



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^7 3^{11} 5^{14}$, bc делится на $2^{13} 3^{15} 5^{18}$, ac делится на $2^{14} 3^{17} 5^{43}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой AC в точке A , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке E , а катет BC – в точке F . Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1,3$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$.
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0, \\ (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_7^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4, \quad \text{и} \quad \log_7^4 y + 6 \log_y 7 = \log_{y^2} (7^5) - 4.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-17;68)$, $Q(2;68)$ и $R(19;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно на границе) и таких, что $4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 60, $SA = BC = 10$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 3$, а радиус сферы Ω равен 4.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7
☒ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1.

$$ab: 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14}, \quad bc: 2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{18}, \quad ac: 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{43}$$

$$\text{Итак } a = 2^{x_1} \cdot 3^{y_1} \cdot 5^{z_1}, \quad b = 2^{x_2} \cdot 3^{y_2} \cdot 5^{z_2}, \\ c = 2^{x_3} \cdot 3^{y_3} \cdot 5^{z_3}$$

$$\text{Тогда } \begin{cases} x_1 + x_2 \geq 7 \\ x_2 + x_3 \geq 13 \\ x_1 + x_3 \geq 14 \end{cases} \quad \begin{cases} y_1 + y_2 \geq 11 \\ y_2 + y_3 \geq 15 \\ y_1 + y_3 \geq 17 \end{cases} \quad \begin{cases} z_1 + z_2 \geq 16 \\ z_2 + z_3 \geq 18 \\ z_1 + z_3 \geq 43 \end{cases}$$

~~Заметим~~ решения трёх систем независимы друг от друга, поэтому, чтобы минимизировать abc , нужно искать минимумы $x_1 + x_2 + x_3$, $y_1 + y_2 + y_3$ и $z_1 + z_2 + z_3$.

~~Заметим~~ $x_1 + x_2 + x_3 \geq \frac{7+13+14}{2} = 17$, при этом рав-во достигается при $(x_1, x_2, x_3) = (4, 3, 10)$.

$y_1 + y_2 + y_3 \geq \frac{11+15+17}{2} = \frac{43}{2} = 21,5$, а т.к. они целые, минимизи-

- 22. — при $(y_1, y_2, y_3) = (6, 5, 11)$

$z_1 + z_2 + z_3 \geq z_1 + z_3 \geq 43$. Аналога выведена при, например, $(z_1, z_2, z_3) = (21, 0, 22)$.

$$\text{Итак } \min(ab) = 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$$

$$\text{Итак } \min(abc) = 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
☐

2
☒

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N2

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$\sin x = \cos\left(\frac{x}{5} - \frac{3\pi}{10}\right) = \sin\left(\frac{x}{5} - \frac{3\pi}{10} + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{x}{5} + \frac{4\pi}{5}\right),$$

т.к. аргументы лежат в промежутке от 0 до π ,

$$0 \leq \frac{3\pi}{2} + x \leq 5\pi$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin x = \sin\left(\frac{x}{5} + \frac{4\pi}{5}\right) \\ -\frac{3\pi}{2} \leq x \leq \frac{7\pi}{2} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{x}{5} + \frac{4\pi}{5} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x = \pi - \frac{4\pi}{5} - \frac{x}{5} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ -\frac{3\pi}{2} \leq x \leq \frac{7\pi}{2} \end{array} \right.$$

$$\frac{4\pi}{5} = \frac{4\pi}{5} x$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 4x = 4\pi + 10\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ 6x = \pi + 10\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ -\frac{3\pi}{2} \leq x \leq \frac{7\pi}{2} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \pi + \frac{5}{2}\pi n, n \in \mathbb{Z} \quad (1) \\ x = \frac{\pi}{6} + \frac{5}{3}\pi k, k \in \mathbb{Z} \quad (2) \\ -\frac{3\pi}{2} \leq x \leq \frac{7\pi}{2} \end{array} \right.$$

подставим (1) в неравенство:

$$-\frac{3\pi}{2} \leq \pi + \frac{5}{2}\pi n \leq \frac{7\pi}{2}$$

$$-3 \leq 2 + 5n \leq 7$$

$$-1 \leq n \leq 1, \text{ значит, } \left\{ \begin{array}{l} x = \pi - \frac{5}{2}\pi = -\frac{3}{2}\pi \\ x = \pi \\ x = \pi + \frac{5}{2}\pi = \frac{7\pi}{2} \end{array} \right.$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Подставим (2) :

$$-\frac{3\pi}{2} \leq \frac{\pi}{6} + \frac{5}{3}k \leq \frac{7\pi}{2} \quad | \cdot 6$$

$$-9 \leq 1 + 10k \leq 21$$

$$-1 \leq k \leq 2, \text{ значит, } \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} - \frac{5\pi}{3} = -\frac{3\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{6} \\ x = \frac{\pi}{6} + \frac{5\pi}{3} = \frac{11\pi}{6} \\ x = \frac{\pi}{6} + \frac{10\pi}{3} = \frac{21\pi}{6} = \frac{7\pi}{2} \end{cases}$$

Ответ: $x = -\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}; \pi; \frac{7\pi}{2};$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

