МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1

+ 1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^9 3^{10} 5^{10}$, bc делится на $2^{14} 3^{13} 5^{13}$, ac делится на $2^{19} 3^{18} 5^{30}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

+ 2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC. Окружность, касающаяся прямой BC в точке B, пересекает высоту CD, проведённую к гипотенузе, в точке F, а катет AC – в точке E. Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 3 : 1$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF.

+ 3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arcsin(\cos x) = x + \dfrac{\pi}{2}$.

+ 4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ \left(x^2 + y^2 - 9\right)\left(x^2 + y^2 - 12x + 32\right) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

+ 5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4 (5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} \left(3^{11}\right) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения xy.

+ 6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-14;42)$, $Q(6;42)$ и $R(20;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K, лежащей на отрезке AM. Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q. Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 90, $SA = BC = 12$.

а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1.

б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N, $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 [X] 2 [ ] 3 [ ] 4 [ ] 5 [ ] 6 [ ] 7 [ ]

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1) Решение: Оценка:
Обозначим $ord_p(x)$ → степень вхождения простого множителя p в факторизацию числа x ($p; x \in \mathbb{N}$; p → простое) (наибольшая степень p, на которую делится число x).

Тогда по условию $ord_2(ab) \geq 9$; $ord_3(ab) \geq 10$;
$ord_2(bc) \geq 14$; $ord_3(bc) \geq 13$;
$ord_2(ac) \geq 19$; $ord_3(ac) \geq 18$;
$ord_5(ab) \geq 10$; $ord_5(bc) \geq 13$; $ord_5(ac) \geq 30$.

(по признаку делимости двух чисел о степенях вхождения простых).

Также очевидно свойство: $ord_p(xy) = ord_p(x) + ord_p(y)$ (по св-у степеней), откуда

$$\left.\begin{array}{l} ord_2(a) + ord_2(b) = ord_2(ab) \geq 9 \\ ord_2(b) + ord_2(c) = ord_2(bc) \geq 14 \\ ord_2(a) + ord_2(c) = ord_2(ac) \geq 19 \end{array}\right\} \Rightarrow 2\cdot(ord_2(a) + ord_2(b) + ord_2(c)) \geq 42 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 21 \leq ord_2(a) + ord_2(b) + ord_2(c) = ord_2(abc) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow abc \vdots 2^{21};$$

$$\left.\begin{array}{l} ord_3(a) + ord_3(b) = ord_3(ab) \geq 10 \\ ord_3(b) + ord_3(c) = ord_3(bc) \geq 13 \\ ord_3(a) + ord_3(c) = ord_3(ac) \geq 18 \end{array}\right\} \Rightarrow 2\cdot(ord_3(a) + ord_3(b) + ord_3(c)) \geq 41 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 20{,}5 \leq ord_3(a) + ord_3(b) + ord_3(c) = ord_3(abc),$$
но т.к. $ord_3(abc) \in \mathbb{Z}$, то $ord_3(abc) \geq 21$, т.е. $abc \vdots 3^{21}$;

$$\left.\begin{array}{l} ord_5(a) + ord_5(b) = ord_5(ab) \geq 10 \\ ord_5(b) + ord_5(c) = ord_5(bc) \geq 13 \\ ord_5(a) + ord_5(c) = ord_5(ac) \geq 30 \end{array}\right\} \Rightarrow 2\cdot(ord_5(a) + ord_5(b) + ord_5(c)) \geq 53 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 26{,}5 \leq ord_5(a) + ord_5(b) + ord_5(c) = ord_5(abc).$$
Но т.к. $ord_5(b) \geq 0$, то т.к. $30 \leq ord_5(ac) \leq ord_5(ac) + ord_5(b) = ord_5(abc)$, то $ord_5(abc) \geq 30 \Rightarrow abc \vdots 5^{30}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
X						

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Отсюда, т.к. числа $2^{21}; 3^{21}; 5^{30}$ → попарно взаимно-просты, то т.к. $abc \vdots 2^{21}$; $abc \vdots 3^{21}$; $abc \vdots 5^{30}$, то
$abc \vdots 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$, а т.к. $a; b; c \in \mathbb{N}$, то
$abc \geq 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$.

Пример: пусть $a = 2^{7} \cdot 3^{7} \cdot 5^{15}$
$b = 2^{2} \cdot 3^{3}$, тогда
$c = 2^{12} \cdot 3^{11} \cdot 5^{15}$

$ab = 2^{9} \cdot 3^{10} \cdot 5^{15}$ ($ab \vdots (2^{9} \cdot 3^{10} \cdot 5^{10})$ → верно).
$bc = 2^{14} \cdot 3^{14} \cdot 5^{15}$ ($bc \vdots (2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13})$) → верно).
$ac = 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30}$ ($ac \vdots (2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30})$ → верно).

$abc = 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$ → совпадает с оценкой.

