



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



$$\begin{cases} a+b=14 \\ a+b=2 \\ b+c=17 \\ a+b+c=24 \end{cases} \quad \begin{matrix} a=7 \\ c=17 \\ a+b+c=24 \end{matrix} \quad \begin{matrix} b=7 \\ a=7 \\ c=17 \end{matrix} \quad \begin{matrix} AB=13 \\ 80 \\ a=7 \\ b=2 \\ c=20 \end{matrix}$$

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^7 3^{11} 5^{14}$, bc делится на $2^{13} 3^{15} 5^{18}$, ac делится на $2^{14} 3^{17} 5^{43}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой AC в точке A , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке E , а катет BC — в точке F . Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1,3$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF .

3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0, \\ (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_7^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4, \quad \text{и} \quad \log_7^4 y + 6 \log_y 7 = \log_{y^2} (7^5) - 4.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-17;68)$, $Q(2;68)$ и $R(19;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно на границе) и таких, что $4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 60, $SA = BC = 10$.

а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .

б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 3$, а радиус сферы Ω равен 4.

$$\begin{aligned} 14 \times 18 &= 12 + 20 = 32 \\ 32 + 43 &= 75 \\ 26 + 17 &= 30 + 6 + 7 = 43 \\ 43 &= 21,5 \end{aligned}$$

© МФТИ, 2023

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N1.

$$ab: 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{19}$$

$$bc: 2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{18}$$

$$ac: 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{43}$$

$$abc_{\min} = ?$$

Реш. $ac: 2^{14}$, то 2 в abc имеет мин степень 14, если
допустить, что все степени наименьшее возможные, т.е.

$$\begin{cases} a_2 + c_2 = 14 \\ a_1 + b_1 = 7 \\ b_2 + c_2 = 13 \end{cases}, \text{ где } a_1, c_1, b_1 - \text{такая степень двойки входящая в число},$$

или степень какого-то числа больше, то
и суммарная степень $a_1 + c_1 + b_1$ - тоже

больше, т.е. если данная шестерка имеет решение,
то она - мин, тогда шестерка все строки:

$$2 \cdot a_2 + c_2 \cdot 2 + b_2 \cdot 2 = 34, \text{ т.е. } a_2 + c_2 + b_2 = 17, \text{ т.е. мин степень}$$

2 это 2^{17} , аналогично для степени тройки:

$$\begin{cases} a_3 + b_3 = 11 \\ b_3 + c_3 = 15 \\ a_3 + c_3 = 17 \end{cases}, \text{ т.е. } 2a_3 + 2b_3 + 2c_3 = 43, \text{ т.е. } a_3 + b_3 + c_3 = 21, 5,$$

т.к. a, b, c - натур. числа, то и степени должны

быть целыми, т.е. 21, 5 - мин сумма степеней, то мин возмож.
ная в натуральных значениях 22 , проверим, что она возможна:

т.е. должны выполняться неравенства $a_3 + b_3 \geq 11, b_3 + c_3 \geq 15, a_3 + c_3 \geq 17$,
тогда $c_3 = 11, b_3 = 4, a_3 = 7$, тогда $a_3 + b_3 = 11, b_3 + c_3 = 15, a_3 + c_3 = 18 > 17$,

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$a_3 + c_3 + b_3 = 22$, т.е. мин степень тройки - 22; аналогично
для 5:

$$\begin{cases} a_5 + b_5 = 14 \\ b_5 + c_5 = 18 \\ a_5 + c_5 = 43 \end{cases}, \text{ тогда } a_5 + b_5 + c_5 \geq 43$$

$$, \text{ тогда } 2a_5 + 2b_5 + 2c_5 = 75, \text{ т.е. } a_5 + b_5 + c_5 = 37,5,$$

