

$$2 - 4x - 2\sqrt{(2x-3)(x-1)}\sqrt{2\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{2}} = (2 - 4x)^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{5 \pm \sqrt{25 + 24x + 4}}{4}$$

замена

$$2 - 4x = t \Rightarrow -\frac{t-2}{4} = x$$

$$2x - 3 = 2\left(\frac{t-2}{4}\right) - 3 = \frac{2t-4-12}{4} = \frac{2t-16}{4}$$

$$x - 1 = \frac{t-2}{4} - 1 = \frac{t-6}{4}$$

$$t - 2\sqrt{\left(\frac{2t-16}{4}\right)\left(\frac{t-6}{4}\right)} = \sqrt{\frac{2t^2 + 22t + 85}{49}} = t$$

$$2 - 4x = t \Rightarrow \frac{2-t}{4} = x \quad \sqrt{t+a} - \sqrt{t} = a$$

$$2x - 3 = 2\left(\frac{2-t}{4}\right) - 3 = \frac{4-t-12}{4} = \frac{-14-t}{4}$$

$$x - 1 = \frac{2-t}{4} - 1 = \frac{-5-t}{4} \quad 2\sqrt{2+2+11} = 2-4$$

$$2\left(\frac{2-t}{4}\right)^2 + 2\left(\frac{2-t}{4}\right) + 1 = 2 \quad \frac{2(4-4t+t^2) + 14(2-t) + 49}{49} = \sqrt{49}$$

$$= \frac{8 - 8t + 2t^2 + 28 - 14t + 49}{49} = \frac{85 - 22t + 2t^2}{49} \quad \frac{9}{2} + \frac{6}{2} + t$$

$$t - 2\sqrt{\frac{(14+t)(5+t)}{49}} = \sqrt{\frac{85 - 22t + 2t^2}{49}} = t \quad \sqrt{t+a} - \sqrt{t} = a$$

$$\sqrt{t} - \sqrt{t+a} = a$$

$$t - 2\sqrt{t}\sqrt{t+a} + t + a = a$$

$$t + t - a\sqrt{t+a} - \sqrt{t} = a$$

$$2t - 2\sqrt{t^2 + ta} = a$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

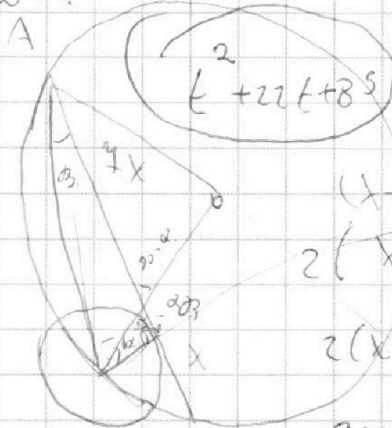
1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



нормиров.



$$2x^2 - 5x + 3$$

A

$$(x+1)t = 2 - 4x$$

$$2\left(x^2 + x + \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\right)$$