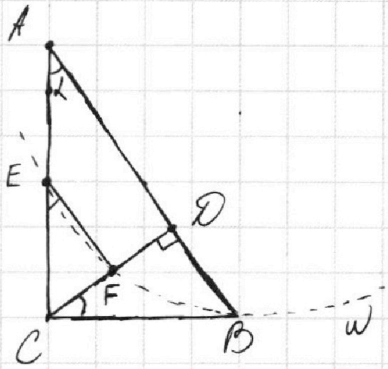
Ответ: $\{2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}\}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№2 Дано:
$\triangle ABC: \angle C = 90^\circ$;
ω – Окр.$(O; R)$ → касается прямой BC в точке B;
CD → высота $\triangle ABC$; $(D \in AB)$.
$\omega \cap CD = \{F\}$; $\omega \cap AC = \{E\}$;
$EF \parallel AB$; $AD : DB = 3 : 1$;



$S_{ABC} : S_{CEF}$ — ?

Решение:
Пусть $\angle BAC = \alpha$ (обозначение), где $0 < \alpha < 90^\circ$ (острый угол в прямоуг. треуг. ABC) ($\alpha \in R$).

~~Т.к. BC касается ω в B~~ Т.к. $EF \parallel AB$ (по усл.), то $\angle CEF = \angle CAB = \alpha$; $\angle ADC = \angle EFC = 90^\circ$ (по св-у паралл. прямых о соотв. углах при секущей).

Рассмотрим $\triangle BAC$ и $\triangle BCD$:
- $\angle B$ – общий
- $\angle BCA = 90^\circ = \angle BDC$ } $\Rightarrow \triangle BAC \sim \triangle BCD$ (по двум углам) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle CAD = \alpha = \angle BCD$; $\frac{BD}{BC} = \frac{BC}{AB}$
(по опр. подобных треуг.).

Отсюда $BD \cdot AB = BC^2$; Аналогично $AD \cdot AB = AC^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow \left(\frac{AC}{AB}\right)^2 = \frac{AD}{BD} = \frac{3}{1} = 3$ (по условию) $\Rightarrow \frac{AC}{AB} = \sqrt{3}$;
Рассмотрим $\triangle ABC$: $\angle C = 90^\circ \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow$
$\Rightarrow \alpha = 30^\circ$ (по опр. тангенса острого угла прямоуг. треуг.; известный тангенс известного острого угла).

Т.к. BC → касательная к ω, то $\angle BEF = \beta = \angle CBF$ (по теор. об угле между кас. и хордой).

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Отсюда $F \to$ точка Шалтай для $\triangle BCE$ (по опр. точки Шалтай треуг.). (последующие св-а точки Шалтай мы докажем).

Пусть p - опис. окруж. $\triangle CEF$ (доп. постр.), тогда т.к. $\angle CEF = \alpha = \angle BCF$, то $BC \to$ касательная к p в точке C (по теор. обратной теор. об угле между касательной и хордой.)

Пусть $EF \cap BC = \{M\}$ (доп. постр.), тогда, т.к. $E \in \omega; E \in p; F \in \omega; F \in p \to EF$ - рад. ось ω и p. (т.к. $deg_\omega(E) = 0 = deg_\omega(F) = deg_p(E) = deg_p(F)$) (по опр. рад. оси двух окруж.)

(P.S. $deg_\omega(X) \to$ степень точки X, относительно окружности ω).

А т.к. $M \in EF$, то $deg_\omega(M) = deg_p(M)$ (по опр. рад. оси).

Отсюда $MC^2 = ME \cdot MF = deg_p(M) = deg_\omega(M) = ME \cdot MF = MB^2$ (по теор. о квадрате касательной; по св-у степени точки о соотв. отрезках)

Отсюда $MB = MC \Rightarrow M$ - ср. BC (известное св-о точки Шалтай). А т.к. $EF \parallel AB$ (по условию), а также $M \to$ ср. BC; $M \in EF$, то EF - ср. линия $\triangle ABC$ (по признаку ср. линии треуг. (т.к. если провести истинную ср. линию треуг. ABC, то она пройдёт через M (по опр. ср. линии треуг.) и будет паралл. AB (по теор. о ср. линии треуг.). Отсюда она совпадёт с EF (по аксиоме паралл. прямых)).

Отсюда $E \to$ ср. AC (по опр. ср. линии треуг.), а $F \to$ ср. CD (по св-у ср. линии треуг. о соотв. чевианах).

Отсюда EF - ср. линия $\triangle CAD$ (по опр. ср. линии треуг.).

Отсюда $EF = \frac{1}{2} AD = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} AB = \frac{3}{8} AB$.
(по теор. о ср. линии треуг.; по аксиоме (стр. 2/3)

сум. отрезков). (по условию).

Рассмотрим $\triangle ABC$: $\angle C = 90°$ (по усл.) $\Rightarrow$

$\Rightarrow AC = AB\cos\alpha = AB\cdot\cos 30° = AB\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{8}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\cancel{AB}}{EF} = \frac{4\sqrt{3}}{3}EF$;
(по опр. косинуса острого угла прямоуг. треуг.)

Рассмотрим $\triangle CEF$ и $\triangle BAC$:

- $\angle CFE = \angle ACB = 90°$
- $\angle CEF = 30° = \angle BAC$

$\Rightarrow \triangle CEF \sim \triangle BAC \Rightarrow$ (по двум углам)

$\Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = \frac{AC^2}{EF^2} = \left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{16}{3} = 5\frac{1}{3}$

(по св-у подобных треуг. об отношении площадей (относятся как квадрат коэфф. подобия).

