



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



- [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^6 3^{13} 5^{11}$, bc делится на $2^{14} 3^{21} 5^{13}$, ac делится на $2^{16} 3^{25} 5^{28}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
- [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой AC в точке A , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке E , а катет BC – в точке F . Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1,4$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF .
- [4 балла] Решите уравнение $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$.
- [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

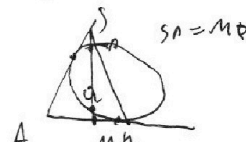
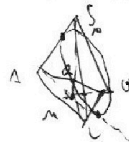
- [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5, \quad \text{и} \quad \log_{11}^4 (0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,125y^3} (11^{-13}) - 5.$$

$$7 \log_{11} = \begin{matrix} 5 \cdot 450 \\ 25 \cdot 90 \end{matrix}$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

- [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-15;90)$, $Q(2;90)$ и $R(17;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$.
- [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 180, $SA = BC = 20$.
 - Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 6$, а радиус сферы Ω равен 8.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{№1. } (abc)^2: 2^{36} \cdot 3^{59} \cdot 5^{52}; \text{ тогда}$$

$$(abc)^2: 2^{36} \cdot 3^{60} \cdot 5^{52} \text{ (н.д. мин. вхождения)}$$

^{н.д.}
н.д. числа в $(abc)^2$ -четна):

$$\text{тогда } abc: 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{26};$$

$$abc - \text{мин. } 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{26};$$

$$\text{Ответ: } 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{26}.$$

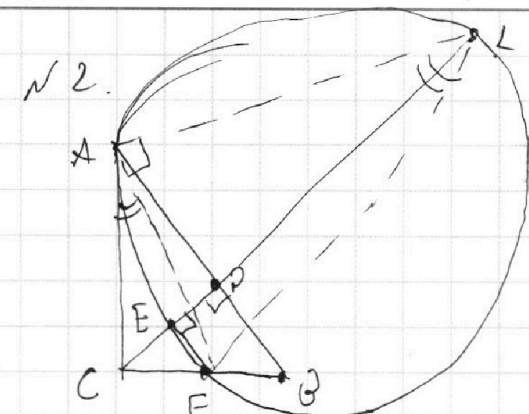
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



1) Окруж. ω — оскр., кас. AC в A и хорз. угол E и F;

2) $CE \cap \omega = L$; тогда FL — диаметр ω
(т.к. $\angle LEF = 90^\circ$);

3) $AP = 2x$; $BP = 5x$; $\triangle CBP \sim \triangle ACP$;

$$\frac{2x}{5x} = \frac{CP}{5x}; \quad CP = \sqrt{10}x$$

4) $\angle ALF = \angle FAC$ (по т. обгн. м.м. касат. и хорды);
 $\angle LAF = 90^\circ$ (как оскр. на гудм.);

$\triangle LAF \sim \triangle ACF$ (по т. обгн. м.м.); $\frac{AF}{CF} = \frac{LF}{AF}$; $AF^2 = CF \cdot LF$;

5) $CB = \sqrt{0x^2 + 25x^2} = 5x$ (по т. Пиф.); $\triangle CFE \sim \triangle CBP$;

$$AF^2 = CF^2 + AC^2 \text{ (по т. Пиф.)}; \quad CF^2 + 14x^2 = CF \cdot LF;$$

6) $CA^2 = CE \cdot CL$ (как оскр. м.м. и оскр. ω);

$$14x^2 = CE \cdot CL. \quad CE = \frac{CF}{\sqrt{10}} \cdot \sqrt{10} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}} CF \text{ (т.к. } \triangle CEF \text{ и } \triangle CBP \text{ — подобн.)}$$

$$7) \quad CL = \frac{14x^2}{CE} = \frac{14x^2}{\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}} CF} = \frac{\sqrt{10} \cdot 14x^2}{\sqrt{10} CF}, \quad LE = CL - CE =$$

$$= \frac{\sqrt{10} \cdot 14x^2}{\sqrt{10} CF} - \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}} CF; \quad \triangle LEF \text{ — прямоугольн., тогда}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$LF = \sqrt{LE^2 + EF^2} = \sqrt{\left(\frac{5}{\sqrt{35}} CF\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{35}}{10} \cdot 14k^2 - \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{35}} CEF\right)^2};$$