$$2(x^2 + x + 1)$$

$$2x^2 + 2x + 1$$

$$2x^2 - 5x + 3$$

$$2x^2 + 2x + 1 = 2$$

$$2x^2 + 2x + 1$$

$$\sqrt{2x^2}$$

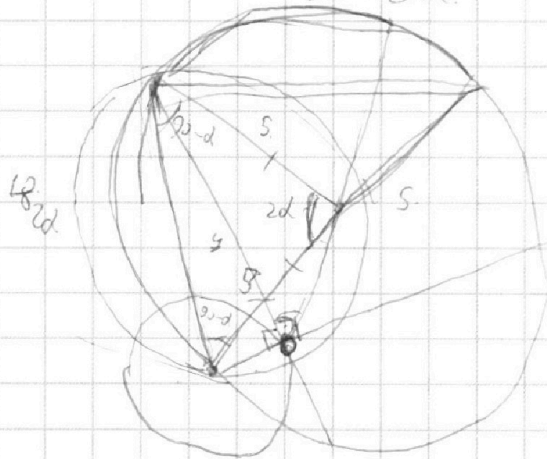
$$2t^2 - 22t + 85$$

2t

$$121 - 4 = 484$$

85

$$180 - 2d$$



$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 4x$$

$$2x^2 + 2x + 1$$

$$2x^2 - 5x + 3 - 2x^2 - 2x - 1 + 2x^2$$

$$2 - 4x = t$$

$$2x + 1 = t$$

$$-t = 4x - 2$$

$$(2x^2 - 5x + 3)(2x^2 + 2x + 1) =$$

$$-\frac{t}{4} = x - \frac{2}{4}$$

$$= 4x^4 + 8x^3 + 2x^2 - 10x^3 - 10x^2 + 10x$$

$$-\frac{2t}{4} = 2x - \frac{1}{2} \quad + 6x^2 + 6x + 3$$

$$4x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 10x^3 - 10x^2 - 5x + 6x^2 + 6x + 3$$

$$4x^4 - 6x^3 - 2x^2 + x + 3 \quad \left[\frac{2x^2 - 5x + 3}{x-1} \right]$$

$$4 - 6 - 2 + 1 + 3$$

$$\begin{array}{r} 2x^2 - 5x + 3 \overline{) x - 1} \\ 2x^2 - 2x \\ \hline -3x + 3 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

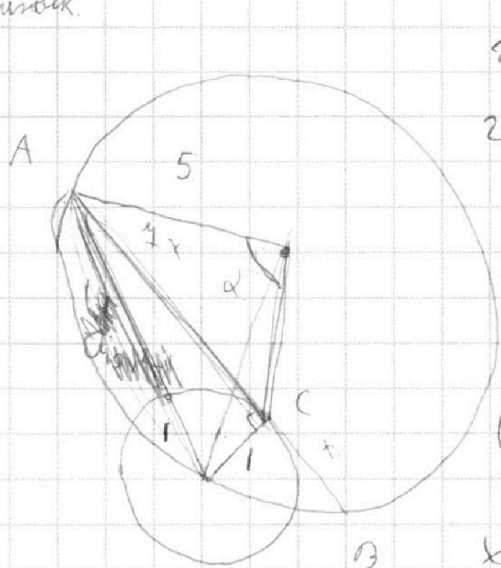
- 1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Черновик.