Ответ: $\{ 5\frac{1}{3} \}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№3 Решение:

$5\arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \arcsin(\cos x) = \frac{x}{5} + \frac{\pi}{10} \Rightarrow$

$\Leftarrow \sin(\arcsin(\cos x)) = \sin\left(\frac{x}{5} + \frac{\pi}{10}\right) \Leftrightarrow$

т.к. левая и правая части равны, то равны и синусы этих частей.

$\Leftrightarrow \cos x = \sin\left(\frac{x}{5} + \frac{\pi}{10}\right) \Leftrightarrow \sin\left(\frac{x}{5} + \frac{\pi}{10}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{x}{5} + \frac{\pi}{10} = \frac{\pi}{2} - x + 2k\pi, \text{ где } k \in \mathbb{Z}. \\ \frac{x}{5} + \frac{\pi}{10} = \frac{\pi}{2} + x + 2k\pi, \text{ где } k \in \mathbb{Z} \end{array}\right. \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{6}{5}x = \frac{2}{5}\pi + 2k\pi, \text{ где } k \in \mathbb{Z}. \\ -\frac{4}{5}x = \frac{2\pi}{5} + 2k\pi, \text{ где } k \in \mathbb{Z} \end{array}\right. \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{3} + \frac{5}{3}k\pi, \text{ где } k \in \mathbb{Z} \\ x = -\frac{\pi}{2} - \frac{5}{2}k\pi, \text{ где } k \in \mathbb{Z} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{3} + \frac{5}{3}k\pi, \text{ где } k \in \mathbb{Z} \\ x = -\frac{\pi}{2} + \frac{5}{2}k\pi, \text{ где } k \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$

Т.к. $\arcsin y \in \left[-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2}\right]$, для $y \in \mathbb{R}$ ($y \in [-1; +1]$).

то $-\frac{5\pi}{2} \le 5\arcsin(\cos x) \le \frac{5\pi}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -3\pi \le 5\arcsin(\cos x) - \frac{\pi}{2} \le 2\pi$, т.е. $-3\pi \le x \le 2\pi$.

Откуда 1) $\begin{cases} -3\pi \le \frac{\pi}{3} + \frac{5}{3}k\pi \le 2\pi \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -9 \le 1 + 5k \le 6 \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -10 \le 5k \le 5 \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -2 \le k \le 1 \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k=1 \\ k=0 \\ k=-1 \\ k=-2 \end{array}\right. \Rightarrow 2\pi; \frac{\pi}{3}; -\frac{4}{3}\pi; -3\pi \to$

$\to$ подходящие значения x (из этой серии).

2) $\begin{cases} -3\pi \le -\frac{\pi}{2} + \frac{5}{2}k\pi \le 2\pi \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6 \le -1 + 5k \le 4 \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 \le k \le 1 \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k=1 \\ k=0 \\ k=-1 \end{array}\right.$ $\Leftrightarrow$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$\Rightarrow 2\pi; -\frac{\pi}{2}; -3\pi$ → подходящие значения из этой серии.

Откуда корни данного уравнения могут быть только числами из множества:

$\{-3\pi; -\frac{4\pi}{3}; -\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{3}; +2\pi\}$.

Проверка:

1) $x=-3\pi;$ $\cos(-3\pi)=\cos\pi=-1;$
$\arcsin(-1)=-\frac{\pi}{2};$
$x+\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}-3\pi=-\frac{5\pi}{2}$

Откуда $5\arcsin(\cos(-3\pi))=5\cdot(-\frac{\pi}{2})=-\frac{5\pi}{2}=-3\pi+\frac{\pi}{2};$

2) $x=-\frac{4\pi}{3};$ $\cos(-\frac{4\pi}{3})=\cos(\frac{2\pi}{3})=-\frac{1}{2};$
$\arcsin(-\frac{1}{2})=-\frac{\pi}{6};$
$x+\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{4\pi}{3}=-\frac{5\pi}{6};$

Откуда $5\arcsin(\cos(-\frac{4\pi}{3}))=5\cdot(-\frac{\pi}{6})=-\frac{5\pi}{6}=\frac{\pi}{2}-\frac{4\pi}{3}.$

3) $x=-\frac{\pi}{2};$ $\cos(-\frac{\pi}{2})=0;$
$\arcsin(0)=0;$
$x+\frac{\pi}{2}=0;$

Откуда $5\arcsin(\cos(-\frac{\pi}{2}))=5\cdot0=0=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2};$

4) $x=\frac{\pi}{3};$ $\cos(\frac{\pi}{3})=\frac{1}{2};$
$\arcsin(\frac{1}{2})=\frac{\pi}{6};$
$x+\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}=\frac{5\pi}{6};$

Откуда $5\arcsin(\cos(\frac{\pi}{3}))=5\cdot\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3};$

5) $x=2\pi;$ $\cos 2\pi=\cos 0=1$
$\arcsin(1)=\frac{\pi}{2};$
$\frac{\pi}{2}+x=\frac{5}{2}\pi;$

Откуда $5\arcsin(\cos(\frac{5\pi}{2}))=5\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{5\pi}{2}=\frac{\pi}{2}+2\pi;$

Откуда все эти 5 корней → корни нашего уравн.

