МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^7 3^{11} 5^{14}$, bc делится на $2^{13} 3^{15} 5^{18}$, ac делится на $2^{14} 3^{17} 5^{43}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC. Окружность, касающаяся прямой AC в точке A, пересекает высоту CD, проведённую к гипотенузе, в точке E, а катет BC – в точке F. Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1{,}3$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF.

3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arccos(\sin x) = \dfrac{3\pi}{2} + x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система уравнений
$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0, \\ \left(x^2 + 14x + y^2 + 45\right)\left(x^2 + y^2 - 9\right) = 0 \end{cases}$$
имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам
$$\log_7^4(6x) - 2\log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4, \quad \text{и} \quad \log_7^4 y + 6\log_y 7 = \log_{y^2}\left(7^5\right) - 4.$$
Найдите все возможные значения произведения xy.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-17;68)$, $Q(2;68)$ и $R(19;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно на границе) и таких, что $4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K, лежащей на отрезке AM. Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q. Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 60, $SA = BC = 10$.

   а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1.

   б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N, $SN = 3$, а радиус сферы Ω равен 4.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№1

Пусть $a = 2^{\alpha_1} 3^{\alpha_2} 5^{\alpha_3} \cdot p_1$, $b = 2^{\beta_1} 3^{\beta_2} 5^{\beta_3} \cdot p_2$, $c = 2^{\gamma_1} 3^{\gamma_2} 5^{\gamma_3} p_3$, где $\forall i: \alpha_i \in \mathbb{Z}, \alpha_i \geq 0$, $\beta_i \in \mathbb{Z}$, $\beta_i \geq 0$, $\gamma_i \in \mathbb{Z}$, $\gamma_i \geq 0$, $p_i \in \mathbb{N}$, $(p_i, 2) = (p_i, 3) = (p_i, 5) = 1$

Тогда: $abc = 2^{\alpha_1+\beta_1+\gamma_1} 3^{\alpha_2+\beta_2+\gamma_2} 5^{\alpha_3+\beta_3+\gamma_3} \cdot p_1 p_2 p_3$

Оч. $\min(abc) \Leftrightarrow \begin{cases} \min(\alpha_i+\beta_i+\gamma_i)\ \forall i, \\ \min(p_1 p_2 p_3) \end{cases}$

Заметим, что условие не зависит от выбора $p_1, p_2, p_3 \Rightarrow \min(p_1 \cdot p_2 \cdot p_3) = 1$ $(p_1 = p_2 = p_3 = 1)$

По условию:

$$\begin{matrix} 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14} \mid ab \\ 2^{13} 3^{15} 5^{18} \mid bc \\ 2^{14} 3^{17} 5^{43} \mid ac \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 \geq 7 & (1) \\ \alpha_2 + \beta_2 \geq 11 & (2) \\ \alpha_3 + \beta_3 \geq 14 & (3) \\ \beta_1 + \gamma_1 \geq 13 & (4) \\ \beta_2 + \gamma_2 \geq 15 & (5) \\ \beta_3 + \gamma_3 \geq 18 & (6) \\ \alpha_1 + \gamma_1 \geq 14 & (7) \\ \alpha_2 + \gamma_2 \geq 17 & (8) \\ \alpha_3 + \gamma_3 \geq 43 & (9) \end{cases}$$

(1) + (4) + (7): $2(\alpha_1+\beta_1+\gamma_1) \geq 7 + 13 + 14$

$\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 \geq 17$

(2) + (5) + (8): $2(\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2) \geq 11 + 15 + 17$

$\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 \geq 21{,}5 \Rightarrow \min(\alpha_2+\beta_2+\gamma_2) = 22$

(3) + (6) + (9): $2(\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3) \geq 14 + 18 + 43 \Rightarrow \alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3 \geq 37{,}5$
$\Rightarrow \min(\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3) = 38$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 [x] 2 [ ] 3 [ ] 4 [ ] 5 [ ] 6 [ ] 7 [ ]

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

⇒ №1 (продолжение)

$\min(abc) = 2^{17} 3^{22} 5^{38}$

Ответ: $2^{17} 3^{22} 5^{38}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№3

$5\arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$

$\arccos(\sin x) \in [0;\pi]\ \forall x \Leftrightarrow 5\arccos(\sin x) \in [0;5\pi]\ \forall x$

$\Rightarrow 5\arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2}+x \Leftrightarrow \frac{3\pi}{2}+x \in [0;5\pi]$

$x \in [-\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}]$, $\arccos(\sin x) + \arcsin(\sin x) = \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \arccos(\sin x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin(\sin x)$

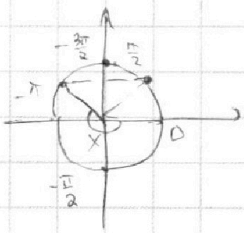
$\frac{5\pi}{2} - \arcsin(\sin x) = \frac{3\pi}{2}+x$

$\pi = \arcsin(\sin x) + x$

1) При $x\in[-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}]$: $\arcsin(\sin x) = -x-\pi$

$\pi = -\pi - x + x$

$\pi \ne -\pi$, нет корней



2). ~~$x\in[-\pi;-\frac{\pi}{2}]$: $\arcsin(\sin x) = -x-\pi$~~

$x\in[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$: $\arcsin(\sin x) = x$