тогда для натуральных чисел $a_5 + b_5 + c_5 = 38$, проверим

выполнение условий: ~~$a_5 + b_5 \geq 14$~~ т.к. $a_5 : 5^{43}$, то и $a_5 b_5 c_5 : 5^{43}$,

т.е. мин сумма 43,

$$\begin{cases} a_5 + b_5 \geq 14 \\ b_5 + c_5 \geq 18 \\ a_5 + c_5 \geq 43 \end{cases}$$

проверим выполнение

условий:

$$\begin{cases} a_5 + b_5 \geq 14 \\ b_5 + c_5 \geq 18 \\ a_5 + c_5 \geq 43 \\ a_5 + b_5 + c_5 = 43 \end{cases}$$

, тогда $b_5 = 0, a_5 = 20, c_5 = 23$,
неравенства выполняются,
т.е. 43 - мин степень 5, тогда:

$$\text{Ответ: } abc_{\min} = 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Когда $\angle CAF = 90^\circ - \alpha - \beta$, тогда $\triangle CAF \sim \triangle DAE$, тогда

из подобия: $\frac{CF}{AC} = \frac{ED}{AD}$, т.к. $\angle CEF = \angle CFE = \alpha$,

то пусть $CF = y$, тогда из подобия $\triangle ABC$:

$$CE = y \cdot \frac{AC}{AB} = y \cdot \frac{\sqrt{39}}{13} = y \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{13}}, \text{ тогда, т.к. } CD = \sqrt{30}x, \text{ то}$$

$$ED = \sqrt{30}x - y \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{13}}, \text{ тогда}$$

$$\frac{y}{\sqrt{39}x} = \frac{\sqrt{30}x - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{13}}y}{3x}$$

$$3y + \sqrt{\frac{39 \cdot 3}{13}} y = \sqrt{39} \cdot \sqrt{30} x$$

$$6y = 3\sqrt{130}x$$

$$y = \frac{\sqrt{130}}{2}x, \text{ т.к. отношение площадей подобных}$$

треугольников пропорционально квадрату коэффициента подобия, то: ($\triangle ACD \sim \triangle CEF$ по углам)

$$\frac{S_{ACD}}{S_{CEF}} = \left(\frac{AB}{CF}\right)^2 = \frac{138 \cdot 138}{\frac{130}{4}x^2} = \frac{13 \cdot 4}{10} = \frac{26}{5}$$

$$\text{Ответ: } \frac{26}{5}$$

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



N2.

Дано:

$\triangle ABC$ - кр.
 $\angle C = 90^\circ$
 CD - высота
 (O, R) - в-окр
 $W \cap CD = E$
 $W \cap BC = F$
 $AB \parallel EF$
 $\frac{AB}{BD} = \frac{13}{10}$
 $S_{ACD} = 7$
 S_{CEF}

Пусть $BD = 10x$, тогда $AD = 3x$, тогда пусть
 $\angle COA = \alpha$, тогда $\angle CAB = 90^\circ - \alpha$, $\angle CDB = 90^\circ - \alpha$,
 $\angle ACD = \alpha$, тогда
 из подобия:

$$\frac{AD}{CD} = \frac{CD}{BD}, \text{ т.е.}$$

$$CD = \sqrt{3x \cdot 10x} = \sqrt{30}x,$$

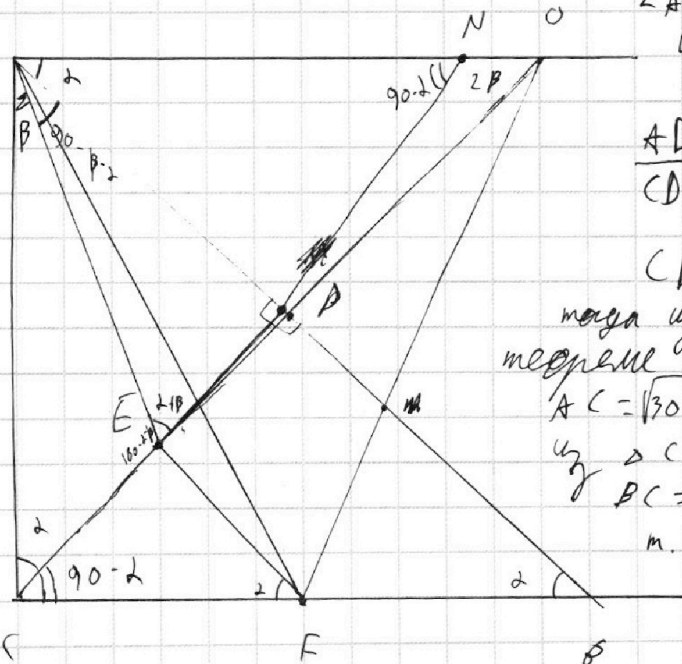
тогда из $\triangle ADC$ по
 теореме Пифагора:

$$AC = \sqrt{30x^2 + 9x^2} = \sqrt{39}x$$

из $\triangle CDB$:

$$BC = \sqrt{100x^2 + 30x^2} = \sqrt{130}x,$$

т.к. A, E, F - принадлежат
 в-окружности,
 то как радиусы:



$AO = OE = OF$, тогда из $\triangle OAE$ т.к.

$\angle OAE = 90^\circ - \beta = \angle OEA$, т.к.

$\angle OAC = 90^\circ - \alpha$, AC - кас. к W , то $AC \perp OA$, т.е.

$\angle OAB = 90^\circ - (90^\circ - \alpha) = \alpha$, тогда $\angle PAE = 90^\circ - \beta - \alpha$

тогда $\angle AED = \beta + \alpha$, $\angle AOE = 2\beta$, $\angle CEF = 180^\circ - \alpha - \beta$,

$\angle ACD = \alpha$, пусть $CD \cap AO = N$, т.к. $\angle OAC = 90^\circ$, то

$\angle ANC = 90^\circ - \alpha$, тогда $\angle OND = 90^\circ + \alpha$, тогда $\angle NEO =$

$= 90^\circ - 2\beta - \alpha$, тогда, т.к. $EF \parallel AB$, $AB \perp CD$, то $EF \perp CD$, т.е.

$\angle DEF = 90^\circ$, то $\angle OEF = 90^\circ - \beta - \alpha = \angle EFO$ (из $\triangle EFO$), тогда

$\angle EOF = 180^\circ - 4\beta - 2\alpha$, тогда из $AO \parallel CB$ (т.к. $AC \perp AO$, $AC \perp CB$),

то $\angle NOF = \angle OFB = 180^\circ - 4\beta - 2\alpha + \beta = 180^\circ - 3\beta - 2\alpha$, тогда $\angle AFE = \angle AFO =$

$= 180^\circ - (180^\circ - 3\beta - 2\alpha) = \beta + 2\alpha$ (из $\triangle EFO$), тогда $\angle CFA = \beta + 2\alpha - \alpha = \beta$, тогда $\angle CFA = \beta + \alpha$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№3.

$$\arccos(\sin x) = \frac{3x}{2} + x$$

$$\arccos(\sin x) = \frac{3x}{10} + \frac{x}{5}, \text{ пусть } x = k + 2\pi n, \text{ тогда, где } k \in [0; 2\pi n), \text{ где } n \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{x}{2} - k = \frac{3x}{10} + \frac{x}{5}$$

$$\frac{x}{2} - k = \frac{3}{10}x + \frac{k + 2\pi n}{5}$$

$$\frac{1}{5}x = \frac{6}{5}k + \frac{2\pi n}{5}$$

$$x = 6k + 2\pi n, \text{ т.к. } 6k + 2\pi n = 8x, \text{ где } k \in [0; 2\pi n)$$

$$k = \frac{x}{6}, \text{ где } n \neq 0: \text{ где } n \in \mathbb{Z}, \text{ где } n = 0, \text{ т.е.}$$

$$\frac{x}{2} - \frac{x}{6} = \frac{3}{10}x + \frac{k}{5} + \frac{2\pi n}{5} \quad x = 6k$$

$$k = \frac{x}{6}, \quad x = k + 0, \text{ т.е.}$$

$$\text{Ответ: } \frac{x}{6}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№5.

