



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^6 3^{13} 5^{11}$, bc делится на $2^{14} 3^{21} 5^{13}$, ac делится на $2^{16} 3^{25} 5^{28}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой AC в точке A , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке E , а катет BC – в точке F . Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1,4$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF .

3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5, \quad \text{и} \quad \log_{11}^4 (0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,125y^3} (11^{-13}) - 5.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-15;90)$, $Q(2;90)$ и $R(17;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 180, $SA = BC = 20$.

а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .

б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 6$, а радиус сферы Ω равен 8.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что $ab \cdot bc \cdot ac = 2^{6+14+16} \cdot 3^{13+21+25} \cdot 5^{11+13+28}$
но $abc^2 = (abc)^2 \Rightarrow (abc)^2 = 2^{36} \cdot 3^{60} \cdot 5^{52}$, т.к. все
простые входят в квадрат в четной степени.
 $\Rightarrow abc = 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{26}$ Но $ac = 5^{28} \Rightarrow abc = 5^{28}$
 $\Rightarrow abc \geq 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$

Пример: $a = 2^4 \cdot 3^9 \cdot 5^{14}$

$$b = 2^2 \cdot 3^5 \cdot 5^0$$

$$c = 2^{12} \cdot 3^{16} \cdot 5^{14}$$

$$abc = 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$$

$$ab = 2^6 \cdot 3^{14} \cdot 5^{14} = 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{11}$$

$$bc = 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{14} = 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{13}$$

$$ac = 2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{28}$$

пример подходит

Ответ: $2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} \bar{y} = \frac{a+1-y}{a} \\ x = \frac{y-\bar{y}+a+\frac{1}{a}}{2} = \frac{y-\frac{a+1}{a}+\frac{y}{a}+a+\frac{1}{a}}{2} = \frac{(a+1)y+a^2-a}{2a} \\ \bar{x} = \frac{\bar{y}-y+a+\frac{1}{a}}{2} = \frac{\frac{a+1}{a}-y-\frac{y}{a}+a+\frac{1}{a}}{2} = \frac{a^2+a+2-(a+1)y}{2a} \end{cases} \quad (2)$$

из равенства условий ВАР и ЕАС получаем:

$$\frac{\frac{a+1}{x+1}}{\frac{y+1}{1}} \geq \frac{\frac{a+1}{x+1}}{\frac{y+1}{1}}$$

т.к. аргументы
вероятно и численно
частные равны

и частное действительно.

$$\frac{a+1}{(x+1)(y+1)} \geq \frac{\frac{a+1}{a}}{(\bar{x}+1)(\bar{y}+1)}$$

$$a(\bar{x}\bar{y} + \bar{x} + \bar{y} + 1) \geq xy + x + y + 1$$

$$\begin{aligned} & a+1-y + \frac{a^2+a+2-(a+1)y}{2a} + a + \frac{(a+1-y)(a^2+a+2-(a+1)y)}{2a} \geq \\ & \geq x+y + \frac{(a+1)y+a^2-a}{2a} + y \frac{(a+1)y+a^2-a}{2a} \end{aligned}$$

$$4a^2 - 2ay + a^3 + a^2 + 2a - a(a+1)y + (a+1)(a^2+a+2) - y((a+1)^2 + a^2 + a)$$

$$+ y^2(a+1) \geq 2ay + (a+1)y + a^2 - a + (a+1)y^2 + y(a^2 - a)$$

$$a^3 + 5a^2 + 2a + a^2 + 2a^2 + 2a + 2 - y(2a + a^2 + a + a^2 + 2a + 1 + a^2 + a + 2) \geq$$

$$= a^2 - a + y(2a + a + 1 + a^2 - a)$$

$$2a^3 + 6a^2 + 6a + 2 \geq y(4a^2 + 8a + 4)$$

$$4y(a+1)^2 = 2(a+1)^3 \Rightarrow y = \frac{a+1}{2}$$

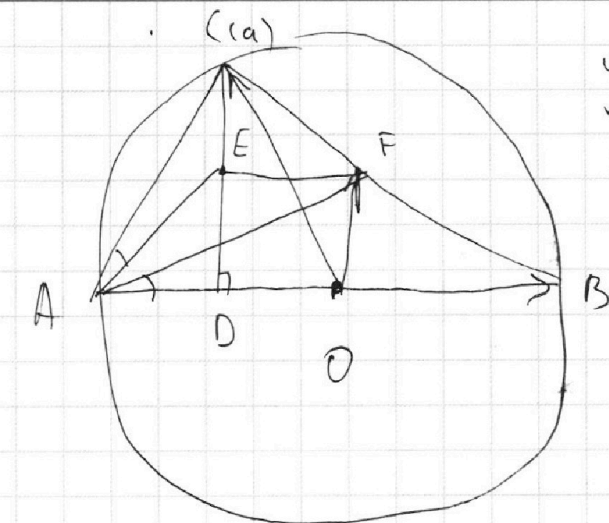
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$y = \frac{a+1}{2} \Rightarrow \quad (3)$$

$$\Rightarrow \frac{\vec{OB} + \vec{OC}}{2} = \vec{OF} \Rightarrow$$

$\Rightarrow F$ — середина BC

$$\text{по условию } AB : BD = \frac{7}{5}$$

$$\Rightarrow AD = 2x, \quad BD = 5x$$

$$\Rightarrow EF = \frac{1}{2}BD = 2,5x$$

$$CD = \sqrt{AD \cdot DB} = x\sqrt{10}$$

$$S_{\triangle ACO} : S_{\triangle CEF} = \left(\frac{CD}{EF}\right)^2 \quad \text{т.к. } OCEFNOCDB \cap \sim \triangle ADC \text{ в}$$

\Rightarrow катет. подобие $\triangle ADC$ и $\triangle CEF \Rightarrow \frac{CD}{EF}$, а
площади относятся как квадраты катет-подобия.

$$\left(\frac{CD}{EF}\right)^2 = \frac{10}{(2,5)^2} = \frac{10}{\frac{25}{4}} = \frac{40}{25} = \frac{8}{5}$$

Ответ: $8 : 5$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

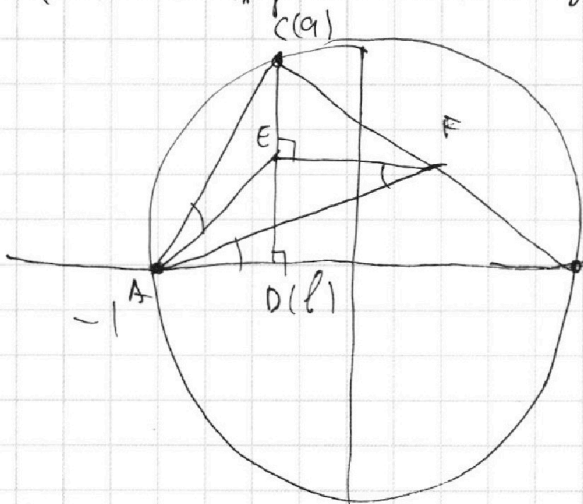
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Введем канон. систему координат так, чтобы
 $AB \in OX$ $O(0,0)$ - середина AB , $\angle HCO \perp AB \perp z$
 (так как \angle функции AB не зависят)



Заметим, что $\angle CAE \leq \angle EFA$, как
 между кас и хордой и омп. на
 xy и z осей, а $\angle EFA \leq \angle FAB$ и \angle
 $EF \perp AB$.