$2x=\pi$

$x=\frac{\pi}{2}$

3) $x\in[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}]$: $\arcsin(\sin x) = -x+\pi$

$\pi = -x+\pi+x$

$\pi=\pi$, $x\in[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}]$ — мн-во корней

4) $x\in[\frac{3\pi}{2};\frac{5\pi}{2}]$: $\arcsin(\sin x) = x-2\pi$

$\pi = x-2\pi+x$

$x=\frac{3\pi}{2}$

Ответ: $x\in[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}]$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

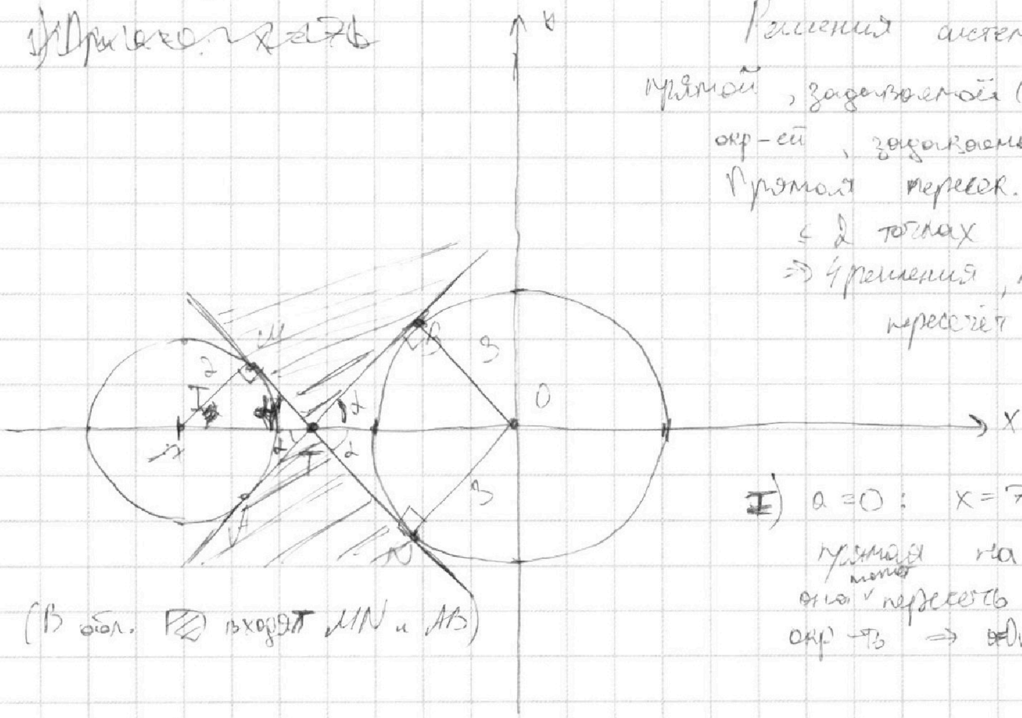
1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Б4 $\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0 \\ ((x+7)^2 + y^2 - 4)(x^2+y^2-9) = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 3ay - 7b + x = 0 \ (1) \\ \left[\begin{array}{l}(x+7)^2 + y^2 = 4 \ (2) \\ x^2+y^2 = 9 \ (3)\end{array}\right. \end{cases}$



Решения системы — пересечения прямой, задаваемой (1) и окр-ей, задаваемых (2) и (3)
Прямая пересек. одну окр-ть ≤ 2 точках $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ 4 решения, когда прямая пересечёт обе окр-ти в 2-ух точках

I) $a = 0$: $x = 7b$ — вертик. прямая на Oxy, но она может пересечь только одну окр-ть $\Rightarrow$ не подходит

(В обл. ▨ входят MN и AB)

II) $3ay - 7b + x = 0$

$y = -\frac{x}{3a} + \frac{7b}{3a}$ Пусть $q = -\frac{1}{3a}$, $p = \frac{7b}{3a}$

Тогда можно переформ. задачу:

При каких q: $\exists p$: система имеет 4 реш-ия

Пусть AB и MN — кас-ые к окр-ям (2) и (3)

Заметим, что p влияет только на расположение прямой, а q — к-нт угла наклона (тангенс).

Рассмотрим пучок прямых из т. T.
Прямые, проходящие через ▨ имеют ≤ 2 пересеч. с окр-ми, а так же все прямые им параллельные
Остальные же имеют 4 пересеч-ия, а все им пар-ые можно в эту точку T перенести параллельно $\Rightarrow$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№4 (прод.)

$\Rightarrow$ ~~все~~ т.е. для всех прямых с k-ом тех прямых найдётся такое p, что будет 4 реш-ия (причём только для них)

$\Rightarrow p \in (-tg\alpha; tg\alpha)$, $tg\alpha = \frac{BO}{BT}$

$\triangle IMT \sim \triangle TBO \Rightarrow \frac{IT}{TO} = \frac{IM}{OB} = \frac{2}{3}$

$\frac{IT+TO}{TO} = \frac{5}{3} = \frac{IO}{TO} \Rightarrow TO = \frac{3}{5} IO = \frac{21}{5}$

$TB = \sqrt{TO^2 - BO^2} = \sqrt{\frac{21^2 - (3\cdot 5)^2}{5}} = \frac{3}{5}\sqrt{7^2 - 5^2} =$