Ответ: $\{-3\pi; -\frac{4\pi}{3}; -\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{3}; +2\pi\}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№4 Решение:

$$\begin{cases} ax+2y-3b=0 \ (1) \\ (x^2+y^2-9)(x^2+y^2-12x+32)=0 \ (2) \end{cases};$$

(2) $(x^2+y^2-9)(x^2+y^2-12x+32)=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+y^2=9 \\ x^2+y^2-12x+32=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+y^2=3^2 \ (3) \\ (x-6)^2+y^2=2^2 \ (4) \end{array}\right.$$

(3) $x^2+y^2=3^2 \rightarrow$ ур-е окружности с центром $(0;0)$ и радиусом $\{+3\}$.

(4) $(x-6)^2+y^2=2^2 \rightarrow$ ур-е окружности с центром $(6;0)$ и радиусом $\{+2\}$.

(1) $ax+2y-3b=0 \Leftrightarrow y=-\frac{a}{2}x+\frac{3}{2}b \rightarrow$ ур-е прямой (невертикальной, т.к. коэфф. при y не равен 0).

Т.к. прямая может пересекать окружность не более, чем в 2-ух точках, то чтобы данная система имела ровно 4 решения, то наша прямая должна пересекать обе окружности по 2-ух точкам (каждую).

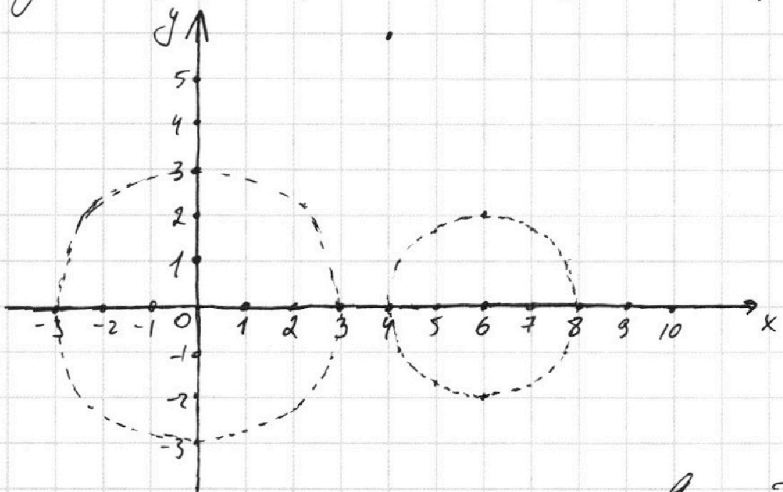
$\{-\frac{a}{2}\} \rightarrow$ угловой коэфф. нашей прямой.

$\{+\frac{3}{2}b\} \rightarrow$ свободный коэфф. прямой.

Откуда для фиксированного $a \in \mathbb{R}$ мы можем подбирать b, т.е. для данного углового коэфф. $\{-\frac{a}{2}\}$ мы можем прямую $y=-\frac{3}{2}a$ перенести на любой вектор вида $\overrightarrow{(0;\frac{3}{2}b)}$.

Очевидно такими операциями, мы можем добиться того, чтобы график (1) проходил через любую точку плоскости.

Изобразим график (2): (2 окружности).



Рассмотрим прямую $y = -\frac{a}{2}x + \frac{3}{2}b$

Посмотрим при каких значениях b она может пересекать (3). (P.S. если $a=0$, то $b=0 \to$ $\to$ ось абсцисс пересекает (2) в 4-ёх точках $\Rightarrow$ $\Rightarrow a=0 \to$ подходит, далее рассмотрим $a \neq 0$).

$\begin{cases} x^2+y^2=9 \\ y=-\frac{a}{2}x+1{,}5b \end{cases} \Rightarrow x^2+\left(-\frac{a}{2}x+\frac{3}{2}b\right)^2=9 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4x^2+(ax-3b)^2=36 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4x^2+a^2x^2+9b^2-6abx=36 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (a^2+4)x^2-6abx+(9b^2-36)=0 \to$ у данного уравнения должно быть 2 решения, поэтому $\frac{D}{4}>0$

$0<\frac{D}{4}=(3ab)^2-(a^2+4)(9b^2-36) \Rightarrow a^2b^2-(a^2+4)(b^2-4)>0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a^2b^2-a^2b^2+4a^2-4b^2+16>0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a^2+4>b^2 \Leftrightarrow -\sqrt{a^2+4}<b<\sqrt{a^2+4}$;

Посмотрим при каких значениях b она может пересекать (4).

$\begin{cases} (x-6)^2+y^2=4 \\ y=-\frac{a}{2}x+\frac{3}{2}b \end{cases} \Rightarrow x^2-12x+32+\left(\frac{a}{2}x-\frac{3}{2}b\right)^2=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4x^2-48x+128+a^2x^2-6abx+9b^2=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2\cdot(a^2+4)-2x(24+3ab)+(9b^2+128)=0$;

У данного ур-я также должно быть 2 разл. корни, т.е. $D/4 > 0$, т.е.

$$0 < \frac{D}{4} = (3ab+24)^2 - (a^2+4)(9b^2+128) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 9a^2b^2 + 144ab + 144\cdot 4 - 9a^2b^2 - 128a^2 - 36b^2 -$$
$$- 512 > 0 \Leftrightarrow 144ab + 144\cdot 4 - 128a^2 - 36b^2 - 512 > 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 36ab + 144 - 32a^2 - 9b^2 - 128 > 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -9b^2 + 36ab - 32a^2 + 16 > 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 9b^2 - 36ab + 32a^2 - 16 < 0;$$

$$\frac{D}{4} = (18a)^2 - 9\cdot(32a^2 - 16) = 6^2\cdot(9a^2 - 8a^2 + 4) =$$
$$= 6^2 (a^2+4) \Rightarrow \frac{18a - \sqrt{a^2+4}\cdot 6}{9} < b < \frac{18a + 6\sqrt{a^2+4}}{9},$$