$$\text{ОДЗ: } x > 0, y > 0, y \neq 1, x \neq \frac{1}{6}$$

пусть $\log_7 6x = a$, $\log_7 y = b$, тогда:

$$\begin{cases} a^4 - \frac{2}{a} = \frac{1,5}{a} - 4 \\ b^4 + \frac{6}{b} = \frac{2,5}{b} - 4 \end{cases} \quad \begin{cases} a^5 - 3,5 + 4a = 0 \\ b^5 + 3,5 + 4b = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^5 + 4a - 3,5 = 0 \\ b^5 + 4b + 3,5 = 0 \end{cases}$$

, т.е. если a_1 - решение I уравнения,

т.е. $a^5 + 4a = 3,5$, то $(-a_1)^5 + 4(-a_1) = -a_1^5 + 4(-a_1) =$

$= -(a_1^5 + 4a_1) = -3,5$, т.е. $-a_1 = b_1$, где b_1 - решение II

уравнения, т.е. $a_1 + b_1 = 0$, а т.к. $a + b = \log_7 6x + \log_7 y =$

$= \log_7 6xy = 0$, т.е. $6xy = 1$, т.е. $xy = \frac{1}{6}$, при $x = \frac{1}{6}$, $y = 1$,

т.е. если x ~~не подходит по ОДЗ~~ то y тоже,

если $x < 0$ то $y < 0$, т.е. ~~никогда не бывает~~

т.к. $f(a) = a^5 - 3,5 + 4a$ - возр. функция, $f(a) = 3,5 - 4a$ - убыв., а то

$a^5 = 3,5 - 4a$ - имеет одно решение

т.к. $f(b) = b^5 - 3,5 - 4b$ - возр. функция, $p(b) = -4b - 3,5$ - убыв., то

$b^5 = -4b - 3,5$ - имеет одно решение, т.е.

a, b , где $a + b = 0$, т.е. $xy = \frac{1}{6}$ - единствен.

ное значение произведения.

Ответ: $\frac{1}{6}$

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



N 6.

Р. е. пусть $4x_2 + y_2 = 40 + k$

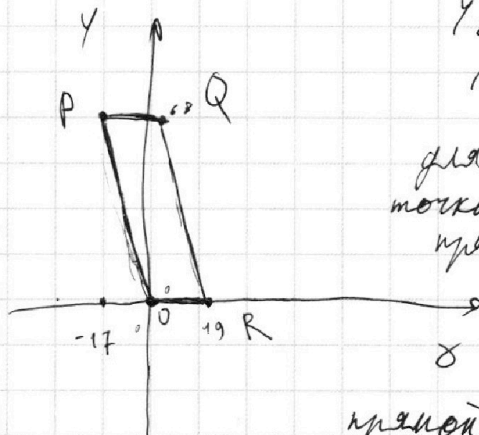
Дано:

$O(0;0)$

$P(-17;68)$

$Q(2;68)$

$R(19;0)$



$$y_2 = 40 + k - 4x_2, \text{ тогда}$$

$$y_1 + 4x_1 = k$$

$$y_1 = -4x_1 + k, \text{ т.е.}$$

для любого целого k , любая точка в $\mathbb{R}^2$ лежащая на прямой $y_2(x_2)$ будет парой для модели $\mathbb{R}^2$ А лежащей на

$$4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$$

$$4x_2 + y_2 - 4x_1 - y_1 = 40$$

прямой $y_1(x_1)$, т.е. ~~прямые~~ (данные прямые не пересекаются, это т.к. они параллельны, т.к. коэффициенты при x и y одинаковы, они ~~не~~ отличаются сдвигом на 40 по оси OX) для каждого k есть a_k в диапазоне и b_k , то кол-во пар $a_k \cdot b_k$, найдём ~~для~~ k , для которых есть целое кол-во решений в $\mathbb{Z}$:

Наклон OP и RQ равен -4 , т.е. ($k \geq 0$ чтобы не считать повторные прямые ($y_1' = y_2''$)), т.е.

$$k \in [0; 19], \text{ т.е.}$$

Ответ: $18 \cdot 20 \cdot 18$



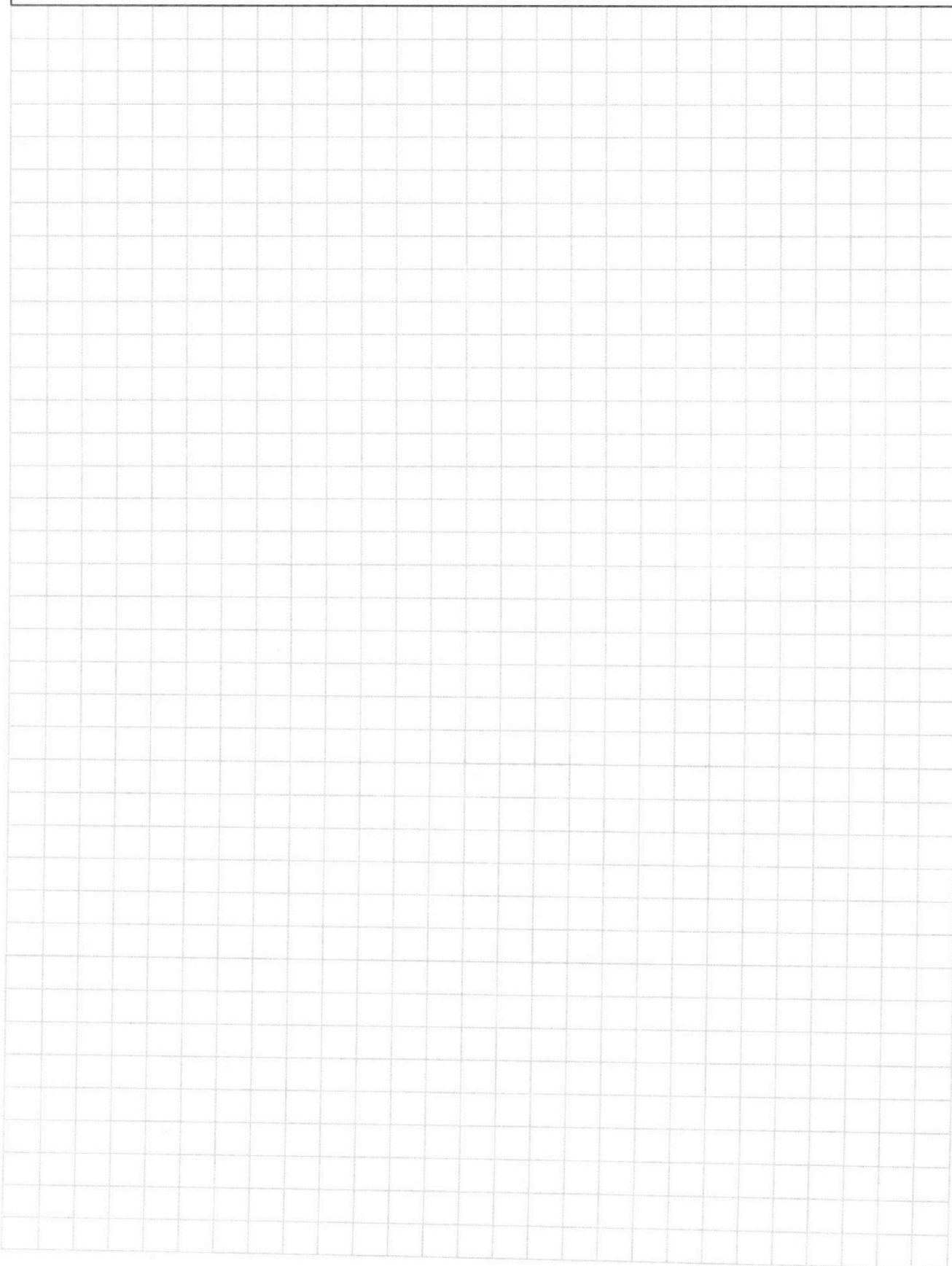
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