$= \frac{3}{5}\sqrt{49-25} = \frac{3}{5}\sqrt{24}$

$tg\alpha = \frac{3}{\frac{3}{5}\cdot 2\sqrt{6}} = \frac{5}{2\sqrt{6}}$

$-\frac{5}{2\sqrt{6}} < \frac{-1}{3a} < \frac{5}{2\sqrt{6}}$
$\begin{cases} \frac{1}{3a} < \frac{5}{2\sqrt{6}} \\ \frac{1}{3a} < \frac{5}{2\sqrt{6}} \end{cases}$

~~$-\frac{15}{2\sqrt{6}} < \frac{1}{a} < \frac{15}{2\sqrt{6}}$~~

~~$-\frac{2\sqrt{6}}{15} < a < \frac{2\sqrt{6}}{15}$ Ответ $a \in \left(-\frac{2\sqrt{6}}{15}\right.$~~

$\begin{cases} \frac{1 + \frac{15}{2\sqrt{6}}a}{a} > 0 \\ \frac{1 - \frac{15}{2\sqrt{6}}a}{a} < 0 \end{cases}$
$\begin{cases} \frac{\frac{2\sqrt{6}}{15} + a}{a} > 0 \\ \frac{\frac{2\sqrt{6}}{15} - a}{a} < 0 \end{cases}$

$a \in \left(-\infty; -\frac{2\sqrt{6}}{15}\right) \cup \left(\frac{2\sqrt{6}}{15}; +\infty\right)$

Ответ: $a \in \left(-\infty; -\frac{2\sqrt{6}}{15}\right) \cup \left(\frac{2\sqrt{6}}{15}; +\infty\right)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№5

$$\begin{cases} \log_7^4(6x) - 2\log_{6x}7 = \log_{36x^2}7^3 - 4 \\ \log_7^4(y) + 6\log_y 7 = \log_{y^2}(7^5) - 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_7^4(6x) - \frac{2}{\log_7(6x)} = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{\log_7 6x} - 4 \\ \log_7^4(y) - \frac{6}{\log_7 y} = \frac{5}{2}\frac{1}{\log_7 y} - 4 \end{cases}$$

Пусть $u = \log_7 6x$, $v = \log_7 y$, тогда $u, v \neq 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow xy = \frac{7^{u+v}}{6}$, нужно найти все $u+v$

$$\begin{cases} 2u^5 + 8u = 7 \\ 2v^5 + 8v = -7 \\ uv \neq 0 \end{cases} \overset{+}{\Rightarrow} \begin{cases} 2(u^5+v^5) + 4(u+v) = 0 \\ uv \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (u+v)(u^4 - uv^3 + u^2v^2 - u^3v + v^4 + 4) = 0 \\ uv \neq 0 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} u + v = 0 \quad (1) \\ u^4 - uv^3 + u^2v^2 - u^3v + v^4 + 4 = 0 \quad (2) \end{array}\right.$$

2) $(u^2 + v^2 - \sqrt{2}uv)(u^2 + v^2 + \sqrt{2}uv) - uv(u^2 + v^2 - uv) + 4 = 0$

Пусть $\alpha = v^2 + u^2$, $\alpha > 0$

$\beta = uv$, тогда $(u+v)^2 = \alpha + 2\beta$

$$(\alpha - \sqrt{2}\beta)(\alpha + \sqrt{2}\beta) - \beta(\alpha - \beta) + 4 = 0$$

$$\alpha^2 - 2\beta^2 - \beta\alpha + \beta^2 + 4 = 0$$

$$\alpha^2 - \beta^2 - \beta\alpha + 4 = 0$$

$D = \beta^2 - 4(-\beta^2 + 4) = \beta^2 + 4\beta^2 - 16 = 5\beta^2 - 16$,

$$\alpha = \frac{\beta \pm \sqrt{5\beta^2 - 16}}{2}$$

$$\alpha + 2\beta = \frac{5\beta \pm \sqrt{5\beta^2 - 16}}{2} > 0 \Rightarrow \alpha + 2\beta = \frac{5\beta \pm \sqrt{5\beta^2 - 16}}{2}$$

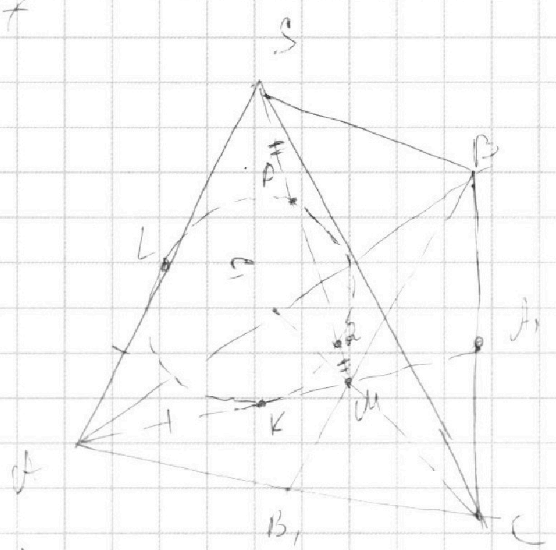
1) $u + v = 0 \Rightarrow xy = \frac{1}{6}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№7



1) Рассмотрим сечение пл-ью (ASM) — ω — окр-ть, кас-щаяся в т. L и R от-ов AS и AM соот-но и перес-ая SM в т. P и Q