\angle координаты $C-a, D-b$

$$\frac{a-b}{1-0} = -\frac{a-b}{1-0} \text{ т.к. } CD \perp AB$$

$$a-b = -a+b \Rightarrow a = \frac{1}{a}, \text{ т.к. } |a| < 1,$$

$$b = b, \text{ т.к. } D \in OX \Rightarrow a-b = -\frac{1}{a} + b \Rightarrow b = \frac{a^2 + 1}{2a}$$

$\angle E-x, F-y$ тогда: $\frac{x-y}{1-0} = \frac{x-y}{1-0}$ т.к. $EF \perp AB$

$$\Rightarrow \boxed{x-y = x-y}$$

$$E \in CD \Rightarrow CE \perp AB \Rightarrow \frac{a-x}{1-0} = -\frac{a-x}{1-0}$$

$$a-x = -a+x \Rightarrow \boxed{x+x = a+\frac{1}{a}}$$

$$F \in BC \Rightarrow BF \perp AC \Rightarrow$$

$$\frac{1-y}{a+1} = -\frac{1-y}{a+1} \Rightarrow (1-y)(a+1) = -a(a+1)(1-y)$$

$$(a+1)(1-y) = -a(a+1)(1-y) \Rightarrow \boxed{1-y = -a+ay}$$

$$\begin{cases} x-x = y-y \\ x+x = a+\frac{1}{a} \\ 1-y = -a+ay \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{y-y + a + \frac{1}{a}}{2} \\ x = \frac{a + \frac{1}{a} - y + y}{2} \\ 1-y = -a + ay \end{cases}$$

1

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$10 \sin \cos(\sin x) = 9\pi - 2x$$

$$\text{Но } \sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 10\left(\frac{\pi}{2} - x + 2\pi k\right) = 9\pi - 2x, & k \in \mathbb{Z} \\ 10\left(x - \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) = 9\pi - 2x, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5\pi - 10x + 20\pi k = 9\pi - 2x \\ 10x - 5\pi + 20\pi k = 9\pi - 2x \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8x = 20\pi k - 4\pi \\ 12x = 14\pi - 20\pi k \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{5\pi k}{2} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}(5k - 1) \\ x = \frac{7}{6}\pi - \frac{5}{3}\pi k = \frac{\pi}{3}(7 - 5k) \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } \frac{\pi}{2}(5k - 1); \frac{\pi}{3}(7 - 5k), k \in \mathbb{Z}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

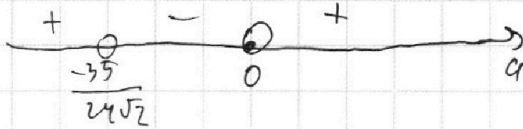
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} \frac{-5}{6a} > \frac{4\sqrt{2}}{7} & (1) \\ \frac{-5}{6a} < \frac{-4\sqrt{2}}{7} & (2) \end{cases}$$

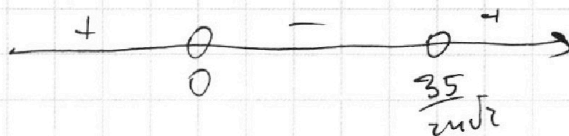
$$(1) \quad 0 > \frac{35 + 24a\sqrt{2}}{a}$$

$$\Rightarrow a \in \left(-\frac{35\sqrt{2}}{48}, 0 \right)$$



$$(2) \quad 0 > \frac{24a\sqrt{2} - 35}{a}$$

$$\Rightarrow a \in \left(0, \frac{35\sqrt{2}}{48} \right)$$



$$\Rightarrow a \in \left(-\frac{35\sqrt{2}}{48}, 0 \right) \cup \{0\} \cup \left(0, \frac{35\sqrt{2}}{48} \right)$$

$$\Rightarrow a \in \left(-\frac{35\sqrt{2}}{48}, \frac{35\sqrt{2}}{48} \right)$$

где кансдор из этого a , ~~справедливо~~, $b = \frac{-45}{7} \cdot 6a$

$$\text{Ответ: } \left(-\frac{35\sqrt{2}}{48}, \frac{35\sqrt{2}}{48} \right)$$

(2)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

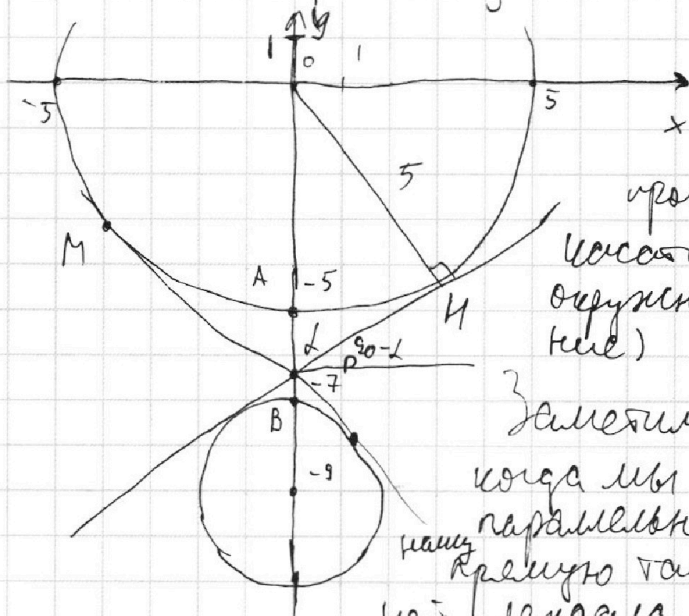
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



преобразуем ур-ние системы:

①

$$\begin{cases} y \geq \frac{-5x + 6}{6a}, a \neq 0 & \text{прямая} \\ x \geq \frac{6}{5}, a \geq 0 & \text{тоже прямая} \\ x^2 + y^2 \geq 5^2 & \text{окр-ть с ц. в } (0,0) \text{ и } R=5 \\ x^2 + (y+9)^2 = 9^2 & \text{окр-ть с ц. в } (0,-9) \text{ и } R=9 \end{cases}$$