$$CF^2 + 14k^2 = CF \cdot \sqrt{\frac{25}{35} CF^2 + \frac{35}{10} \cdot 14^2 k^4 + \frac{10}{35} CF^4 - 28 CEF^2 k^2} \quad | : CF^2$$

$$CF^4 + 28 CEF^2 k^2 + 14^2 k^4 = CF^4 \cdot \frac{25}{35} + \frac{35}{10} \cdot 14^2 k^4 + \frac{10}{35} CF^4 - 28 CEF^2 k^2;$$

$$28 CEF^2 k^2 + 14^2 k^4 = \frac{35}{10} \cdot 14^2 k^4 - 28 CEF^2 k^2 \quad | : k^2$$

$$28 CEF^2 + 14^2 k^2 = \frac{35}{10} \cdot 14^2 k^2 - 28 CEF^2;$$

$$56 CEF^2 = 14^2 \cdot \frac{25}{10} k^2; \quad CF = \sqrt{\frac{14 \cdot 25}{10 \cdot 56}} k =$$

$$= \frac{\sqrt{35}}{2} k; \quad \triangle CEF \text{ vs } \triangle AEC; \quad k = \frac{AC}{CF} = \frac{\frac{\sqrt{14}}{2} k}{\frac{\sqrt{35}}{2} k} =$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{14}}{2} \cdot 2}{\frac{\sqrt{35}}{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}; \quad \frac{S_{\triangle AEC}}{S_{\triangle CEF}} = k^2 = \frac{8}{5}. \quad \text{Ответ: } \frac{8}{5}.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



реш.

$$10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x \quad ;$$

$$\left\{ \begin{aligned} 10 \cdot \left(\frac{\pi}{2} - (x + 2\pi n) \right) &= 9\pi - 2x; n \in \mathbb{Z} \\ 10 \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - x + 2\pi k \right) \right) &= 9\pi - 2x; k \in \mathbb{Z} \end{aligned} \right. \quad ;$$

$$\left\{ \begin{aligned} 5\pi - 10x + 20\pi n &= 9\pi - 2x; n \in \mathbb{Z} \\ -5\pi + 10x - 20\pi n &= 9\pi - 2x; n \in \mathbb{Z} \end{aligned} \right. \quad ;$$

$$\left\{ \begin{aligned} 8x + 4\pi + 20\pi n &= 0 \\ 12x - 14\pi - 20\pi k &= 0 \end{aligned} \right. \quad ; \quad \left\{ \begin{aligned} x &= -\frac{\pi}{2} + 2,5\pi n; n \in \mathbb{Z} \\ x &= \frac{7}{6}\pi + \frac{5}{3}\pi k; k \in \mathbb{Z} \end{aligned} \right.$$

~~Ответ: $\left\{ -\frac{\pi}{2} + 2,5\pi n; \frac{7}{6}\pi + \frac{5}{3}\pi k; n, k \in \mathbb{Z} \right\}$~~

$$0 \leq \arccos(\sin x) \leq \pi; \quad 0 \leq 9\pi - 2x \leq 10\pi;$$

$$-0,5\pi \leq x \leq 4,5\pi; \quad \left\{ \begin{aligned} x &= -\frac{\pi}{2} + 2,5\pi n; n \in \mathbb{Z} \\ x &= \frac{7}{6}\pi + \frac{5}{3}\pi k; k \in \mathbb{Z} \end{aligned} \right. ;$$

merge

$$\left\{ \begin{aligned} x &= -\frac{\pi}{2} \\ x &= 2\pi \\ x &= 4,5\pi \\ x &= \frac{7}{6}\pi \\ x &= \frac{17}{6}\pi \end{aligned} \right.$$

Ответ: $\left\{ -\frac{\pi}{2}; 2\pi; 4,5\pi; \frac{7}{6}\pi \right\}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

знаем для любого a коэффициента,

только $\frac{4\sqrt{2}}{7}$ или только $-\frac{4\sqrt{2}}{7}$; можно

выбрать такое b ; а для остальных - нельзя;