2) $KM = MQ \cdot MP$ (по св-ву отр-ов кас-щих)

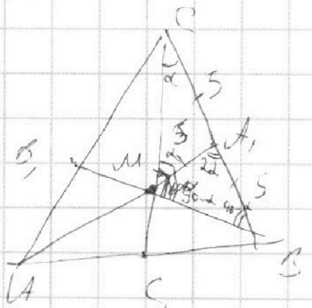
$LS = SQ \cdot SP$; $SQ = SP + PQ = MQ + PQ = MP$

$LS = MQ \cdot MP = KM$,

$AL = AR$ (т.к. отр-ки кас-ых из одной т. A)

$\Rightarrow AS = AL + LS = AK + KM = AM = 10$

3)



$A_1M = \frac{1}{2}AM = 5$ (по св-ву центра тяжести M)

$CA_1 = A_1B = \frac{BC}{2} = 5$

$\triangle CMB$:

A_1M — медиана, $A_1M = CA_1 = A_1B$

$\Rightarrow \angle CMB = 90^\circ$ (по пр-ку) (т.к. A_1M - медиан)

$S(CMB) = 2S(CA_1M) = \frac{S(ABC)}{6} \cdot 2 = \frac{S(ABC)}{3} = 20$ (по св-ву медиан)

$\frac{1}{2} CM \cdot MB = 20 \Rightarrow CM \cdot MB = 40$, по т. Пифагора

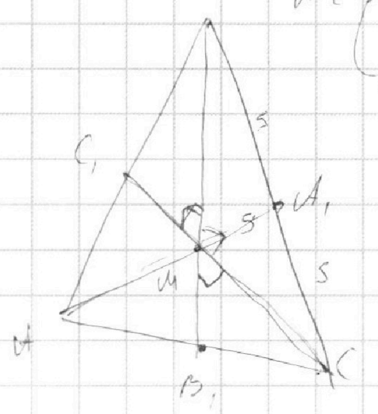
$CM^2 + MB^2 = 10^2 \Rightarrow (CM + MB)^2 = 140$, $(CM - MB)^2 = 60$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\triangle ABC$:



По т. Пифагора:

$AC = 2B_1C = 2\sqrt{MC^2 + MB_1^2}$,

$AB = 2BC_1 = 2\sqrt{MC_1^2 + BM^2}$

По ф. Герона находим

$$\frac{h_A \cdot BC}{2} = 60 \Rightarrow h_A = \frac{120}{BC} = 12$$

$\Rightarrow$ $\operatorname{tg}\alpha =$ $\angle S(BC)A = 2\operatorname{arctg}\left(\frac{15}{24}\right)$

Ответ: а) 15, $\frac{3}{2}(\sqrt{35} - \sqrt{15})$, $\frac{3}{2}(\sqrt{35} + \sqrt{15})$

б) $2\operatorname{arctg}\left(\frac{15}{24}\right)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

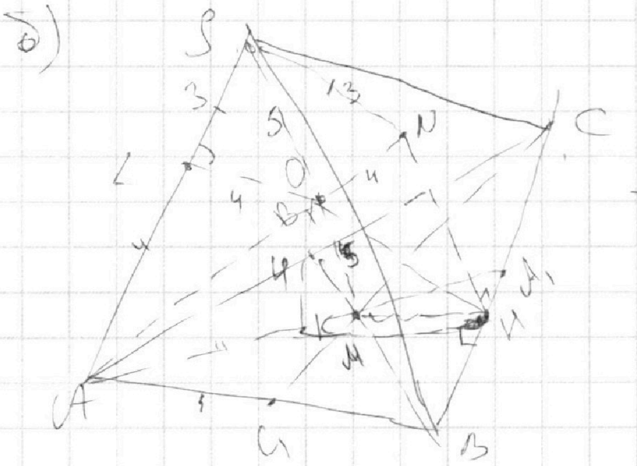
МФТИ

$$\begin{cases} CM + MB = 2\sqrt{35} \\ CM - MB = 2\sqrt{15} \end{cases} \Rightarrow CM = \sqrt{35} + \sqrt{15},\ MB = \sqrt{35} - \sqrt{15},$$

По св-ву медиан: $B_1M = \frac{1}{2}BM \Rightarrow BB_1 = \frac{3}{2}BM = \frac{3}{2}\cdot(\sqrt{35} - \sqrt{15})$

аналогично $CC_1 = \frac{3}{2}(\sqrt{35} + \sqrt{15})$, $AA_1 = 15$

б)



Пусть O − ц-р Ω

$OM = ON = OL = 4$ − радиусы Ω,

$ON \perp (BCS)$, $OK \perp (ABC)$ $\Rightarrow ON, OK \perp BC \Rightarrow BC \perp (OKN) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Пусть $H = BC \cap (OMN) \Rightarrow BC \perp KH, NH \Rightarrow$ $\Rightarrow$ угол $S(BC)A = \angle NHK$

$\Rightarrow$ Пусть $\alpha = \angle OHK \Rightarrow$ угол $S(BC)A = 2\alpha$ (т.к. $\triangle ONH = \triangle OKH$ по III пр-ку ($NH = HK$, $OH = OH$))

$tg\,\alpha = \frac{4}{KH}$ (т.к. $OK \perp (ABC)$, то $\triangle OKH$ − прямоуг.)