проведем одну касательную к окружности (внутреннюю)

Заметим, что если, когда мы линию параллельно перенесем влево так, чтобы P на ней лежала, она не будет

лежать внутри угла NPM, то 4 решения не будет, т.к. она раздвинет 2 окр-ти \Rightarrow параллельная ей прямая $\Delta \leq 1$ из них. Так же, если она совпадет с касательной, корней всё ещё $\leq 2 \Rightarrow$ её условие короче - т.е. больше, чем у PN, либо меньше, чем у PM. Им. угол $\angle PN = \arctan(9-2) = \arctan(7) = \angle PN; \angle ON$

AP:PB = 5:2, т.к. \exists гомотетия с ц. в P, переводящая окр-ти одну в другую. $\Rightarrow AP \geq \frac{5}{7} \cdot AB, AB \geq 2 \Rightarrow AP \geq \frac{10}{7} \Rightarrow OP \geq \frac{15}{7} \Rightarrow PA \geq \frac{5}{7} \sqrt{81-49} = \frac{5\sqrt{32}}{7}$ по т. Пифагора $\Rightarrow \angle \alpha \geq \frac{4\sqrt{2}}{7}$

Заметим, что при $a \geq 0, b \geq 0$ - переводит, так как это равно Oy

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\left] a = \log_{11} x, b = \log_{11} 95y\right.$$

$$a+b = ?$$

$$a^4 - \frac{6}{a} = \frac{-2}{3a} - 5 \quad \left| \begin{array}{l} \text{умножим на } a \text{ и } b, \text{ чтобы } \\ \text{сложилось} \end{array} \right.$$

$$b^4 + \frac{1}{b} = \frac{-13}{3b} - 5$$

$$a^5 + b^5 + 5(ab) - 6 + \frac{2}{3} + 1 + \frac{13}{3} = 0$$

$$(a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + a^4 + 5) = 0$$

либо $a+b=0$ - заманчиво

$$\text{либо } a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + a^4 + 5 = 0$$

$$\left] p = a+b, q = ab\right.$$

$$5 + (p^2 - 2q)^2 - q^2 - (p^2 - 2q)q = 0$$

$$5 + p^4 - 4p^2q + 4q^2 - q^2 - p^2q + 2q^2 = 0$$

$$5 + p^4 - 4p^2q + 4q^2 - q^2 - p^2q + 2q^2 = 0$$

$$p^4 - 5p^2q + 5q^2 + 5 = 0$$

Заметим, что если $q > 0$, то $p^4 - 5p^2q + 5q^2 + 5 > 0$

$\Rightarrow q \geq 0 \Rightarrow$

$$\textcircled{1} (a-b)^2 \geq ab \Rightarrow p^4 - 5p^2q = p^2(p^2 - 5q) = p^2(a^2 + b^2 - 2ab)$$

$$= p^2((a-b)^2 - ab) \geq 0, p \geq 0 \Rightarrow p^2 - 5p^2q + 5q^2 + 5 > 0$$

$$\textcircled{2} (a-b)^2 < ab \Rightarrow p^2 - 4p^2q + p^2(a-b)^2 \geq 0$$

$$5q^2 + 5 - p^2q = 5a^2b^2 + 5 - (a^2 + ab + b^2)ab \geq$$

$$\geq 3a^2b^2 + 5 - ab(a^2 + b^2) = ab(3ab - a^2 - b^2) + 5 \geq ab(ab - (a-b)^2) + 5$$

$$ab \cdot \geq q(ab - (a-b)^2) + 5 > 0 \Rightarrow p^4 - 5p^2q + 5q^2 + 5 > 0$$

\Rightarrow оно равно нулю даже не может $\Rightarrow a+b=0 \Rightarrow \log_{11}(\frac{1}{2}xy) = 0$

$\Rightarrow \frac{1}{2}xy = 1 \Rightarrow xy = 2$ Ответ: 2

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Зафиксируем точку (x, y) и посмотрим где лежат для неё такие точки (x_2, y_2)
 $y = -6x - 40 + (6x_2 + y_2)$ - прямая.

заметим, что $PQ \parallel QR$ и этой прямой, т.к. $\frac{90-0}{-15-0} = -6$ - углы наклона.

заметим, что $\max(6x_2 + y_2)$ на QR .
действительно $6x_2 + y_2 = C$ - макс \rightarrow

$y = -6x + C$ - они лежат на прямой QR , но QR - верхнее из таких, Δ паралл \rightarrow
 \Rightarrow макс C на $QR \Rightarrow$ макс $C = 12 + 90 = 102$

~~эффект~~
~~всех возможных пар~~

\Rightarrow число всех таких пар = число точек

в паралл-е $O_1(0,0)$, $P(-15, 90)$, $Q(6, 90)$,
 $R(9, 0)$

то число равно ~~66~~ $(15+1)(9+1) = 160$

Ответ: 160

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

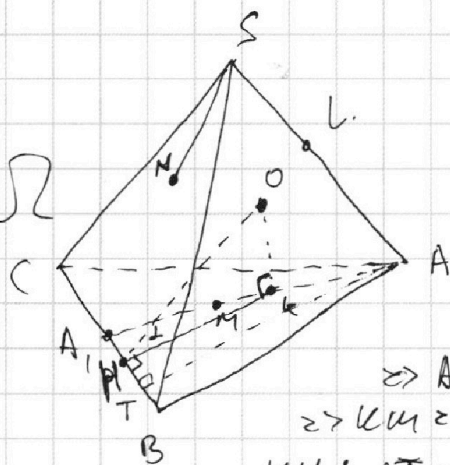
Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

д)
 Ω - центр Ω



Ω - ось-е высоты из A на BC;
~~центр~~ $\Omega \in BC$;

$KM \perp BC$.