т.е. $2a - \frac{2}{3}\sqrt{a^2+4} < b < 2a + \frac{2}{3}\sqrt{a^2+4}$;

Отсюда 2 условие на b:

$$\begin{cases} 2a - \frac{2}{3}\sqrt{a^2+4} < b < 2a + \frac{2}{3}\sqrt{a^2+4}, \\ -\sqrt{a^2+4} < b < \sqrt{a^2+4}; \end{cases}$$

Отсюда, чтобы такое b существовало, необходимо потребовать:

1) $\sqrt{a^2+4} > 2a - \frac{2}{3}\sqrt{a^2+4} \Leftrightarrow \frac{5}{3}\sqrt{a^2+4} > 2a \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 5\sqrt{a^2+4} > 6a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a \geq 0 \\ 25a^2 + 100 > 36a^2 \end{cases} \\ a < 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a \geq 0 \\ 100 > 11a^2 \end{cases} \\ a < 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 \leq a < \sqrt{\frac{100}{11}} \\ a < 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow a < \frac{10}{\sqrt{11}};$$

2) $2a + \frac{2}{3}\sqrt{a^2+4} > -\sqrt{a^2+4} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2a > -\frac{5}{3}\sqrt{a^2+4} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a > 0 \\ \begin{cases} a \leq 0 \\ 36a^2 > 25a^2 + 100 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a > 0 \\ \begin{cases} a \leq 0 \\ a > -\sqrt{\frac{100}{11}} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow -\frac{10}{\sqrt{11}} < a.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Откуда $-\frac{10\sqrt{11}}{11} < a < \frac{10\sqrt{11}}{11}$ (при a в этом промежутке 2 данных интервала очевидно имеют общую точку → подходящее значение b для данного a.)

Ответ: $\left(-\frac{10\sqrt{11}}{11}; +\frac{10\sqrt{11}}{11}\right)$.

№5 Решение:

ОДЗ: $\begin{cases} x>0 \\ x\neq 1 \\ x^2>0 \\ x^2\neq 1 \\ 5y>0 \\ 5y\neq 1 \\ 25y^2>0 \\ 25y^2\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ x\neq 1 \\ y>0 \\ y\neq \frac{1}{5} \end{cases}$

Пусть $a=\log_3 x$, где $a\in\mathbb{R}$;
$b=\log_3(5y)$, где $b\in\mathbb{R}$; (на ОДЗ).

Тогда $\log_x 3=\dfrac{1}{\log_3 x}=\dfrac{1}{a}$, т.е. $a\neq 0$.

$\log_{x^2}243=\frac{1}{2}\log_x 3^5=\frac{5}{2}\log_x 3=\frac{5}{2a}$; (т.к. $x>0$)

$\log_{5y}3=\dfrac{1}{\log_3 5y}=\dfrac{1}{b}$, т.е. $b\neq 0$; $\log_{25y^2}(3^{11})=$

$=\frac{11}{2}\log_{5y}3=\frac{11}{2b}$ (т.к. $5y>0$)

Откуда получаем 2 ур-я:

$\begin{cases} a^4+\dfrac{6}{a}=\dfrac{5}{2a}-8 \\ b^4+\dfrac{2}{b}=\dfrac{11}{2b}-8 \\ ab\neq 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a^5+12=5-16a \\ 2b^5+4=11-16b \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a^5+16a+7=0 \\ 2b^5+16b-7=0 \end{cases}$; Откуда

$2(a^5+b^5)+16(a+b)=0 \Leftrightarrow (a+b)(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4)+$

$+(a+b)\cdot 8=0 \Leftrightarrow (a+b)(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4+8)=0$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a+b=0 \\ a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4+8=0 \end{array}\right.$

(стр. 1/2)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Пусть $a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4+8=0$, тогда

$a^4+\frac{a^2b^2}{4}\geq 2\sqrt{a^4\cdot\frac{a^2b^2}{4}}=\sqrt{a^6b^2}=|a^3b|\geq a^3b$

(по нер-ву Коши).

$b^4+\frac{a^2b^2}{4}\geq 2\sqrt{b^4\cdot\frac{a^2b^2}{4}}=\sqrt{a^2b^6}=|ab^3|\geq ab^3$.
(по нер-ву Коши).

Откуда $a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4+8=$

$=\left(a^4+\frac{a^2b^2}{4}-a^3b\right)+\left(b^4+\frac{a^2b^2}{4}-ab^3\right)+\frac{a^2b^2}{2}+8\geq 8>0$

(разбили на неотрицательные слагаемые)

Получили противоречие, т.е. $a^4+a^2b^2+b^4-a^3b-ab^3+8\neq 0$, а это значит, что $a+b=0$, т.е.

$\log_3 x+\log_3 5y=0 \Leftrightarrow \log_3 5xy=0 \Leftrightarrow 5xy=1 \Leftrightarrow xy=\frac{1}{5}\rightarrow$

$\rightarrow$ единственное возможное значение xy.