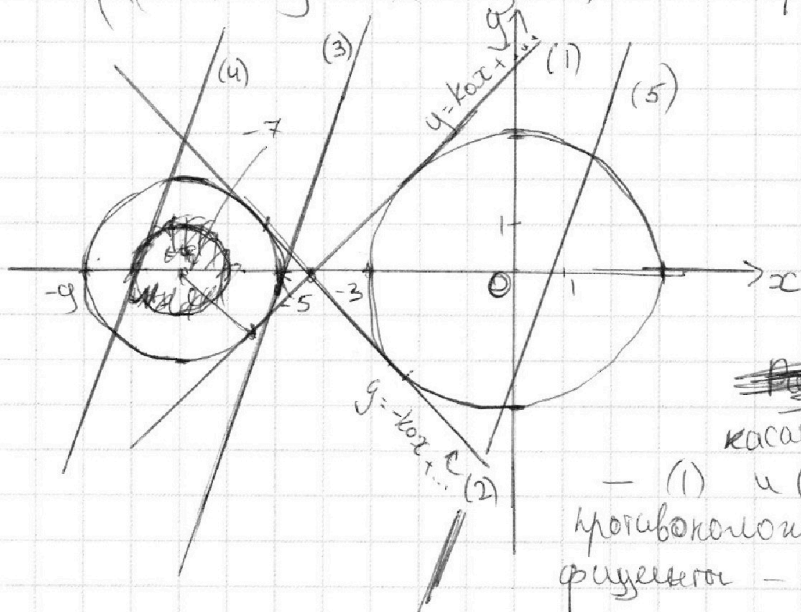
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 4

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0 \\ (x^2 + 4x + y^2 + 5)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases}$$

и реш

$$\begin{cases} 3ay = 7b - x & \text{— прямая, не паралл. } Oy \\ ((x+7)^2 + y^2 - 4)(x^2 + y^2 - 9) = 0 & \text{: график — 2 окружности}$$



Пусть ~~Рассмотрим~~ образ касательной окружности — (1) и (2). Треугольник противолежащие углам коэффициенты — пусть k_0 и $-k_0$ ($k_0 > 0$).

Рассмотрим касательную к малой окружности, с коэфф. k^* . Если $k > k_0$, то касательная (3) не будет касаться/пересекать вторую окружность, и если ~~какая-то~~ какая-то прямая (4) параллельная ей, выше этой касательной, то тем более выше и второй окружности. Если же эта прямая с коэфф. k ниже (3) то не имеет пересечения с левой окружностью. Таким образом, во всех случаях не будет 4 решений.

Аналогично, для $k < -k_0$ тоже невозможны 4 решения.

~~Важно (*) Касательная из 2 касательных (такими коэфф.)~~
~~касательная к малой окружности — касательная к большой — касательная к малой — касательная к большой — касательная к малой — касательная к большой~~

Если же $-k_0 \leq k \leq k_0$, тогда найдется такое b , что прямая с этим коэфф. проходит через т. пересечения (1) и (2), а значит, пересекает 2 окр-ти в 4 точках.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



1) $a=0$ — не подходит, т.к. прямая $xc=7b$ не может иметь больше 2 пересечений

2) $a \neq 0$:

$$y = -\frac{1}{3a}x + \frac{7b}{3a} = kx + \frac{7b}{3a}$$

$$-k_0 \leq -\frac{1}{3a} \leq k_0$$

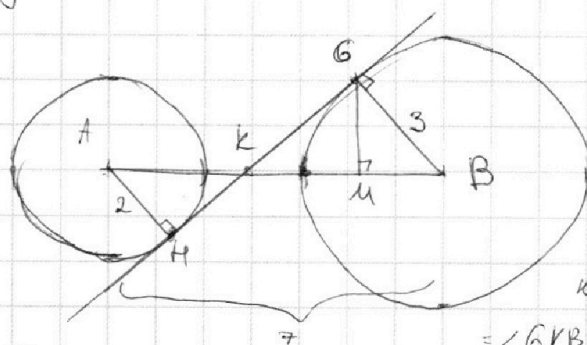
$$|\frac{1}{3a}| \leq k_0$$

$$|3a| \geq \frac{1}{k_0}$$

$$|a| \geq \frac{1}{3k_0}$$

$$|a| \leq -\frac{1}{3k_0}$$

Найдём k_0 :



Пусть H, G — точки касания, $AB \cap HG = K$,
 $GM \perp AB$.