$SN \cong SL \cong 6$ кас

касательные \Rightarrow

$$\Rightarrow AL \cong 20 - 6 \cong 14 \cong AK \Rightarrow$$

$$\Rightarrow KM \cong 20 - 14 \cong 6$$

$$KM : AT \cong AK : AA, \text{ т. к. } \triangle A_1 K M \cong \triangle A_1 B A$$

$$\triangle A_1 K M \cong \triangle A_1 B A$$

$$\frac{AK}{AA_1} \cong \frac{16}{30} \Rightarrow KM \cong AT \cdot \frac{16}{30}$$

$$\Rightarrow KM \cong AT \cdot \frac{16}{30}$$

$$\frac{1}{3} \cdot AT \cdot CB \cong 180 \Rightarrow AT \cong 18 \Rightarrow KM \cong \frac{18 \cdot 8}{15} \cong \frac{48}{5}$$

$OK \perp AK$, т. к. $\triangle ABC$ касается Ω ~~от~~

$$\Rightarrow \text{по } \triangle OKM \perp OK \perp BC \Rightarrow \text{искомый угол} \angle OKM. \text{ тогда } \tan \angle OKM \cong \frac{OK}{KM} \cong \frac{8}{\frac{48}{5}} \cong \frac{5}{6}$$

$$\Rightarrow \angle OKM \cong \arctan \frac{5}{6}$$

Ответ: $\arctan \frac{5}{6}$

2

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

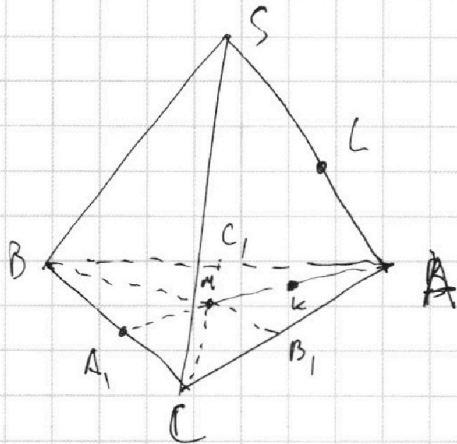
Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

МФТИ

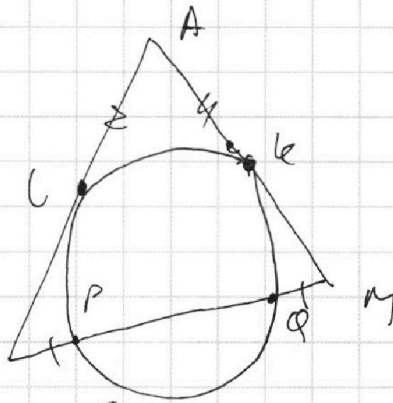
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

a)



$SA = BC = 20, S_{ABC} = 180$

! $ML \perp AS$!

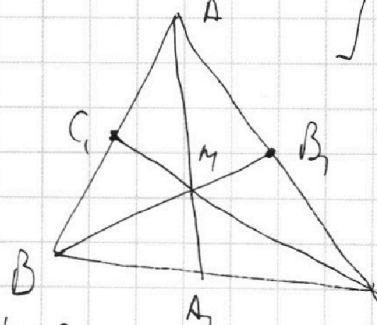


сечение сферы и т.д.

~~Заметим, что $SP \cdot SQ = SL^2$ и $MP \cdot MQ = ML^2$~~

Заметим, что $SP \cdot SQ = SL^2$ и $MP \cdot MQ = ML^2$
 из Th о кас. и сек. но $SP = MQ, SQ = MP$
 $\Rightarrow SL = ML \Rightarrow AS = AM \Rightarrow AM = 20$

$\triangle ABC$



A_1, B_1, C_1 - середины сторон
 BE, AC и AB соотв.
 $AM = 20 \Rightarrow MA_1 = A_1B = A_1C = 10$
 $\Rightarrow \angle BMC = 90^\circ$

$S_{BMC} = \frac{1}{3} S_{ABC}$, но $S_{BMC} = \frac{1}{2} BM \cdot MC = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot BB_1$

$\cdot CC_1 \Rightarrow BB_1 \cdot CC_1 = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot 2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 180 \cdot \frac{3}{2} = 270$

$AA_1 = \frac{3}{2} \cdot 20 = 30 \Rightarrow AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = 30 \cdot 270 = 8100$

Ответ пункта а: 8100

1

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

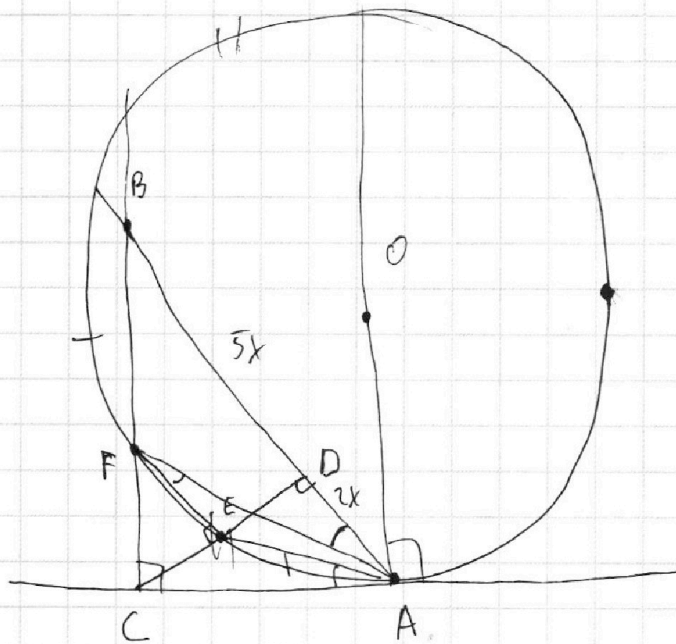
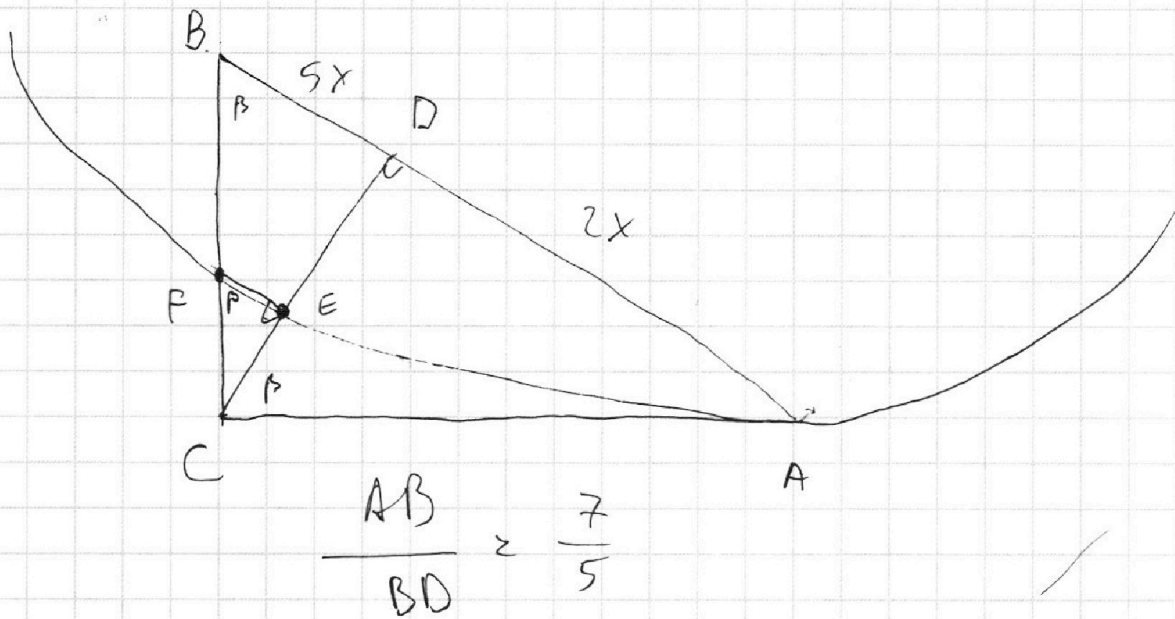
Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