$\frac{KH}{h_A} = \frac{KA_1}{AA_1}$ (из подобия) $\Rightarrow KH = \frac{KA_1}{AA_1} h_A$ (h_A − высота в $\triangle ABC$ из т. A)

$SL = SN = 3$ (т.к. кас-ые из одной точки S)

$OM = 5$ (из симметрии отн-но AC)

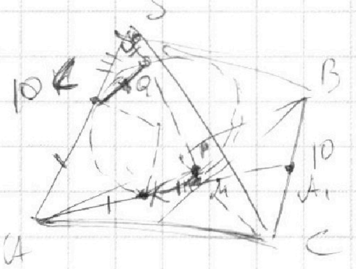
$\Rightarrow KM = 3 = \sqrt{OM^2 - OK^2}$ (по т. Пифагора), $KA_1 =$
$= KM + MA_1 = 8 \Rightarrow \frac{KA_1}{AA_1} = \frac{8}{15} \Rightarrow tg\alpha = \frac{4}{KH} = \frac{4AA_1}{h_A A_1K} =$
$= \frac{15}{2h_A}$, $tg\,\angle S(BC)A = 2arctg\alpha = 2arctg\left(\frac{15}{2h_A}\right)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

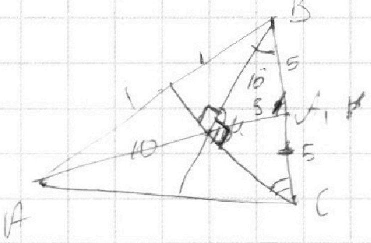
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

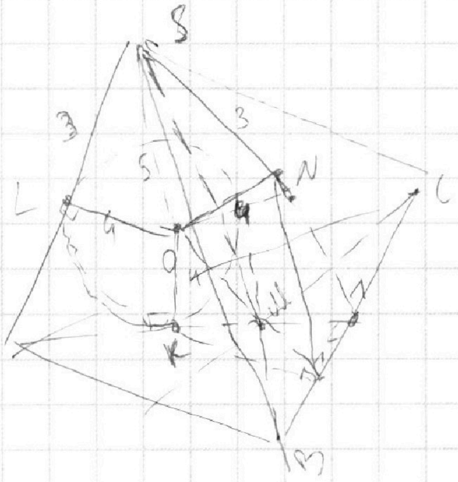
Черновик



$S(ABC) = 60$ $AS = AM$

$AM = 10 \rightarrow MA_1 = 5$





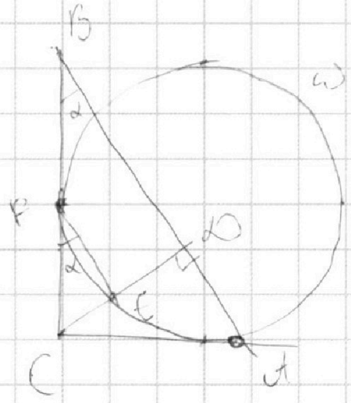
$BC \perp (OKN)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№2



1) Заметим, что
BC кас-ся ω ⇒
⇒ CF = CA, как отр-ки
кас-ых

2) $CD = \sqrt{BD \cdot DA} =$
$= \sqrt{BD(AB - BD)} = \sqrt{BD \cdot 0{,}3 \cdot BD}$
$= \sqrt{0{,}3}\, BD$

3) По т. Пифагора:
$BC = \sqrt{CD^2 + BD^2} = BD\sqrt{1{,}3}$,
$AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{1{,}3^2 - 1{,}3}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

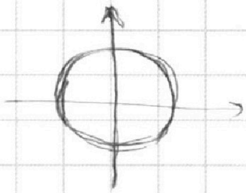
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Черновик



Б4 $a = ? : \exists b :$ 4 решения

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0 \\ \left((x+7)^2 + y^2 + 45 - 49\right)(x^2+y^2-9) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0 \\ \left[\begin{array}{l} (x+7)^2 + y^2 = 4 \\ x^2 + y^2 = 9 \end{array} \right. \end{cases}$$