~~Пример таких~~ ~~x и y:~~

P.S. такие x и y существуют, т.к. $2a^5+16a+7=0$ уравнение 5-ой (нечётной степени) $\rightarrow$ имеет хотя бы 1 корень (очевидно $0\rightarrow$ не корень), тогда $x=3^a\rightarrow$ искомое. Аналогично $y=3^b\rightarrow$
$\rightarrow$ искомое).

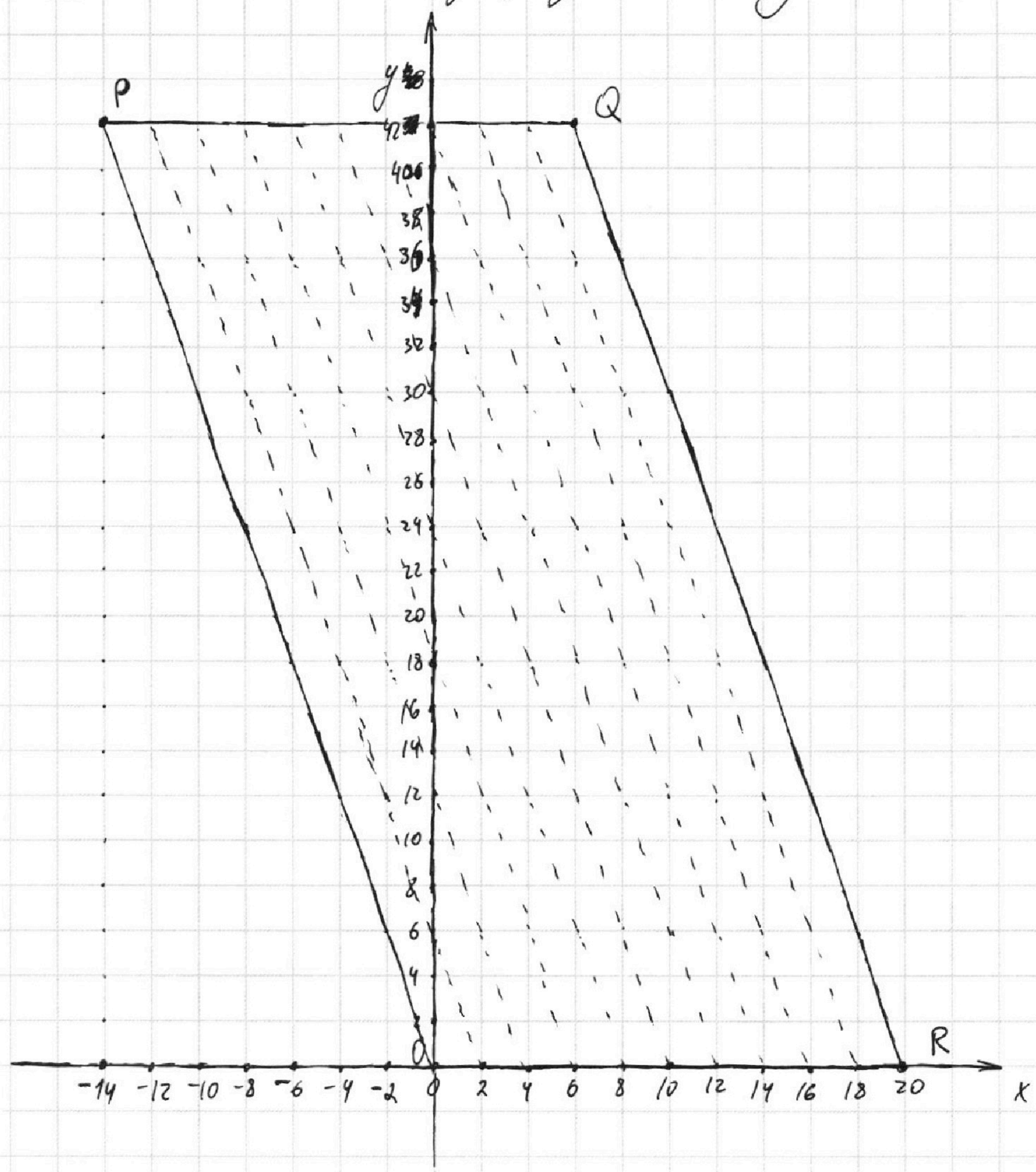
Ответ: $\{\frac{1}{5}\}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№6 Решение: Изобразим исходный параллелограмм.



$$3(x_2-x_1)+y_2-y_1=33 \Leftrightarrow (y_2-y_1)=33-3\cdot(x_2-x_1)$$

Т.е. для каждой точки $(x_2;y_2)$ все такие точки $(x_1;y_1)$ лежат на прямой с угловым коэфф. $\{-3\}$, проходящие через точку $(x_2-11;y_2)$ (легко проверяется подстановкой в ур-е).

Рассмотрим все прямые с угловым коэфф. $\{-3\}$, проходящие через целочисленные точки, (стр. 1/2)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

имеющие хотя бы 1 общую точку с нашим параллелог.)

Заметим, что прямые QP и QR (границы параллелог.) подходят под это условие. (их угловые коэф. равны -3 и они проходят через целочисл. точки $(0;0)$ и $(0;20)$, например).