$BG \perp GH$, $AH \perp GH$
 как радиусы, касаясь.
 К точкам касания, а $\angle AKH = \angle GKB$, поэтому $\triangle AKH \sim \triangle BKG$

$$\Rightarrow AK:KB = 2:3 \Rightarrow AK = \frac{2}{5}AB = \frac{14}{5}, BK = \frac{3}{5}AB = \frac{21}{5}$$

$$= \frac{21}{5}. \text{ По т. Пифагора, } KG^2 = \frac{21^2}{5^2} - 9 = \frac{441 - 225}{25} = \frac{216}{25}$$

$$KG = \frac{3\sqrt{24}}{5} = \frac{6\sqrt{6}}{5}$$

Используя формулы площади и/или площади треугольника,
 $\frac{1}{2}KG \cdot GB = \frac{1}{2}KB \cdot GM \Rightarrow GM = \frac{KG}{KB} \cdot GB =$

$$= \frac{\frac{6\sqrt{6}}{5} \cdot 3}{\frac{21}{5}} = \frac{6\sqrt{6}}{7}$$

$$KM^2 = KG^2 - GM^2 = \frac{36 \cdot 6}{25} - \frac{36 \cdot 6}{49} = 36 \cdot 6 \cdot \frac{24}{5^2 \cdot 7^2} =$$

$$= \frac{6^3 \cdot 6^3 \cdot 2^2}{5^2 \cdot 7^2} \Rightarrow KM = \frac{362}{35} = \frac{72}{35}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$k_0 = \frac{G_m}{k_m} = \frac{8\sqrt{6} \cdot 355}{\pi \cdot 2212} = \frac{5\sqrt{6}}{12}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a > \frac{12^4}{3 \cdot 5\sqrt{6}} = \frac{4}{5\sqrt{6}} \\ a < -\frac{4}{5\sqrt{6}} \end{array} \right.$$

Ответ : $a > \frac{4}{5\sqrt{6}}$ или $a < -\frac{4}{5\sqrt{6}}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

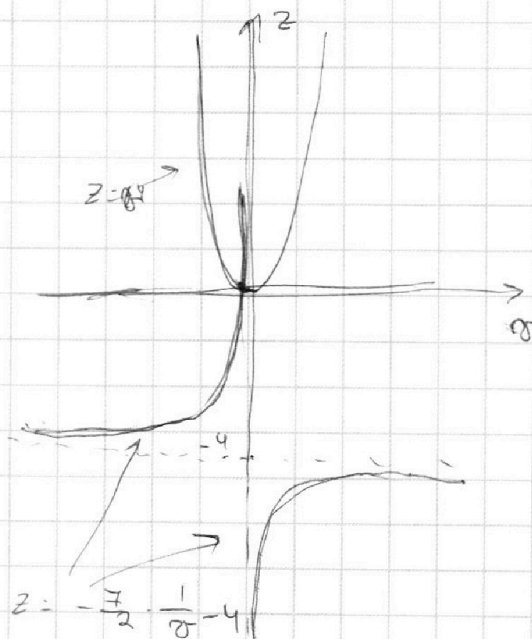
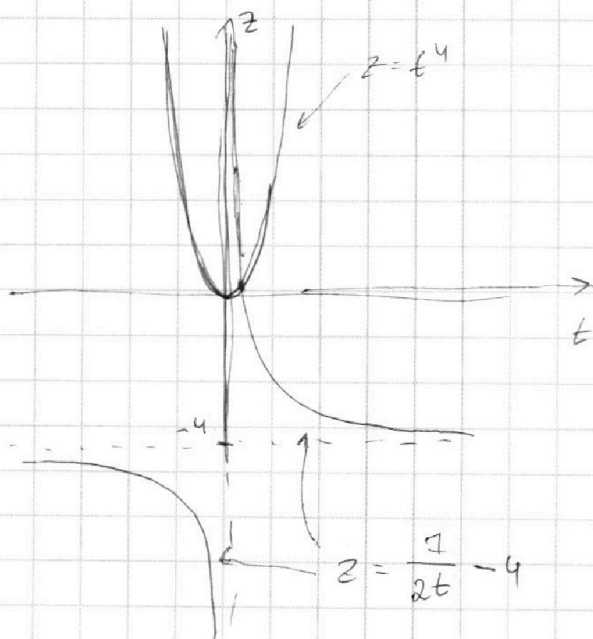
~ 5

$$\begin{cases} \log_7^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 843 - 4 \\ \log_7^4 y + 6 \log_y 7 = \log_{y^2} (7^5) - 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\log_7(6x))^4 - \frac{2}{\log_7(6x)} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\log_7(6x)} - 4 \\ (\log_7 y)^4 + \frac{6}{\log_7 y} = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{\log_7 y} - 4 \end{cases}$$

Заменим: $t = \log_7(6x)$, $v = \log_7 y$

$$\begin{cases} t^4 = \frac{7}{2} \cdot \frac{1}{t} - 4 \\ v^4 = -\frac{7}{2} \cdot \frac{1}{v} - 4 \end{cases}$$



Графики имеют пересек. в каждой-то точке (σ, z) и (t, z) и в силу ~~симметрии~~ "отзеркаливания" имеем $\sigma = -t$
т.е. $\sigma + t = 0$
 $\log_7(6x) + \log_7 y = 0$
 $6xy = 1$
 $xy = \frac{1}{6}$

* $\log_7(6x)$ и $\log_7(y)$ принимают все значения, поэтому для каждого σ и t найдется свой x и y .