← прямой, с любыми k-ми по сути

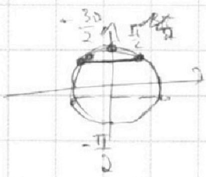
Отсюда 3а

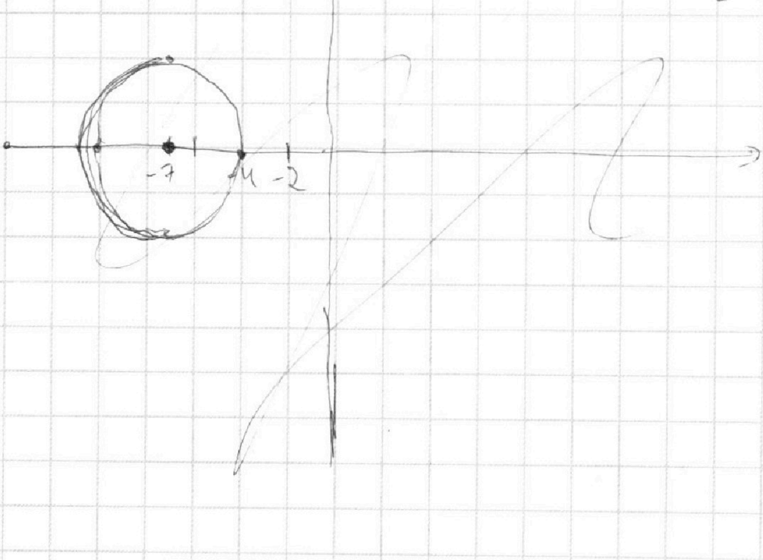
← окр-ти

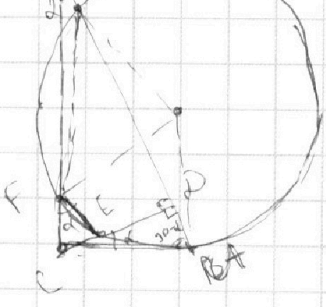
I) $a = 0$: $x = 7b$

II) $a \neq 0$. Пусть $\frac{7b}{3a} = q$, $-\frac{1}{3a} = p$

$$y = \cancel{\frac{q}{p}} \cancel{px}\ px - \frac{q}{p}$$







На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Черновик

$a, b, c \quad 2^7 3^{11} 5^{14} \mid ab, \quad 2^{13} 3^{15} 5^{18} \mid bc,$

$2^{14} 3^{17} 5^{43} \mid ac, \quad \min(abc) = ? \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow a = 2^{\alpha_1} 3^{\alpha_2} 5^{\alpha_3}, \; b, c$ аналогично

$\min(\alpha_i + \beta_i + \gamma_i) = ?$ $\forall i$

$\alpha_1 + \beta_1 \geq 7 \qquad \beta_1 + \gamma_1 \geq 13$

$\alpha_2 + \beta_2 \geq 11 \qquad \beta_2 + \gamma_2 \geq 15$

$\alpha_3 + \beta_3 \geq 14 \qquad \beta_3 + \gamma_3 \geq 18$

$\gamma_1 + \alpha_1 \geq 14$

$\gamma_2 + \alpha_2 \geq 17$

$\gamma_3 + \alpha_3 \geq 43$

$$\begin{cases} \alpha_3 + \beta_3 \geq 14 \\ \beta_3 + \gamma_3 \geq 18 \\ \gamma_3 + \alpha_3 \geq 43 \end{cases} (+)$$

$\beta_3 \geq 18 - \gamma_3$

$\beta_3 \geq 14 - \alpha_3$ (+)

$\beta_3 \geq 9 + 7 - \frac{\alpha_3 + \gamma_3}{2} \geq 16 - \frac{43}{2}$? 21,5

$2(\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3) \geq 7 + 9 + \frac{43}{2}$

№ 3 $\quad 5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$

$\in [0; \pi] \Rightarrow 5\arccos\ldots \in [0; 5\pi]$

$\frac{3\pi}{2} + x \in [0; 5\pi]$

$x \in [-\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}]$ и Разобрать случаи