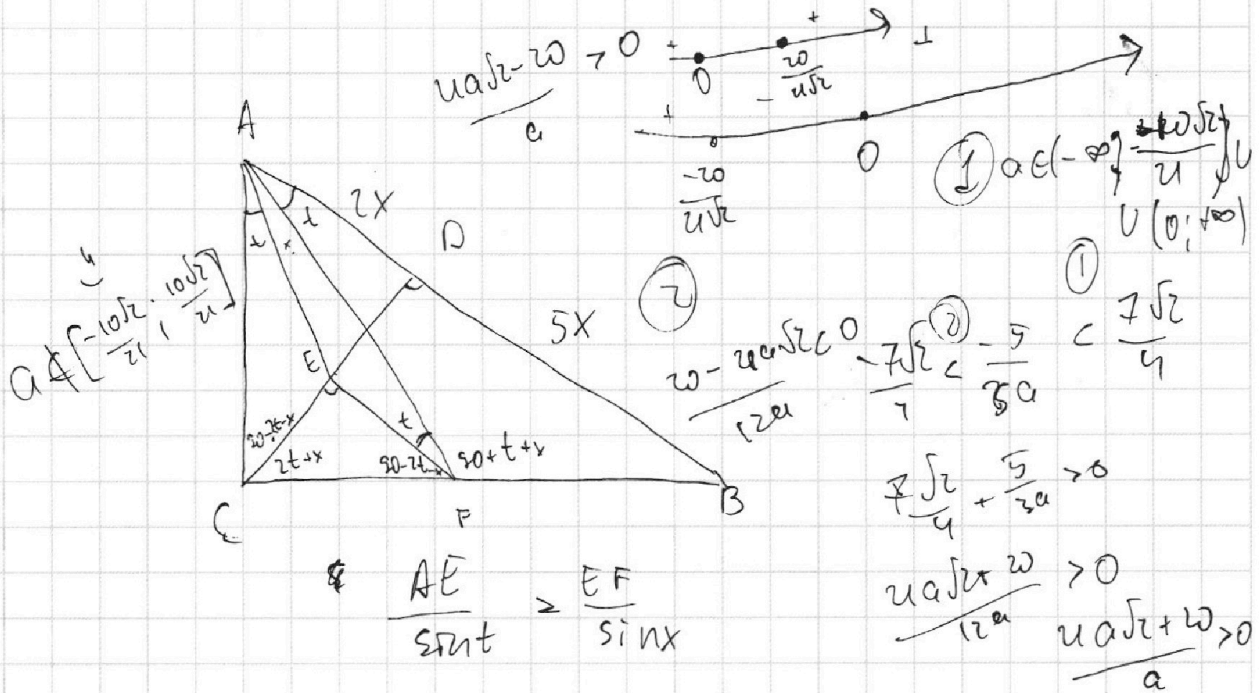
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$\sqrt{9} = \frac{35}{7} \cdot \frac{20\sqrt{2}}{7} = \frac{CE}{\sin t} > \frac{AE}{\sin(\alpha + x)} = \frac{AE \cdot AC}{AD}$
 $\frac{20\sqrt{2}}{7} > \frac{7}{4\sqrt{2}} = \frac{7\sqrt{2}}{8} < \frac{CE}{AD}$
 $\sin t + x = \frac{CF}{AF}$

$y = \frac{-5}{6a}x + \frac{1}{6a}$

$\frac{5}{7} \sqrt{81 - 49}$
 $\frac{2\sqrt{2}}{7} \sqrt{37}$

$-\frac{7\sqrt{2}}{8} < \frac{-5}{6a} < \frac{7\sqrt{2}}{8}$

~~$\frac{5}{8} < 9$
 $\frac{6 \cdot 7\sqrt{2}}{21} < 9$
 $\frac{5 \cdot 2\sqrt{2}}{21} < 9$
 $a > \frac{10\sqrt{2}}{21}$~~

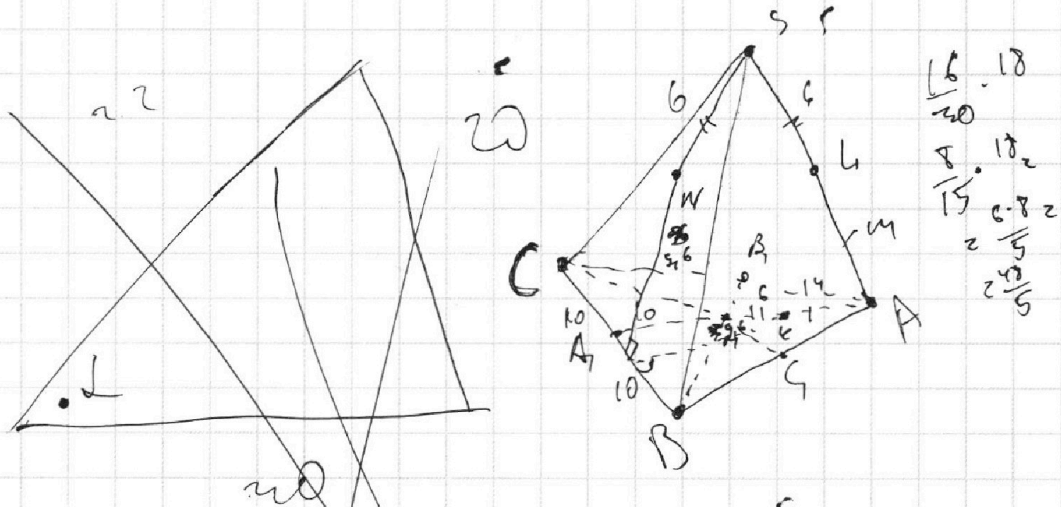
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