ответ: $\frac{1}{6}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№6

$$4(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 40$$

Пусть без огр. считаем $x_2 \geq x_1$ тогда $x_2 - x_1$ и $|y_2 - y_1|$ — длины катетов ~~прямоугольника~~ треугольника с гипотенузой 40 в этих точках (катеты параллельны Ox и Oy)

Пусть в горизонтальный катет — a , вертикальный — b , тогда:

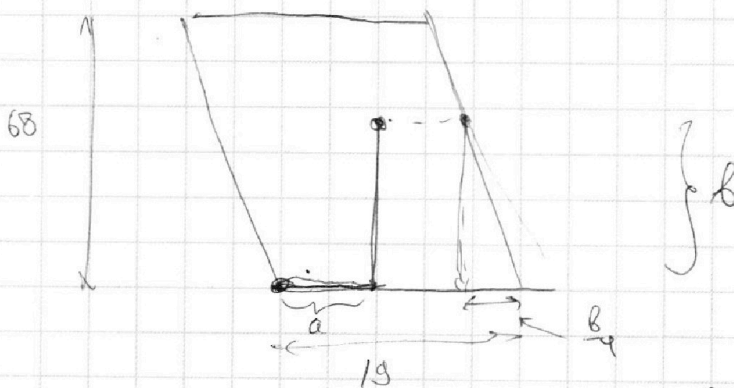
1) $y_2 > y_1$: $4a + b = 40$
 $(a, b) = (0, 40), (1, 36), (2, 32), \dots, (9, 4), (10, 0)$

2) $y_2 < y_1$:

$$4a - b = 40$$

$b = 4(a - 10)$, $a \leq 19$ — пер. длина параллелогра.

$$(a, b) = (10, 0), (11, 4), (12, 8), \dots, (18, 32), (19, 36)$$



кас. б-о возможных абсцисс — ~~верши~~ ~~тогда~~
 миним. точки для пар с фактор. (a, b) :
 $68 - b + 1$

кас. б-о возможных абсцисс: $19 - \frac{b}{4} - a + 1$ либо

$$19 - a - \frac{b}{4} \quad (1 \text{ абсцисс} - \text{с увеличением})$$



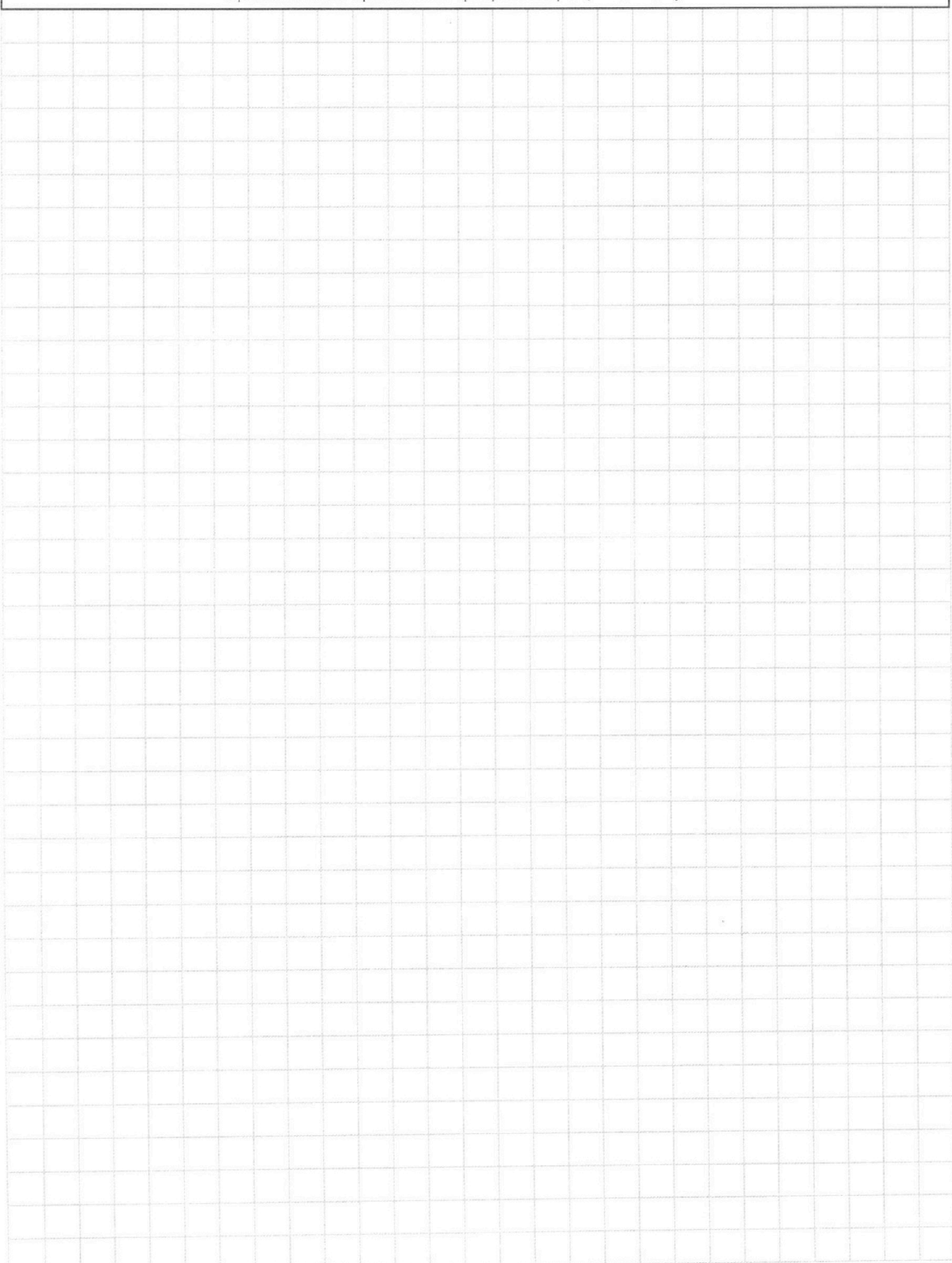
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} \log_7^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4 \\ \log_7^4 y + 6 \log_y 7 = \log_{y^2} (7^5) - 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\log_7(6x))^4 - \frac{2}{\log_7(6x)} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\log_7(6x)} - 4 \\ (\log_7 y)^4 + \frac{6}{\log_7 y} = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{\log_7 y} - 4 \end{cases}$$