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Черновик

$u^4+v^4-uv(v^2-uv+u^2)+4=0$

$u^4+2u^2v^2+v^4-2u^2v^2=(u^2+v^2-\sqrt{2}uv)(u^2+v^2+\sqrt{2}uv)$

$\alpha=u^2+v^2$

$\beta=uv$

$\alpha+2\beta=(u+v)^2$

$(\alpha-\sqrt{2}\beta)(\alpha+\sqrt{2}\beta)-\beta(\alpha-\beta)+4=0$

$\alpha^2-2\beta^2+\beta^2-\alpha\beta+4=0$

$\alpha^2-\alpha\beta-\beta^2+4=0$

~~$\alpha^2+2\alpha\beta-3\alpha\beta-\beta^2=0$~~

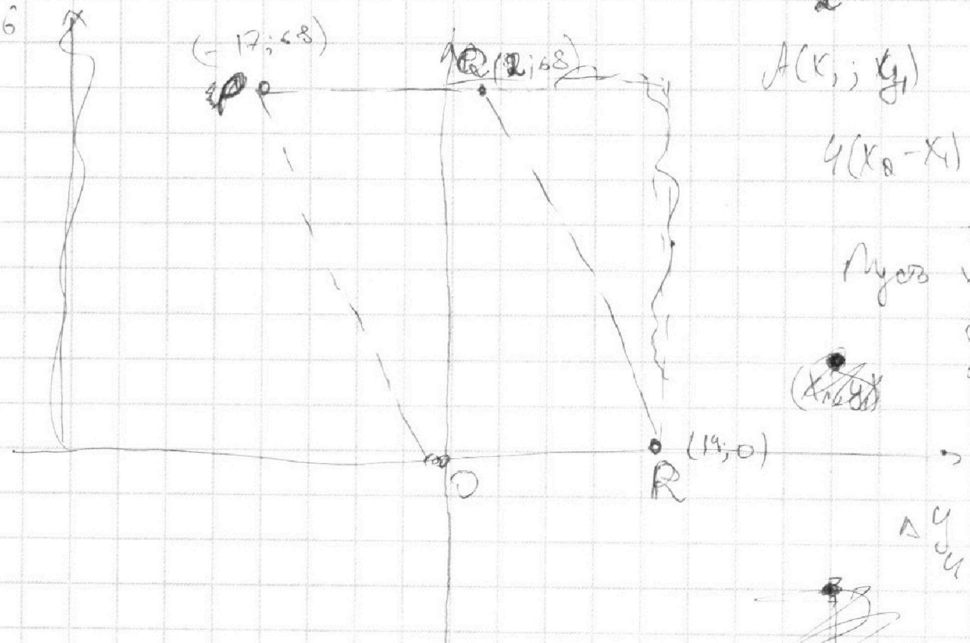
$\alpha^2-\alpha\beta-\beta^2+4=0$

$\alpha=\frac{\beta\pm\sqrt{\beta^2+4\beta^2-16}}{2}$

$\alpha+2\beta=$

$=\frac{\beta}{2}+\sqrt{\beta+\beta^2}$

№6



$A(x_1;y_1)$ $B(x_2;y_2)$

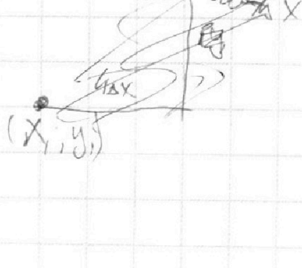
$4(x_2-x_1)+(y_2-y_1)=40$

Пусть $x_2=\Delta x+x_1$

$y_2=\Delta y+y_1$

$4\Delta x+\Delta y=40$

$\Delta y=40-4\Delta x$



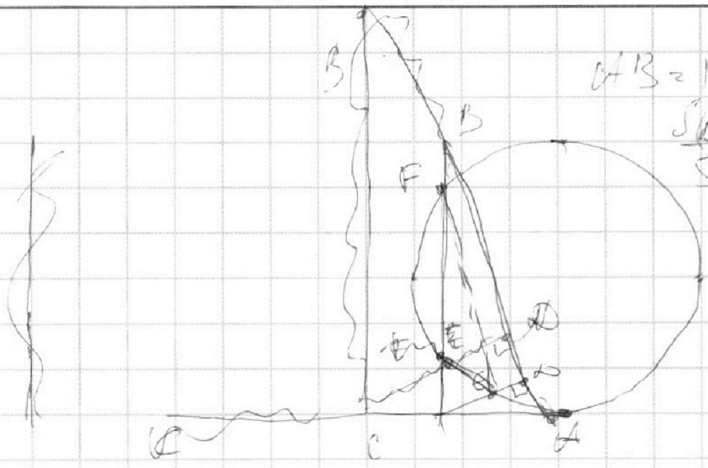
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

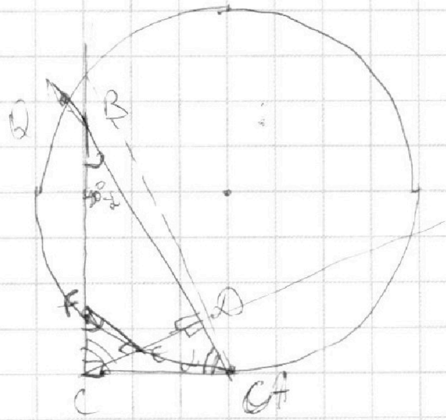
Черновик



$AB = 1{,}3BD$

$\frac{S(\triangle ACD)}{S(CEF)} = ?$

$\smile AQ = 2\alpha$



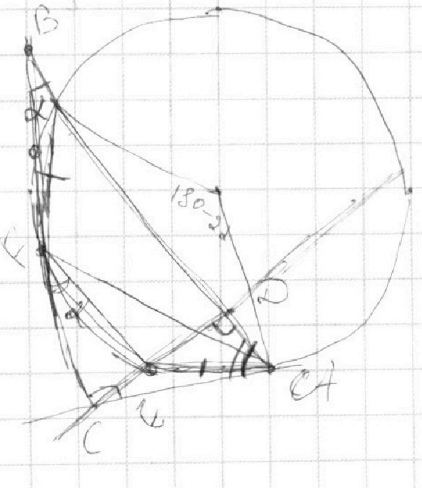
$AD = 0{,}3\,BD$

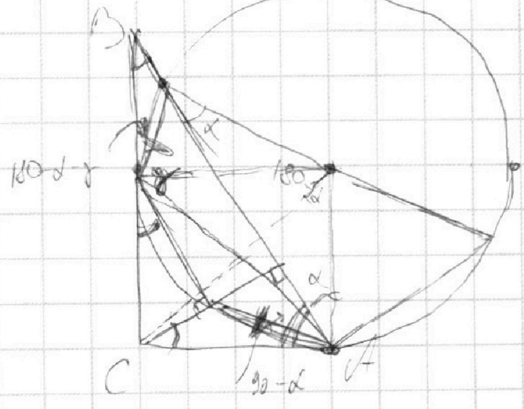
$CD = \sqrt{1{,}3\cdot 0{,}3}\,BD$

$BC = \sqrt{1-1{,}3\cdot 0{,}3}\,BD$

$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1-1{,}3\cdot 0{,}3}} = \frac{10}{\sqrt{61}}$

$\frac{13\cdot 3}{100} = \frac{39}{100}$





$90-\alpha-(180-\gamma) =$
$= \gamma-\alpha+90^\circ$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