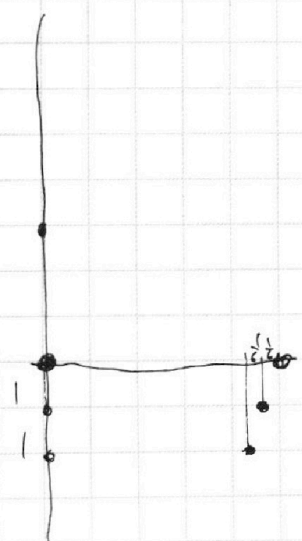
~~400 = 900~~

$$100 \geq 225 + 121 - 2 \cdot 15 \cdot 11 \cdot \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{246}{2 \cdot 15 \cdot 11} = \frac{123}{15 \cdot 11} = \frac{41}{55}$$

$$\frac{20}{\sin \alpha} = 18 \quad \sin \alpha = \frac{5}{9}$$

$$\frac{(55-41)(55+41)}{55^2} = \frac{14 \cdot 96}{55^2}$$



$$6x^2 - 6x + y_1 - y = 48$$

$$y = 48 - 6x + 6x_2 + y_2 - 48$$

$$y = -6x - 48 + (6x_2 + y_2)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

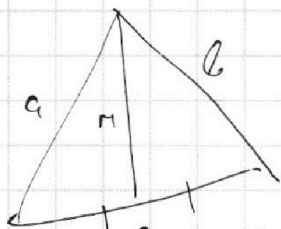
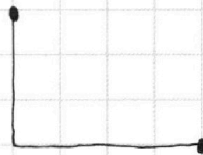
- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

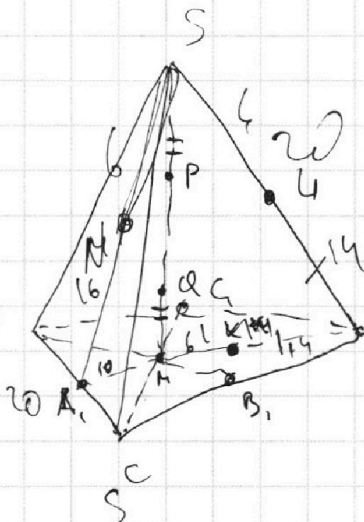


$$6(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 48$$



$$2h^2 + \frac{c^2}{2} = a^2 + b^2$$

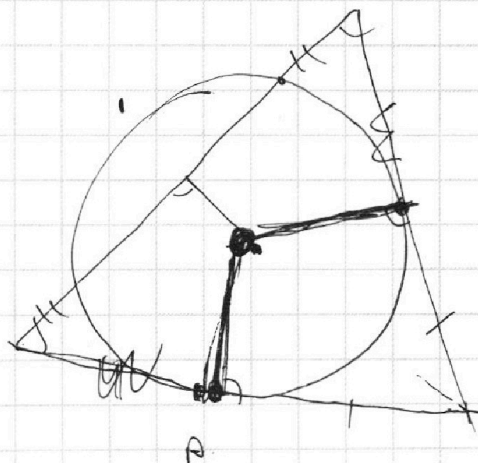
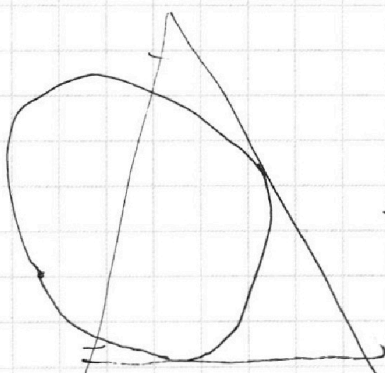
$$h^2 = \frac{2a^2 + b^2 - c^2}{4}$$



$$AA_1 = 30$$

$$(2a^2 + b^2 - c^2) \cdot$$

$$(2a^2 + c^2 - b^2)$$



$$(a+b-c)(a+c-b)(a+b+c)(b+c-a) =$$

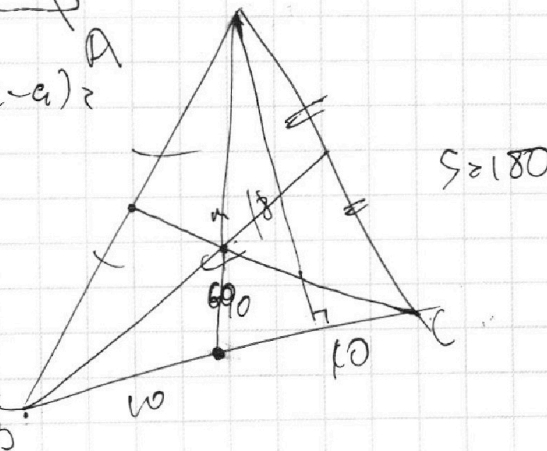
$$= (a^2 - (b-c)^2) ((b+c)^2 - a^2)$$

$$\frac{2}{3} \cdot 180 = BM \cdot MC = \frac{4}{9} \cdot BB_1 \cdot CC_1$$

$$120$$

$$9 \cdot \frac{120}{4} = 270 = 30 \cdot 9$$

$$= 8100$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

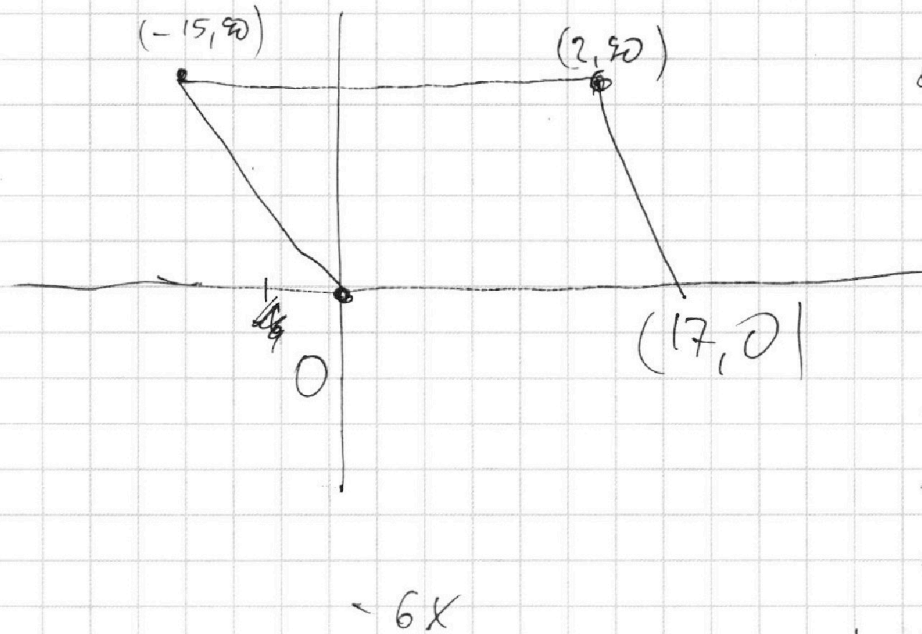
1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$y = -6x - 48 + (6x_0 + y_0)$$