т.е. только состав. для a не существует

каким образом можно в 2 условия;

$$\text{тогда } \begin{cases} -\frac{5}{6a} > \frac{4\sqrt{2}}{7} \\ -\frac{5}{6a} < -\frac{4\sqrt{2}}{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{5}{6} < \frac{4\sqrt{2}a}{7} \\ -\frac{5}{6} < -\frac{4\sqrt{2}a}{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > -\frac{35}{24\sqrt{2}} \\ a < \frac{35}{24\sqrt{2}} \end{cases}$$

тогда для $a = 0$; тогда

$$\text{ответ: } \left(-\frac{35}{24\sqrt{2}}; \frac{35}{24\sqrt{2}} \right)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



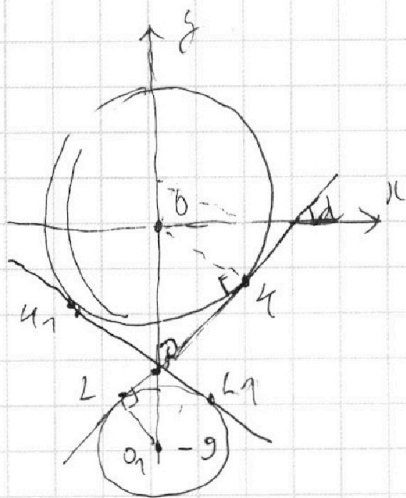
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№4.

$$(x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \Rightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x^2 + (y+9)^2 = 4 \end{cases} \quad \text{— 2 окружности радиусами } 5 \text{ и } 2; \text{ с } y \text{ в точках } 0 \text{ и } (0; -9).$$



L_4 — касат. к 2-й окр.

$$OU = 5; O_1L = 2;$$

$$L \in L \cap O_1O_2 = P.$$

$$\frac{OP}{O_1P} = \frac{5}{2}; \quad O_1P = \frac{5}{2} \cdot 9 = \frac{45}{2};$$

$$PO_1 = \frac{2}{2} \cdot 9 = \frac{18}{2}.$$

$$\cos \alpha = \frac{OU}{O_1P} = \frac{5}{\frac{45}{2}} = \frac{25}{45} = \frac{5}{9};$$

$$f_{yL} = \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{5}{9}\right)^2}}{\frac{5}{9}} = \frac{\frac{4\sqrt{2}}{9}}{\frac{5}{9}} = \frac{4\sqrt{2}}{5} \quad \text{— кр. касат. } L_4;$$

L_1, L_2 — вторая ось, касат. 2-й окр.; тогда $-\frac{4\sqrt{2}}{5}$ — кр.

касат. L_1, L_2 ; $5x + 6ay - 6 = 0$ — уравнение прямой.

при $a = 0$; $5x - 6 = 0$, при $6 = 0$ — 4 точки касания;

при $a \neq 0$; $y = -\frac{5x}{6a} + \frac{6}{6a}$; кр. касат. $-\frac{5}{6a}$;

значит мы можем выбрать любой $\frac{6}{6a}$ свободным членом;

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



р5.

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_{11} x = \log_{11}^2 \frac{1}{121} - 5;$$

$$\log_{11}^4 x - 6 \cdot \frac{1}{\log_{11} x} = -\frac{2}{3} \log_{11}^2 11 - 5;$$

$$\log_{11}^4 x - \frac{16}{3} \frac{1}{\log_{11} x} + 5 = 0;$$

$$\log_{11}^4 (0,58) + \log_{0,58} 11 = \log_{0,1258}^2 (11^{-13}) - 5;$$

$$\log_{11}^4 (0,58) + \log_{0,58} 11 = -\frac{13}{3} \log_{0,58}^2 11 - 5;$$

$$\log_{11}^4 (0,58) + \frac{16}{3} \frac{1}{\log_{11} 0,58} + 5 = 0;$$

$$\begin{cases} 3 \log_{11}^5 (0,58) + 15 \log_{11} 0,58 + 16 = 0 \\ 3 \log_{11}^5 (x) + 15 \log_{11} x - 16 = 0 \end{cases} +$$