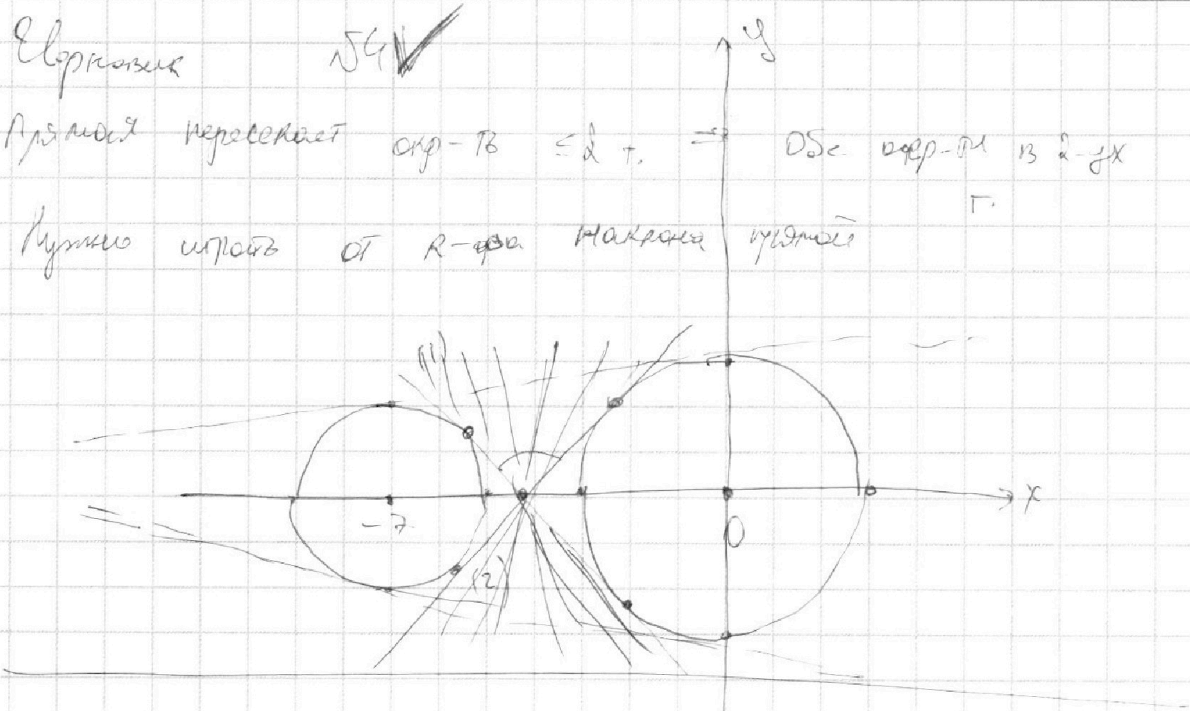
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Черновик №4

Прямая пересекает окр-ть ≤ 2 т. $\Rightarrow$ Общ. окр-ти в 2-ух т.

Нужно играть от к-фа наклона прямой



№5 $\log_7^4(6x) - 2\log_{6x}7 = \log_{36x^2}7^3 - 4$

$\log_7^4(6x) - \frac{2}{\log_7 6x} = \frac{3}{2}\log \frac{1}{\log_7 6x} - 4$

$u^4 - \frac{2}{u} = \frac{3}{2u} - 4 \,|\, 2u$

$v^4 + \frac{6}{v} = \frac{5}{2v} - 4 \,|\, 2v$

$u + v = \log_7 6x + \log_7 y = \log_7 6xy$

$\frac{7^{u+v}}{6} = xy \Leftrightarrow u + v = ?$

$2u^5 - 4 = 3 - 8u$
$2v^5 + 12 = 5 - 8v$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$\begin{cases} 2u^5+8u=7 \\ 2v^5+8v=-7 \end{cases} \quad (+)$$

$\cancel{2}(u^5+v^5)+\cancel{8}^{4}(u+v)=0$

$u^5+v^5=-4(u+v)$

$(u^5+v^5) = (u+v)(u^4-uv^3+$

$+u^2v^2-u^3v+v^4)$

$(u+v)(u^4-uv^3+u^2v^2-u^3v+v^4)=u^5+v^5+$

$+\cancel{u^2v^3}+\cancel{u^3v^2}-\cancel{u^4v}+uv^4-\cancel{uv^4}+\cancel{u^2v^3}-\cancel{u^3v^2}+\cancel{u^4v}$

$(u+v)(u^4-uv^3+u^2v^2-u^3v+v^4)+4(u+v)=0$

$(u+v)(u^4-uv^3+u^2v^2-u^3v+v^4+4)=0$

$$\left[\begin{array}{l} u+v=0 \quad (1) \Rightarrow x+y=\frac{1}{6} \\ u^4-v^3u+u^2v^2-u^3v+v^4+4=0 \quad (2) \end{array}\right.$$

2) $u^4+v^4+vu(uv-v^2-u^2)+4(v+u)=0$

$u^4+v^4-uv\dfrac{(v^3+u^3)}{v+u}+4(v+u)=0 \quad | \cdot v+u$

$\dfrac{u^5+v^5}{u+v}+\dfrac{4(v+u)^2}{u+v}=0$

$u^5+v^5+u^4v+v^4u-uv^4-u^4v+4(u+v)^2=0$

$u^5+v^5+4(u+v)^2=0$

$4(u+v)^2-4(u+v)=0$

$(u+v)(u+v-1)=0$

$u+v=1$

$u^4-v^3u+u^2v^2-u^3v+v^4+4=0$

$\geq 3u^2v^2-v^3u-u^3v=3uv(3uv-v^2-v^2)$