



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



$$ab = 2^8 3^{14} 5^{12} \quad bc = 2^{12} 3^{20} 5^{17} \quad ac = 2^{14} 3^{21} 5^{39}$$

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^8 3^{14} 5^{12}$, bc делится на $2^{12} 3^{20} 5^{17}$, ac делится на $2^{14} 3^{21} 5^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

$$abc = \sqrt{2^{37} 3^{55} 5^{68}} = 2^{17} 3^{27} 5^{34}$$

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой BC в точке B , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке F , а катет AC – в точке E . Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 5 : 2$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF .

3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases} \quad (y-10)^2 + x^2 = 36 = 0$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3, \quad \text{и} \quad \log_5^4 y + 4 \log_y 5 = \log_{y^3} 0,2 - 3.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-16;80)$, $Q(2;80)$ и $R(18;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 100, $SA = BC = 16$.

а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .

б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:



- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$n \in \mathbb{N}$
 $a, b, c \in \mathbb{N}$ $ab: 2^8 3^{14} 5^{12}$, $bc: 2^{12} 3^{20} 5^{17}$, $ac: 2^{14} 3^{21} 5^{39}$
 $\min abc = ?$ Найдем наиб. степень 2, на которую

делится abc : Пусть x, y, z — 2-показатели a, b, c соответ. Тогда $\begin{cases} x+y \geq 8 \\ y+z \geq 12 \\ z+x \geq 14 \end{cases}$ ~~но~~ $\begin{cases} x=5 \\ y=3 \\ z=9 \end{cases}$ — по-
 ходят, потому что реш. ~~не~~ когда не-во превращается
 в р-во. $x+y+z=17$. Найдем наиб. 3-показатель abc :

Пусть x, y, z — 3-показатели a, b, c соответ. Тогда $\begin{cases} x+y \geq 14 \\ y+z \geq 20 \\ z+x \geq 21 \end{cases}$.
 Когда все не-ва превращаются в р-ва эти сист. не имеет
 реш. Попробуем, что если мы увеличим одну из правых
 частей на 1 и новая сист. будет иметь реш., их сумма
 будет наиб. (потому что $(x+y) + (y+z) + (z+x) = 2(x+y+z)$).

$\begin{cases} x+y=14 \\ y+z=21 \\ z+x=21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=7 \\ y=7 \\ z=14 \end{cases}$ $x+y+z=28$. Найдем наиб. 5-показ-

затель abc : Пусть x, y, z — 5-показатели a, b, c соответ.
 верно. Тогда $\begin{cases} x+y \geq 12 \\ y+z \geq 17 \\ z+x \geq 39 \end{cases}$: Т.к. $y \geq 0$, $(x+y) + (y+z) \geq z+x \geq 39$.
 Значит $x+y+z \geq \frac{78}{2} = 39$.

~~При~~ $x=12, y=0, z=27$ — удовлетворяют системе. Значит
 $\min x+y+z=39$. Значит abc наиб. значит abc
 равно $2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39}$.

Ответ: $2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39}$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

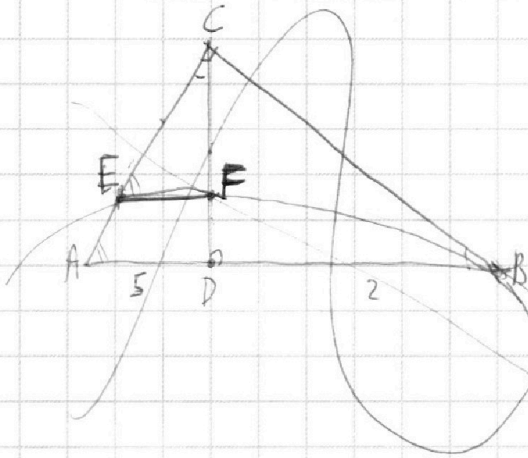
Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