Заменим: $t = \log_7(6x)$, $v = \log_7 y$

$$\begin{cases} t^4 - \frac{2}{t} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{t} - 4 \\ v^4 + \frac{6}{v} = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{v} - 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t^4 = \frac{7}{2} \cdot \frac{1}{t} - 4 \\ v^4 = \frac{-7}{2} \cdot \frac{1}{v} - 4 \end{cases} \quad | \cdot (-) \quad \begin{matrix} v+t \\ 4v^3 - \frac{7}{2} \cdot \frac{1}{v^2} = 0 \end{matrix}$$

$$t^4 - v^4 = \frac{7}{2} \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{v} \right)$$

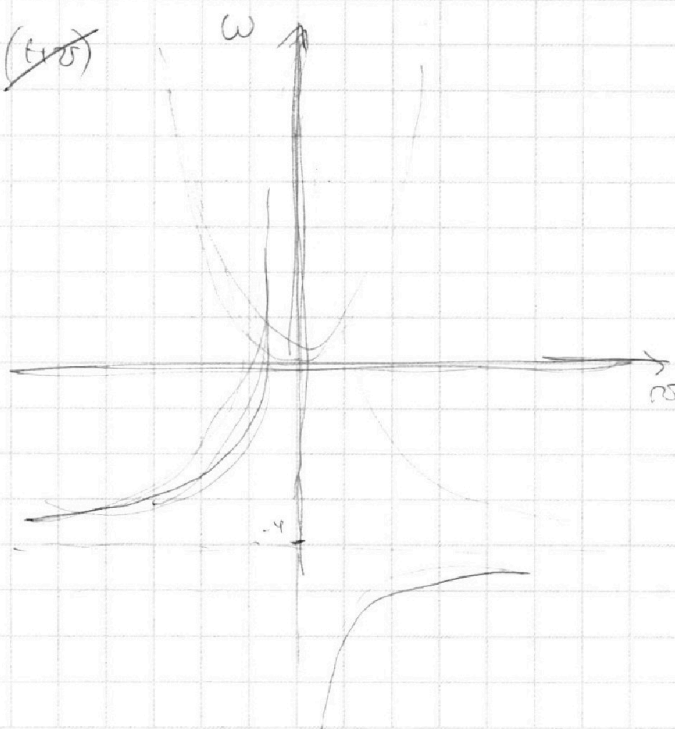
$$vt(t^2 - v^2)(t - v)(t + v) = \frac{7}{2}(t + v)$$

$$v = -t$$

$$v + t = 0$$

log

$$v, t \neq 0 \quad \checkmark$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



тоже так счит. (a, b). $(69a - \frac{b}{4})(17 - \frac{b}{4}) +$
 $+ (68a - \frac{b}{4})(52 - \frac{3b}{4}) = 69 \cdot 17 - \frac{69b}{4} - 17a + \frac{ab}{4} + \frac{b^2}{16} - \frac{17b}{4} +$
 $+ 68 \cdot 52 - \frac{3 \cdot 68b}{4} - 52a + \frac{3ab}{4} - \frac{13b}{4} + \frac{3b^2}{16} =$
 $= (17 + 17^2 \cdot 4 + 17 \cdot 4 \cdot 52) - \frac{69 + 17}{4} b - (51 + 13)b - 52a - 69a +$
 $+ ab + \frac{b^2}{4} = 17(1 + 4 \cdot 17(52 + 17)) - (1 + 4 \cdot 17 \cdot 69) b +$

$$54 \cdot 17 = 61$$

$$\begin{array}{r} 68 \cdot \\ 69 \\ \hline 612 \\ 468 \\ \hline 4692 \end{array}$$

$$\frac{69 + 17}{4} = \frac{86}{4} = \frac{43}{2}$$

$$\frac{43}{2} \cdot 64 = 21 \cdot 64 = \frac{1}{2} \cdot$$

$$= 85 \frac{1}{2}$$

$$= 17 \cdot 4692 - (85 \frac{1}{2} b) - 69a + ab + \frac{b^2}{4}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