Тогда все рассмотренные прямые будут параллельны (или совпадать) сторонам QP и QR этого параллелог, причём очевидно на каждой такой прямой будет ровно 15 целочисленных точек.
(Р.S. $(0;0)$; $(-1;+3)$; $(-2;+6)$; ... $(-14;+42)$ → → 15 целочисленных точек на QP, а остальные мн-ва точек (прямые) получаются из QP паралл. переносом на векторы $(i;0)$, где $i \in \mathbb{N}_0$; $i \le 20$. (при $i=20$ получится QR).

Пронумеруем все такие прямые по i соотв. (от 0 до 20).

Тогда для всех точек 11-ой прямой будут подходить все точки 0-ой прямой. (на 0-ой прямой будут точки $(x_1;y_1)$, а на 11-ой $(x_2;y_2)$, причём никакие более точки не будут подходить (показали ранее).
для точек 12-ой прямой → точки 1-ой прямой.
для точек 13-ой прямой → точки 2-ой прямой
и т.д.
для точек 20-ой прямой → точки 9-ой прямой.
(для точек i-ой прямой, где $i \in \mathbb{N}_0$; $i \le 10$ никакие точки не будут соответствовать, т.к. такая прямая не пересекает параллелограмм (нужная)).

Откуда мы получили 10 групп. из 2-ух прямых. На каждой из 2-ух прямых по 15 точек, а значит 225 подходящих пар точек, а т.к. групп. 10, то всего 2250 нужных пар точек (очевидно, каждую нужную пару мы посчитали, причём ровно 1 раз).
Ответ: ~~2250~~ 2250 пар.

(стр. 2/2)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

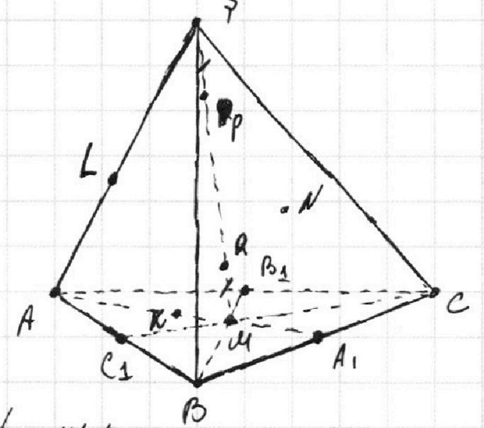
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№7 ~~Решение~~: Дано:

$\angle SABC = 90^\circ$; $SA = BC = 12$;



б) $SN = 4$; $R = 5 \to$ радиус Ω.

а) $AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1$ — ?
б) $\varphi_{дв.}$ — ? (при BC)

Решение: Пусть $deg_\omega(X) \to$ степень точки X, относительно сферы ω, тогда

$deg_\Omega(A) = AL^2 = AK^2 \Rightarrow AL = AK$
~~(по теор. о…)~~
(по св-у степ. точки о соотв. касательной).

$deg_\Omega(M) = MK^2 = MQ \cdot MP$.
(по св-у степ. точки о соотв. касательной; по св-у степ. точки о соотв. отрезках).

Аналогично $deg_\Omega(S) = SL^2 = SP \cdot SQ \Rightarrow$

$\Rightarrow SP \cdot SQ = MP \cdot MQ \Rightarrow$
$\Rightarrow SL = MK$.

(по условию ($MQ = SP$); по аксиоме изм. отрезков ($MP = SM - SP = SM - MQ = SQ$))

Откуда $AL + LS = AK + MK \Rightarrow AS = AM$ (по аксиоме изм. отрезков)

Откуда $AM = AS = 12$ (по условию)

Т.к. $M \to$ центр масс $\triangle ABC$ (по условию), то $AM : MA_1 = 2:1$ (известное св-о центра масс).

Откуда $AA_1 = \frac{3}{2} \cdot AM = 18$ (по аксиоме изм. отрезков).

Рассмотрим отдельно $\triangle ABS$. Пусть ~~h~~ $= \rho(A; BC) \to$ расстояние от точки A до прямой BC, тогда $S_{ABC} = \frac{1}{2}\rho(A; BC) \cdot BC$

(стр. 1 / 3)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

по формуле площади треуг. через высоту) =>

$\Rightarrow \rho(A, BC) = \frac{2S_{ABC}}{BC} = \frac{180}{12} = 15$ (по условию).

Заметим, что $4AA_1^2 = 2AB^2 + 2AC^2 - BC^2$

$4BB_1^2 = 2AB^2 + 2BC^2 - AC^2$

$4CC_1^2 = 2AC^2 + 2BC^2 - AB^2$

(по формуле медианы треуг.)