$$2x^2 - 5x + 3 = 0 \quad \left(\sqrt{t} - \sqrt{t+4} = a \right)$$

$$2 \left(x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{3}{2} \right)$$

$$x^2 - 2 \cdot \frac{5}{4}x + \frac{25}{16} - \frac{1}{16}$$

$$1 + \sqrt{1 - 4 \cdot 49x^2}$$

$$\left(x - \frac{5}{4} \right)^2 - \frac{1}{16} \quad (4x) \cdot t$$

$$x + \frac{1}{2} = t, \quad 1 - t - \frac{5}{4} = x - \frac{5}{4}$$

$$2x + 1 = 2t$$

~~$$(y+1)x = 49x^2$$~~

~~$$y+1 = 49x$$~~

~~$$y = 49x^2 - 1$$~~

~~$$49x^2 = 1 - 19x^2$$~~

~~$$-1 + \sqrt{1 - 4 \cdot 49x^2}$$~~

$$\left(\frac{1 + \sqrt{1 - t^2}}{2} \right)^2 = 1 + t^2$$

$$(4x)^2 = (1+y)y$$

$$49x^2 = y^2 + y$$

$$y^2 + y - 49x^2 = 0$$

$$D = 1 - 4 \cdot 49 \cdot 4x^2 = 1 - 784x^2$$

$$y_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 784x^2}}{2}$$

$$4x \left(\frac{1 + \sqrt{1 - t^2}}{2} \right)^2 = 4 + 4t^2$$

$$1 + 2\sqrt{1 - t^2} + 1 - t^2 = 4 + 4t^2$$

$$\sqrt{1 - t^2} = k$$

~~$$1 + 2k + k^2 = 4 + 4k^2$$~~

$$2\sqrt{1 - t^2} = 2 + 5t^2$$

$$t^2 = k$$

$$2\sqrt{1 - k} = 2 + 5k$$

$$k(14 + 25k) = 0$$

$$k = -$$

$$4(1 - k) = 4 + 10k + 25k^2$$

$$19k + 14k + 25k^2 = 0$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№6 продолжение

Нужно найти $\forall \theta$ все a , что удовлетворяют уравнению:

$$\begin{cases} 4 + 6400\theta - 252a^2 - 400\theta^2 = 0 & (1) \\ 16 - 400\theta^2 + 160a^2 = 0 & (2) \end{cases}$$

(2) - (1):

$$12 - 640a\theta + 266a^2 = 0$$

$$3 + 160a\theta +$$

$$6 + 320a\theta + 133a^2 = 0$$

$$133a\theta = \frac{-133a^2 - 6}{-320} \quad a \neq 0$$

Ответ. при $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ или $a \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№4.

Заметим, что $2x^2 - 5x + 3 = 2x^2 + 2x + 1 + 2 - 4x$.

~~Пусть $b = 2x^2 + 2x + 1$, $a = 2 - 4x$.~~

~~$\sqrt{b} - \sqrt{b-a} = a$.~~

~~\sqrt{a}~~

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 - 5x + 3 - (2 - 4x)} = (2 - 4x)$$

~~Пусть $(2 - 4x) = a(x)$; $f(x) = 2x^2 - 5x + 3$~~

~~$\sqrt{f(x)} - \sqrt{f(x) - a(x)} = a(x)$; $a(x)$ убывает при $\forall x$.~~

~~$f(x) \uparrow$ если $x \in (\frac{5}{4}; +\infty)$; $f(x) \downarrow$ если $x \in (-\infty; -\frac{5}{4})$.~~

~~$2x^2 - 5x \sqrt{f(x)} = f(x) - a(x)$~~

~~$\sqrt{f(x)}$ мон. при, если a $f(x)$, поэтому $f(x) \geq 0$~~

~~$\sqrt{f(x) - a(x)} \uparrow$ если $f(x) - a(x) \uparrow \Rightarrow x \uparrow$~~

~~$\sqrt{f(x)} - \sqrt{f(x) - a(x)} = a(x)$.~~

~~Пусть $\frac{2-t}{4} = t$; $2-t = 4x$; $x = \frac{2-t}{4}$.~~

~~$\sqrt{2(\frac{2-t}{4})^2 - 5(\frac{2-t}{4}) + 3} - \sqrt{2(\frac{2-t}{4})^2 - 5(\frac{2-t}{4}) + 3 - t} = t$~~

~~t^2~~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Черновик.

$$\frac{a+b}{a^2-60b+b^2}$$

$$a+b : m$$

$$a^2-60b+b^2 : m$$

$$D = 36b^2 - 4b^2 = 32b^2$$

$$a : b$$

*

$$a+b : m$$

$$a^2 + 20b + b^2 - 80b$$

$$a^2 \quad \frac{a}{b}$$

$$a^2 + b^2 - 60b : m$$

$$(a+b)^2 - 80b : m$$

$$a^2 - 20b + b^2 - 40b : n$$

$$a+b : m$$

$$(a-b)^2 - 40b : m$$

$$80b : m$$

$$a+b : m$$

$$m \leq 8 \quad a = 1, 2, 4, 8$$

$$\begin{cases} a+b : m \\ 80b : m \end{cases}$$

$$8 : m$$

$$\frac{5+5}{9-6 \cdot 3 \cdot 5+85} = \frac{8}{34-90} = \frac{8}{-56}$$