$$3 \log_{11}^5 (x) + 15 \log_{11} x - 16 = 0;$$

$$\underbrace{3 (\log_{11} x + \log_{0,11}^{0,58}) (\log_{11}^4 x + \log_{11}^{0,58} - \log_{11}^2 x \cdot \log_{11}^{0,58} - \log_{11}^{0,58} \cdot \log_{11}^3 x + \log_{11}^2 0,58 \cdot (\log_{11}^2 x + 5)) = 0;}$$

$$A > 0; \text{ т.е. } x^5 + 6^5 = (x+y)(x^4 + y^4 - xy^3 - y^2x^3 + 2xy^2);$$

где $x^2 + y^5$ и $x + y$ им. одинаков. знак; знаем

вторая скобка имеет знак +, или равна 0 при $x=y=0$;

$$\text{знаем } A > 0; \text{ тогда } \log_{11} x + \log_{11} 0,58 = 0;$$

$$\log_{11} x \cdot 0,58 = 0; \quad x \cdot 0,58 = 1; \quad x \cdot 8 = 2. \quad \text{Ответ: } 2.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

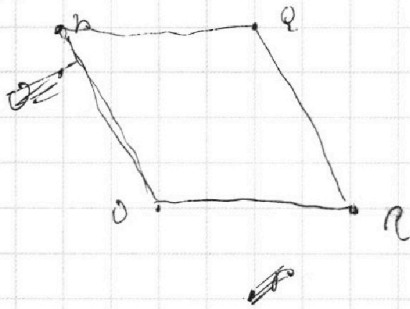
1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№6.



$$PQ: y = 4x + 6; \quad \begin{cases} 90 = -15x + 6 \\ 90 = \end{cases} \quad y = 90;$$

$$OR: y = 0; \quad OR: y = 4x + 6; \quad \begin{cases} 0 = 0 + 6 \\ 90 = -15x + 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6 = 0 \\ x = -6 \end{cases};$$

$$OP: y = -6x;$$

$$QR: y = 4x + 6; \quad \begin{cases} 90 = 2x + 6 \\ 0 = 7x + 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -6 \\ 6 = 102 \end{cases}; \quad QR: y = -6x + 102$$

$$A: \begin{cases} 0 \leq y_1 \leq 90 \\ y_1 \geq -6x_1 \\ y_1 \leq -6x_1 + 102 \\ 0 \leq y_2 \leq 90 \\ y_2 \geq -6x_2 \\ y_2 \leq -6x_2 + 102 \\ 6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 \leq y_1 \leq 90 \\ 0 \leq y_2 \leq 90 \\ 0 \leq y_1 + 6x_1 \leq 102 \\ 0 \leq y_2 + 6x_2 \leq 102 \\ (y_2 + 6x_2) - (y_1 + 6x_1) = 48 \end{cases}$$

$$\text{more } -75 \leq x_1 \leq 2; \\ -15 \leq x_2 \leq 2;$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

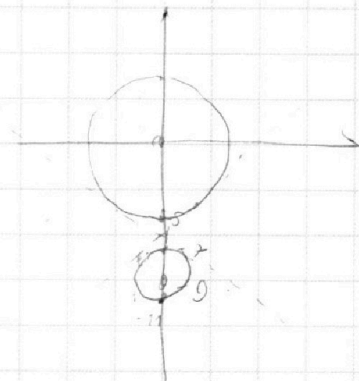


Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} x + 6y - 6 = 0 \\ (x^2 + y^2 - 15) + (x + y)^2 + 18y + 77 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x^2 + y^2 + 2x = 9 \end{cases}$$



$$2 \cos_{11}^2 \alpha - 2 \cos_{11}^2 \alpha = 5 = (\cos_{11}^2 \alpha + \cos_{11}^2 \alpha)$$

$$2 \cos_{11}^2 \alpha = 5$$

$$-\frac{2}{3} \cos_{11}^2 \alpha - 5 = -\cos_{11}^2 \alpha - 6 \cos_{11}^2 \alpha$$

$$\cos_{11}^2 \alpha + \cos_{11}^2 \alpha = \frac{16}{3} \cos_{11}^2 \alpha - 5$$