Откуда $AB^2 + AC^2 = 2AA_1^2 + \frac{BC^2}{2} = 2\cdot 18^2 + \frac{12^2}{2} =$

$= 2\cdot 324 + 72 = 648 + 72 = 720;$

Рассмотрим $16S_{ABC}^2 = (AB+BC+AC)\cdot(AB+AC-BC)^2\cdot$

$\cdot(AB+BC-AC)\cdot(AC+BC-AB)$ (из формулы Герона)

Откуда $16\cdot 90^2 = ((AB+BC)^2 - BC^2)(BC^2 - (AB-BC)^2) =$

$= (720 - 144 + 2AB\cdot BC)(144 - 720 + 2AB\cdot BC) \Rightarrow$

$\Rightarrow 4\cdot 90^2 = (360 - 72 + AB\cdot BC)\cdot(72 - 360 + AB\cdot BC) \Rightarrow$

$\Rightarrow 180^2 = (AB\cdot BC + 288)\cdot(AB\cdot BC - 288) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 180^2 = AB^2\cdot BC^2 - 288^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 180^2 + 288^2 = (AB\cdot BC)^2 = 9^2\cdot(20^2 + 32^2) =$

$= 9^2\cdot 4^2\cdot(5^2 + 8^2) = 36^2\cdot(25+64) = 36^2\cdot 89 \Rightarrow$

$\Rightarrow AB\cdot BC = 36\sqrt{89} \Rightarrow$

$\Rightarrow (AB - BC)^2 = 720 - 2\cdot 36\sqrt{89} \Rightarrow |AB - BC| = \cancel{36}\cdot$

$= 6\cdot\sqrt{20 - 2\sqrt{89}}$

$(AB+BC)^2 = 720 + 2\cdot 36\sqrt{89} \Rightarrow AB + BC =$

$= 6\cdot\sqrt{20 + 2\sqrt{89}}$

Откуда $|AB^2 - BC^2| = 36\cdot 2\sqrt{100 - 89} = 72\sqrt{11} \Rightarrow$

$\Rightarrow AB^2 = 72\cdot\frac{10+\sqrt{11}}{2} = 360 + 36\sqrt{11}$

$BC^2 = 72\cdot\frac{10-\sqrt{11}}{2} = 360 - 36\sqrt{11}$

(или наоборот).

Откуда $4BB_1^2 = 2BC^2 + 720 + 72\sqrt{11} - 360 + 36\sqrt{11} =$

$= 2BC^2 + 360 \cancel{+360\sqrt{11}} + 108\sqrt{11}$

$4CC_1^2 = 2BC^2 + \cancel{360}\,720 - 72\sqrt{11} - 360 - 36\sqrt{11} =$

$= 2BC^2 + 360 - 108\sqrt{11}$

(стр. 2/3)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

(или наоборот).

Откуда $BB_1^2 = 72 + 90 + 27\sqrt{11}$ (или наоборот).
$CC_1^2 = 72 + 90 - 27\sqrt{11}$ (или наоборот).
(или наоборот). (далее $AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 \to$ считается руками) (почти досчиталось)

$AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = 18 \cdot \sqrt{162^2 - (27\sqrt{11})^2}$ (ответ).

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 [X] 2 [X] 3 [X] 4 [X] 5 [X] 6 [X] 7 [X]

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~~$9+\frac{9}{k^2} > d > \frac{32}{11} = \frac{4}{k^2 \cdot 11}$~~

~~$99+\frac{99}{k^2} > 32 = \frac{4}{k^2}$ (ист.)~~

$12k^2 d - k^2 d^2 - 32k^2 + 4 > 0$

$12d - d^2 - 32 + \frac{4}{k^2} > 0$

$d^2 - 12d + 32 - \frac{4}{k^2} < 0$

$\frac{D}{4} = 36 - \left(32 - \frac{4}{k^2}\right) = 4 + \frac{4}{k^2} \Rightarrow 6 - 2\sqrt{1+\frac{1}{k^2}} < d < 6 + 2\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}$

$9 + 9/k^2 > 6 - 2\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}$

$9t^2 > 6 - 2t$

$9t^2 + 2t - 6 > 0$

$\frac{D}{4} = 1 + 54 = 55 \Rightarrow t >$

$\sin\left(\frac{\pi}{10} + \frac{x}{5}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

$\sin\left(\frac{\pi}{10} + \frac{x}{5}\right) = \cos x$

$x \in \left[-3\pi; 2\pi\right]$

$\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$; $-\frac{\pi}{2} - x$; $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$

$\frac{\pi}{2} - x$

$\sin\alpha$, $\cos\alpha$, 1

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
X	X	X	X	X	X	X

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

3,3 → соотв. точка.

$y = k(x-d)$

$y^2+x^2=9$

$x^2+k^2(x-d)^2=9.$

$x^2+k^2x^2-2k^2xd+k^2d^2=9$

$(k^2+1)-2k^2xd+k^2d^2-9=0.$

$\frac{D}{4}=(k^2d)^2-(k^2+1)\cdot(k^2d^2-9)=$

$=k^4d^2-k^4d^2+9k^2-k^2d^2+9=$

$=9k^2+9>k^2d^2$

$9+\frac{9}{k^2}>d^2$

$(x-6)^2+k^2(x-d)^2=4$

$x^2-12x+32+k^2x^2-2k^2xd+k^2d^2=0.$

$x^2(1+k^2)-2x(6+k^2d)+(k^2d^2+32)=0.$

$\frac{D}{4}=(6+k^2d)^2-(1+k^2)(k^2d^2+32)=$

$=36+k^4d^2+12k^2d-k^2d^2-32-k^4d^2-32k^2=$

$\cancel{=k^2d-32k-31>0}$

$\cancel{k^2d>32k^2+31}$

$\cancel{9+\frac{9}{k^2}>d>32+\frac{31}{k^2}}$ → нонсв.

$\cancel{=11k^2d-32k^2+4>0}$

$\cancel{11k^2d>32k^2-4 \Rightarrow d>\frac{32}{11}-\frac{4}{11k^2}}$