~1

$$ab \geq 2^7 3^{11} 5^{14}$$

$$bc \geq 2^{13} 3^{15} 5^{18}$$

$$ac \geq 2^{14} 3^{17} 5^{23}$$

$$abc \geq 2^{7+13+14} 3^{11+15+17} 5^{14+18+23}$$

$$abc \geq 2^{\frac{7+13+14}{2}} \cdot 3^{\frac{11+15+17}{2}} \cdot 5^{\frac{14+18+23}{2}}$$

$$= 2^{17} \cdot 3^{21} \cdot 5^{28}$$

$$a = 2^{x_1} 3^{y_1} 5^{z_1}$$

$$b = 2^{x_2} 3^{y_2} 5^{z_2}$$

$$c = 2^{x_3} 3^{y_3} 5^{z_3}$$

$$ab: x_1 + x_2 \geq 7$$

$$bc: x_2 + x_3 \geq 13$$

$$ac: x_1 + x_3 \geq 14$$

$$5 \quad abc \geq 2^{17} 3^{21} 5^{28}$$

$$y_1 + y_2 \geq 11 \quad z_1 + z_2 \geq 14$$

$$y_2 + y_3 \geq 15 \quad z_2 + z_3 \geq 18$$

$$y_1 + y_3 \geq 17 \quad z_1 + z_3 \geq 23$$

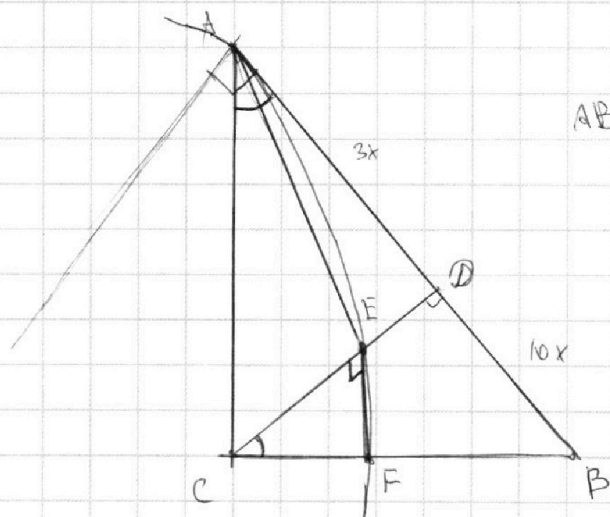
$$\begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = 3 \\ x_3 = 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 = 6 \\ y_2 = 5 \\ y_3 = 11 \end{cases}$$

$$z_1 + z_3 \geq 22$$

$$29 + 14 = 43$$

~2



ABUEF

$$\frac{AB}{BD} = \frac{13}{10} - 1$$

$$\frac{AB \cdot AD}{AB \cdot BD} = \frac{3}{10}$$

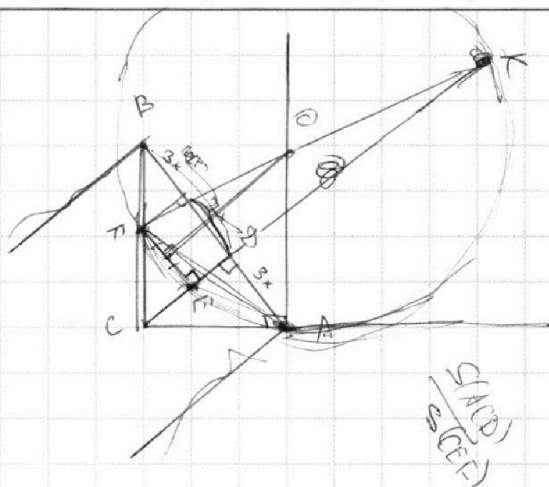
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$\triangle ABC \sim \triangle E$

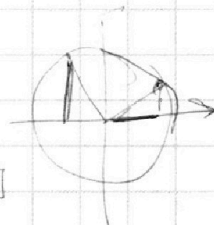
$\sqrt{2} \angle FBA = \angle FAC \Rightarrow \frac{FB}{AC} = \frac{BC}{FC}$

$\frac{BC}{AC} = \frac{BC}{FC}$

N3

$[0, 5\pi] \rightarrow [0, 5\pi]$

$5\pi \cos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x \Rightarrow x \in [-\frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}]$



$\sin x = \cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = \sin\left(\frac{x}{5} + \frac{3\pi}{10} + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{x}{5} + \frac{4\pi}{5}\right)$

$\begin{cases} x = \frac{x}{5} + \frac{4\pi}{5} + 2\pi n \\ x = \pi - \frac{4\pi}{5} - \frac{x}{5} + 2\pi k \end{cases}$

$\begin{cases} 5x = x + 4\pi + 10\pi n \\ 5x = 5\pi - 4\pi - x + 10\pi k \end{cases}$

$\begin{cases} x = \pi + \frac{5}{2}\pi n \\ x = \frac{\pi}{6} + \frac{5}{3}\pi k \end{cases}$