$$6x_0 + y_0 = C$$

$$y_0 = -6x_0 + C$$

$$6 \cdot 2 + 90 = 102$$

$$-6x + 102 - 48 =$$

$$= -6x + 54$$

$$\begin{array}{r} \cancel{0.17} \quad 27 \cdot 2 \\ 6 \cdot 9 \end{array}$$

$$x = 9$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

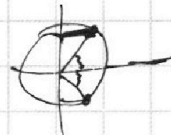


$$5a^2b^2 \geq a^3b + b^3a + 2a^2b^2$$

$$3a^2b^2 + 5 \geq ab(a^2 + b^2)$$

$$ab(3ab - a^2 - b^2) + 5 \geq 0$$

$$ab(ab - (a-b)^2) + 5 \geq 0$$

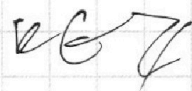


$$5\pi x \geq \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$10 \arccos\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) \geq 9\pi - 2x$$

$$10\left(\frac{\pi}{2} - x + 2\pi k\right) \geq 9\pi - 2x$$

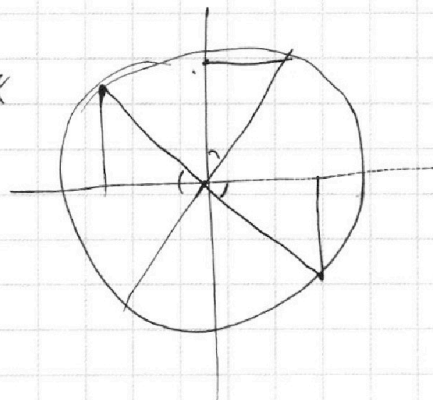
$$10\left(x - \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) \geq 9\pi - 2x$$



$$5\pi \cdot 5\pi - 10x + 20\pi k \geq 9\pi - 2x$$

$$8x \geq 20\pi k - 4\pi$$

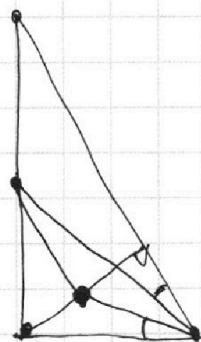
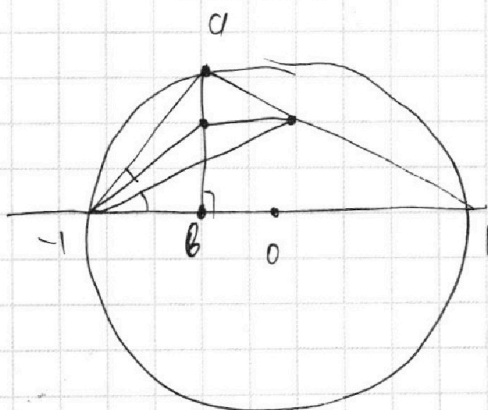
$$x \geq \frac{5}{2}\pi k - \frac{\pi}{2}$$



$$10x - 5\pi + 20\pi k \geq 9\pi - 2x$$

$$12x \geq 14\pi - 20\pi k$$

$$x \geq \frac{7}{6}\pi - \frac{5}{3}\pi k$$



$$\frac{a-b}{z} = (\bar{a}-\bar{b}) \quad b = \bar{b}$$

$$a - b = -\frac{1}{a} + b$$

$$2b = a + \frac{1}{a} \quad \Leftrightarrow b = \frac{a^2 + 1}{2a}$$

$$b = \frac{a^2 + 1}{2a}$$

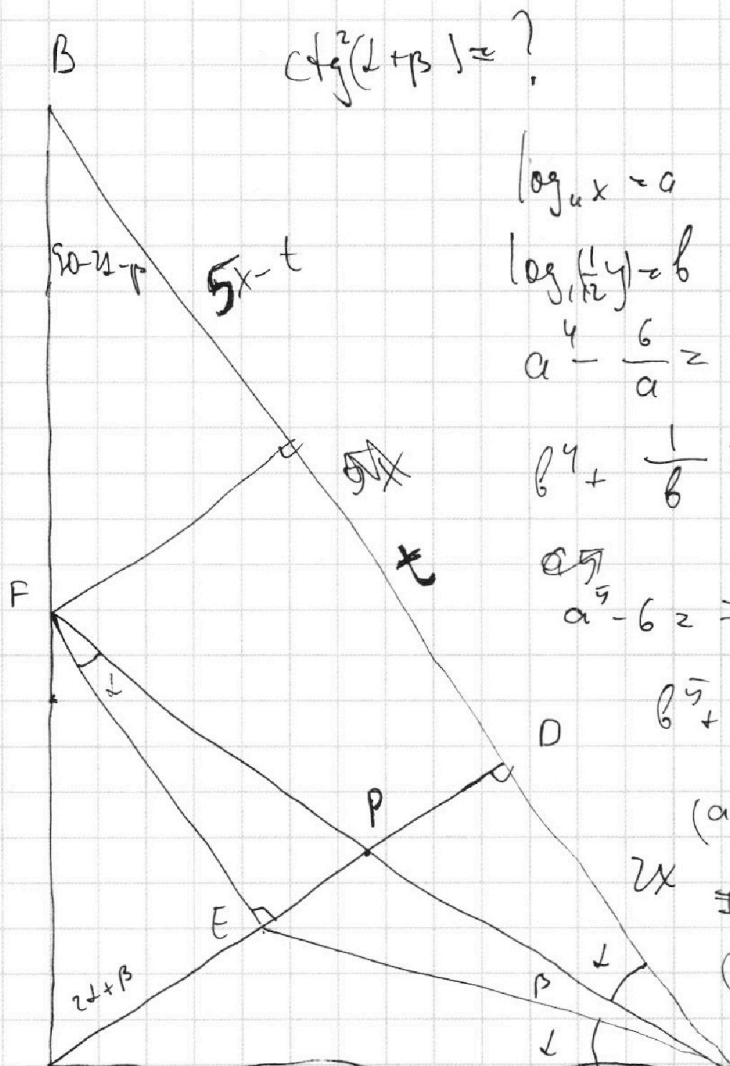
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$ctg^2(2+\beta) = ?$$