$$\cos_{11}^2 \alpha + \frac{16}{3} \cos_{11}^2 \alpha - 15 = 0$$

$$\cos_{11}^2 \alpha - \frac{16}{3} \cos_{11}^2 \alpha + 5 = 0$$

$$3 \cos_{11}^2 \alpha - 5 \cos_{11}^2 \alpha + \frac{16}{3} = 0$$

$$3 \cos_{11}^2 \alpha + 15 \cos_{11}^2 \alpha - 16 = 0$$

$$3(\cos_{11}^2 \alpha + 5 \cos_{11}^2 \alpha) + 15 \cos_{11}^2 \alpha + 16 = 0$$

$$3(6 \cos_{11}^2 \alpha + 16) + 15 \cos_{11}^2 \alpha + 16 = 0$$

$$18 \cos_{11}^2 \alpha + 48 + 15 \cos_{11}^2 \alpha + 16 = 0$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



abc12: 2 36 3 59 5²

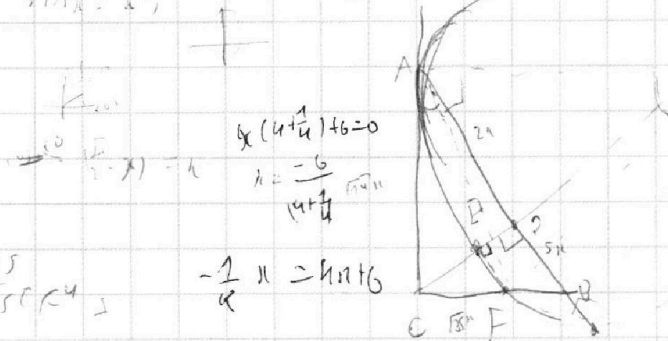
$CF = \sqrt{\frac{35}{4}} \cdot x$

$CF^2 = \frac{74x^2 \cdot 25^2}{10 \cdot 56} \cdot x^2$

$\sin \alpha = \frac{2}{5}$

$74x^2 = CE \cdot CL$

$56CF^2 = 74x^2 \cdot \left(\frac{35}{10} - 41x^2\right)$



$x(4+x) + 6 = 0$
 $x = \frac{-6}{4+x}$

$\frac{CF}{\sqrt{35}x} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{35}} \cdot CF = CL$

$\frac{25}{35} CF^2$

$-\frac{1}{4} x = 4x + 6$

$\frac{AF}{CE} = \frac{AL}{AC} = \frac{FL}{AF}$

$4x + 6$

$10 \arccos(\sin \alpha) = 95 - 211$

$\frac{AC^2}{CE \cdot EF}$

$\frac{CF}{211} = \frac{\sin \alpha}{5}$

$5x \cdot \frac{CF}{\sqrt{35}x} = CE$

$CF^2 = 10x^2$

$\frac{35}{10} \cdot 10x^2 - 28CF =$
 $= 14x^2 + 28CF$

$\left(\frac{5}{\sqrt{35}} CF^2 + \left(CL - \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{35}} CF\right)^2\right) \cdot CF = 74x^2 + CF^2$

$CF = \sqrt{10}x$

$74x^2 = CE \cdot CL \cdot \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{35}} CF \cdot CL$

$CF^2 + 74x^2 = CF \cdot FL$

$CF^2 + \frac{35}{10} 74x^4 - 28CF =$

$= CE^2 + 14x^4 + 28CF^2$

$CL = \frac{74x^2 \cdot \frac{\sqrt{35}}{\sqrt{10}}}{CF}$

$74x^2 = CE \cdot CL$

$\frac{15}{35} CF^4 + \left(\frac{35}{10} 14x^4 + \frac{10}{35} CF^2 - 28x^2 CF\right)$

$\frac{25}{35} CF^2 + \left(74x^2 \cdot \frac{\sqrt{35}}{\sqrt{10}} - \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{35}} CF\right)^2 \cdot CF =$

$= 74x^2 + CF^2$

$\frac{25}{35} CF^2 + \left(74x^2 \cdot \frac{\sqrt{35}}{\sqrt{10}} - \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{35}} CF\right)^2 \cdot CF =$

$= 74x^2 + CF^2$