$1) -\frac{2\pi}{2} \leq \pi + \frac{5}{2}\pi n \leq \frac{7\pi}{2}$

$\frac{1}{6} - \frac{5}{3} = \frac{1-10}{6} = -\frac{9}{6} = -\frac{3}{2}$

$\frac{1}{6} + \frac{5}{3} = \frac{1+10}{6} = \frac{11}{6}$

$-3\pi - \pi \leq 2.5\pi n \leq 7$

$-5 \leq 5n \leq 5$

$-1 \leq n \leq 1$

$2) -\frac{3\pi}{2} \leq \frac{\pi}{6} + \frac{5\pi k}{3} \leq \frac{7\pi}{2}$

$-8\pi \leq 5\pi k \leq 21$

$-9 \leq k + 10k \leq 21$

$-10 \leq 10k \leq 20$

$-1 \leq k \leq 1$

$x = -\frac{3\pi}{2} + \frac{7\pi}{2}$

$x = \frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}, \frac{7\pi}{2}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

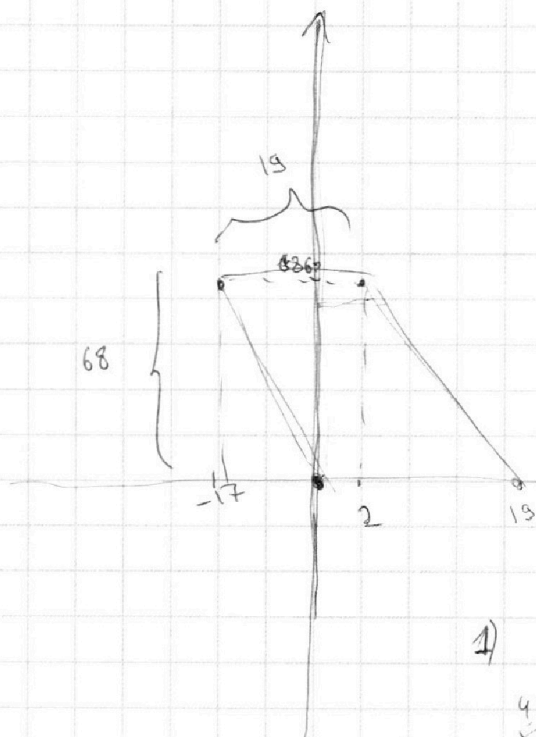
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

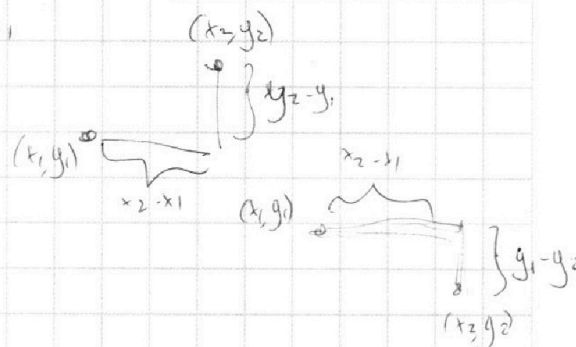
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$4(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 40$$

$$O(0,0), P(-17,68), Q(2,68), R(19,0)$$



Пуск $x_2 > x_1$



$$1) y_2 = x_1$$

$$4a + b = 40$$

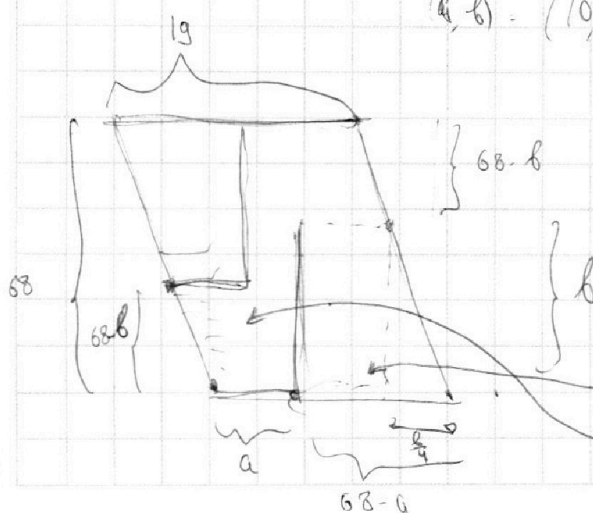
$$(a, b) = (0, 40), (1, 36), (2, 32), \dots, (9, 4), (10, 0)$$

$$2) y_2 < y_1$$

$$4a - b = 40$$

$$68 \geq b = 4(a - 10) \quad (10 = a \leq 19)$$

$$(a, b) = (10, 0), (11, 4), (12, 8), (13, 12), (14, 16), (15, 20), (16, 24), (17, 28), (18, 32), (19, 36)$$



$$\frac{68}{4} - \frac{b}{4} = 2 - \frac{1}{4}$$

$$68$$

$$68 - 17 = 51$$

~~каждый~~ ~~каждый~~ ~~каждый~~

$$68 - a - \frac{b}{4} = 1 \quad (*)$$

$$\text{или } 68 - a - \frac{b}{4} = 1 \quad (**)$$

$$(*) \cdot \frac{68 - b}{4} - 17 = \frac{b}{4}$$

$$\rightarrow (**) \cdot 68 - b - 17 \cdot \frac{b}{4} = 52 - \frac{3b}{4}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$x + 3ay - 7b = 0$$