 **МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



N2.

$$\log_a c = \frac{\log_b c}{\log_b a}$$

$$\begin{pmatrix} 870 \\ 470 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} \cancel{8} \neq \frac{1}{6} \\ \cancel{4} \neq 1 \end{matrix}$$

$$4^{16} = 2$$

$$\log_{68} 49$$

$$\log_{6x} 7 = \frac{\log_7 7}{\log_7 6x} = \frac{1}{\log_7 6x}$$

$$\log_{6x} 6x = a$$

$$a = \log_{6x} 7$$

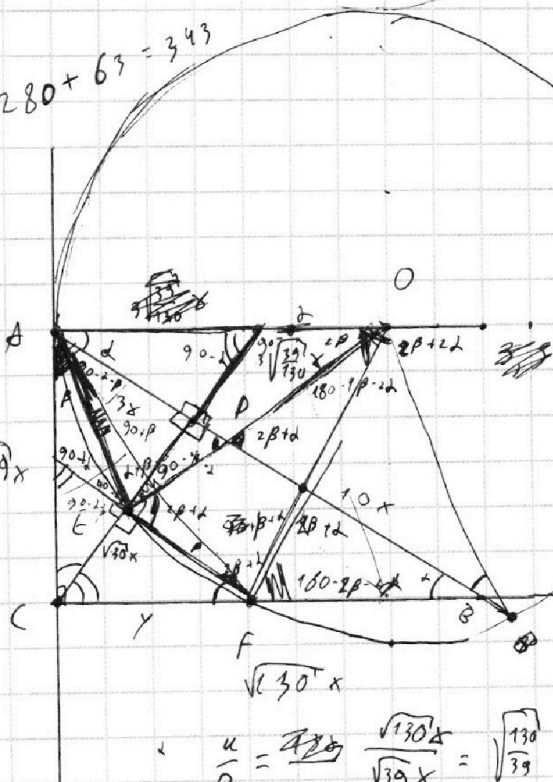
$$a^4 - 2a^2 = \frac{1}{a}$$

$$49 \cdot 7 = 280 + 63 = 343$$

$$a = \log_{6x} 7$$

$$b = \log_7 7$$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \log_{6x} \sqrt{19} x$$



$$\frac{1}{a^4} - 2a = 1, 5a - 4$$

$$\frac{1}{a^4} + 4 = 3, 5a - 4$$

$$1 + 4a^4 = 3, 5a^5$$

$$3, 5a^5 - 4a^4 = 0$$

$$3, 5a^5 - 4a^4 = 0$$

$$3, 5a^5 - 4a^4 = 0$$

$$3, 5a^5 - 4a^4 = 0$$

$$\frac{1}{b^4} + 6b = 2, 5b - 4$$

$$\frac{1}{b^4} + 6b = 2, 5b - 4$$

$$1 + 6b^5 + 4b^5 = 0$$

$$\begin{cases} 3, 5a^5 - 4a^4 - 1 = 0 \\ 3, 5b^5 + 4b^5 + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\frac{0}{4} = \sqrt{\frac{39}{130}}$$

$$\frac{\sqrt{130}x}{\sqrt{39}x} = \sqrt{\frac{130}{39}}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