$$\log_a x = a \quad a+b = ?$$

$$\log_{\frac{1}{2}} y = b$$

$$a^4 - \frac{6}{a} = \frac{-2}{3a} - 5$$

$$b^4 + \frac{1}{b} = \frac{-13}{3b} - 5$$

$$a^5 - 6 = \frac{-2}{3} - 5a$$

$$b^5 + 1 = \frac{-13}{3} - 5b$$

$$(a^5 + b^5) + 5(a+b) =$$

$$2x = 0$$

$$(a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4 + 5) = 0$$

$$(a+b) = 0 \quad 5a^2b^2 + 5 \geq (a+b)^2 ab \quad A$$

$$(a^4 + b^4 - ab(a^2 + b^2) + a^2b^2 + 5) \geq 0$$

$$(a^2 + b^2)^2 - ab(a^2 + b^2) - a^2b^2 + 5 \geq 0$$

$$(p^2 - 2q)^2 - q(p^2 - 2q) - q^2 + 5 \geq 0$$

$$(p^2 - 2q)^2 - p^2q + 2q^2 - q^2 + 5 \geq 0$$

$$p^4 - 4p^2q + 4q^2 + q^2 - p^2q + 5 \geq 0$$

$$\frac{(a+b)^2 - 5ab}{(a-b)^2 - ab}$$

$$a+b = p, ab = q$$

$$p^4 - 5p^2q + 5q^2 + 5 \geq 0$$

$$p^2(p^2 - 5q) + 5q^2 + 5 \geq 0$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

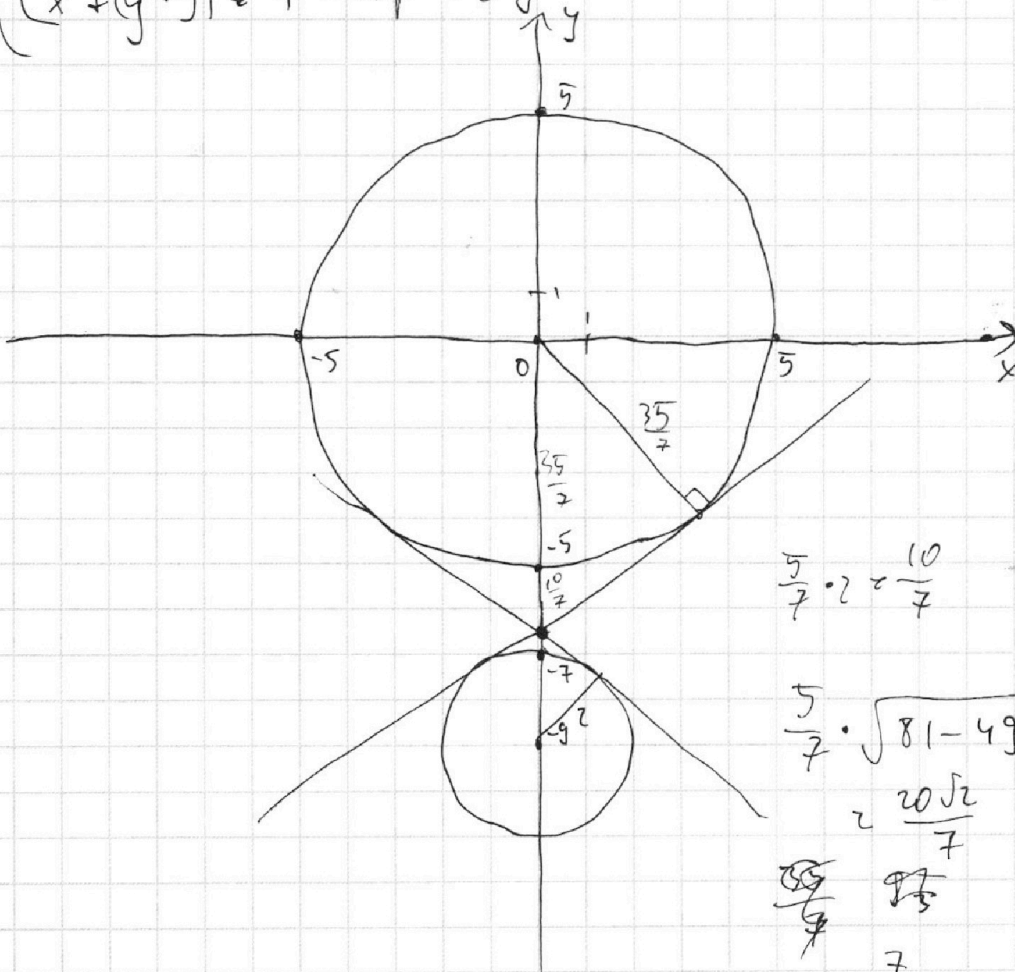
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} 5x + 6ay - 6 \geq 0 \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + (y+9)^2 - 4) \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{-5x+6}{6a}, a \neq 0 \text{ если } a \geq 0, \text{ то } 5x = 6 \\ x^2 + y^2 = 25 - \text{окр-ть с ц. } (0,0) \text{ и } R=5 \\ x^2 + (y+9)^2 = 4 - \text{окр-ть с ц. } (0,-9) \text{ и } R=2 \end{cases}$$

$x = \text{const}$
раздели
отдельно



$$\frac{5}{7} \cdot 2 = \frac{10}{7}$$

$$\frac{5}{7} \cdot \sqrt{81 - 49} = \frac{20\sqrt{2}}{7}$$

~~$$\frac{5}{7} \cdot 9 = \frac{45}{7}$$~~

$$\frac{7}{\sqrt{32}} = \frac{7\sqrt{2}}{8}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

an

$$abc^2 : 2^{6+14+16} \cdot 3^{13+21+25} \cdot 5^{13+11+28}$$
$$= 2^{36} \cdot 3^{59} \cdot 5^{52} \Rightarrow 2^{36} \cdot 3^{59} \cdot 5^{52}$$

$abc \geq 2^{12} \cdot 3^{16} \cdot 5^{14}$

$$a = 2^4 \cdot 3^9 \cdot 5^{14}$$
$$b = 2^2 \cdot 3^5 \cdot 5^0$$
$$c = 2^{12} \cdot 3^{16} \cdot 5^{14}$$
$$a+b=11$$
$$b+c=13$$

$a+c=28$

$$a+b \geq 13 \quad (14)$$
$$a+c \geq 25$$
$$b+c \geq 21$$

~~$a+b=11$~~

$c=16$

$$a+b=26 \quad c=14$$
$$b+c=7$$

$a+b=14$

$b=5$

$a=9$