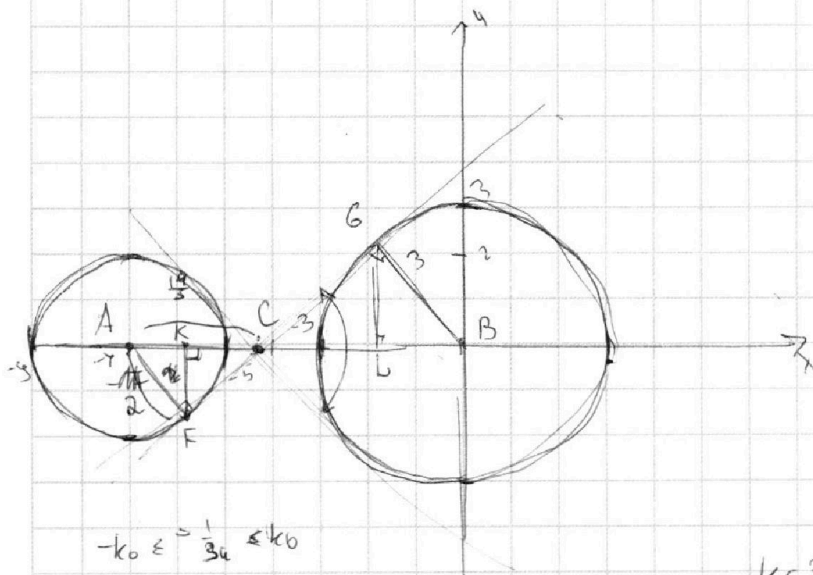
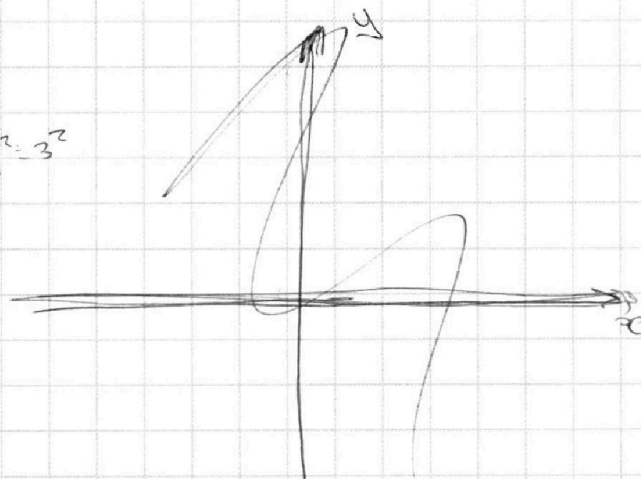
$$(x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0$$

$$(x+7)^2 + y^2 + 45 = 49$$

$$(x+7)^2 + y^2 = 22$$

$$x^2 + y^2 = 3^2$$

1) $a=0$: $x=7b$
 2) $a \neq 0$: $y = -\frac{x}{3a} + \frac{7b}{3a}$



$$-k_0 \in \left[-\frac{1}{3a}, k_0\right]$$

$$AC = \frac{2}{5} \cdot 7 = \frac{14}{5}$$

$$CB = 7 \cdot \frac{3 \cdot 7}{5} = \frac{21}{5}$$

$$FC^2 = \frac{196}{25} - 4 = \frac{96}{25} = \frac{4 \cdot 24}{25} = \frac{4 \cdot 6}{5 \cdot 5}$$

$$FC = \frac{4\sqrt{6}}{5}$$

$$FK = \frac{14}{5} = 2 \cdot \frac{4\sqrt{6}}{5}$$

$$FK = \frac{4\sqrt{6}}{5}$$

$$GL = \frac{3}{2} \cdot \frac{4\sqrt{6}}{5} = \frac{6\sqrt{6}}{5}$$

k

$$k_0 \geq \frac{1}{3a} \geq -k_0$$

$$\frac{1}{3a} \leq \frac{5\sqrt{6}}{124}$$

$$a \geq \frac{4}{5\sqrt{6}} \text{ или } a < 0$$

$$-\frac{4}{5\sqrt{6}} \leq a \leq \frac{4}{5\sqrt{6}}$$

$$KC^2 = CF^2 - KC^2 = \frac{4 \cdot 24}{25} - \frac{4 \cdot 24}{49}$$

$$= 4 \cdot 24 \cdot \frac{49 - 25}{49 \cdot 25} = \frac{2^2 \cdot 24^2}{7^2 \cdot 5^2}$$

$$KC = \frac{2 \cdot 24}{7 \cdot 5} = \frac{48}{35}$$

$$CL = \frac{3}{2} KC = \frac{3}{2} \cdot \frac{48}{35} = \frac{72}{35}$$

$$k_L = \frac{72 - 48}{35} = \frac{24}{35} = \frac{24}{7}$$

$$k_0 = \frac{GL + KF}{k_L}$$

$$k_0 = \frac{GL}{CL} = \frac{\frac{6\sqrt{6}}{5}}{\frac{72}{35}} = \frac{5 \cdot 6\sqrt{6}}{72 \cdot 12} = \frac{5\sqrt{6}}{12}$$