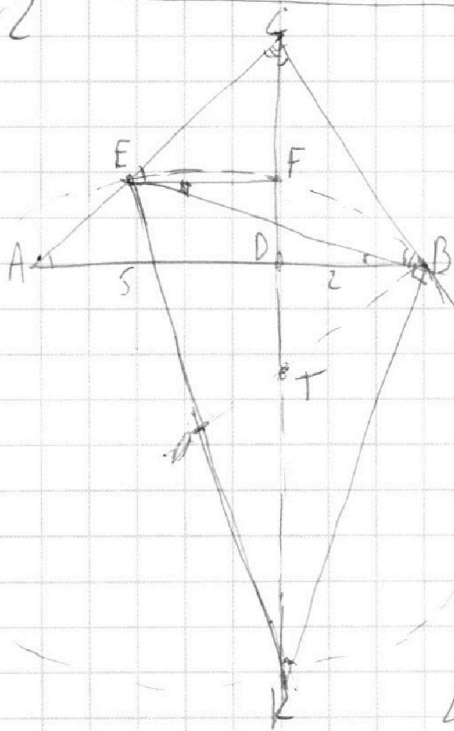
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$AB \parallel EF$ $\frac{AD}{DB} = \frac{5}{2}$ $\frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = ?$
 ~~$\triangle ABC \sim \triangle EFC$~~
 Пусть $DB = 2x \Rightarrow AD = 5x$
 $CD = \sqrt{DB \cdot AD} = \sqrt{10}x$

~2



$AB \parallel EF$ $\frac{AD}{DB} = \frac{5}{2}$ $\frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = ?$
 Пусть $BD = 2$. Тогда $AD = 5$.
 $CD = \sqrt{2 \cdot 5} = \sqrt{10}$ $CB = \sqrt{10+4} = \sqrt{14}$
 Пусть продолжим прямую CD за T. D пересекает окр. повторно
 в т. К. Тогда по т. о степени точки CF: $CF \cdot CK = CB^2 = 14$
 Если O - центр окр. то $OB \parallel AC$, т.к. эти 2 прямые $\perp CB$,
 Пусть O - центр окружности.

$\angle FEB = \angle EBA$ (как накрест. лежащие при ||), $\angle FEB = \angle FKB$ (как остр. на одну хорду) $\Rightarrow \angle EBA = \angle FKB \Rightarrow \angle EBK = 90^\circ \Rightarrow EK$ - диаметр.
 $CK = CF + EK = CF + \sqrt{EK^2 - EF^2}$
 $14 = CF^2 + CF \sqrt{EK^2 - EF^2} \Rightarrow CK = CD + DK$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\sqrt{3}$
 ~~$10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$~~
 ~~$10 \arcsin(\cos x) = 10 \left(\frac{\pi}{2} - \arccos x \right)$~~
 $10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x \Leftrightarrow -10 \arccos(\cos x) + 5\pi = \pi - 2x \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 10 \left(\frac{\pi}{2} - \arccos(\cos x) \right) = \pi - 2x \Leftrightarrow \left(10 \left(\frac{\pi}{2} - y \right) = \pi - 2x \Leftrightarrow \right.$
 $\left. \begin{cases} 0 \leq y \leq \pi, \\ y = \pm x + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \right)$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} 5\pi - 10y = \pi - 2x \\ 0 \leq y \leq \pi \\ y = \pm x + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\pi = 5y - x \\ 0 \leq y \leq \pi \\ y = \pm x + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$
1) $y = x + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} : 2\pi = 5x + 10\pi k - x \Leftrightarrow x = \frac{\pi - 5\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$
 $y = \frac{\pi - 5\pi k}{2} + 2\pi k = \frac{\pi + \pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$, т.к. $0 \leq y \leq \pi$ $k=0$,
 $x = \frac{\pi}{2}$ или $k=1$ $y=0$ $x = -2\pi$ или $k=-1$ $x = 3\pi$
2) $y = -x + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} : 2\pi = -5x + 10\pi k - x \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} + \frac{5\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z}$
 $y = \frac{\pi}{3} - \frac{5\pi k}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow y = \frac{\pi + \pi k}{3}$, т.к. $0 \leq y \leq \pi$,
либо $k=0$ $x = -\frac{\pi}{3}$, либо $k=1$ $x = \frac{4\pi}{3}$, либо $k=2$
 $x = 3\pi$, либо $k=-1$ $x = -2\pi$.

Ответ: $\left\{ \frac{\pi}{2}, -2\pi, 3\pi, -\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3} \right\}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

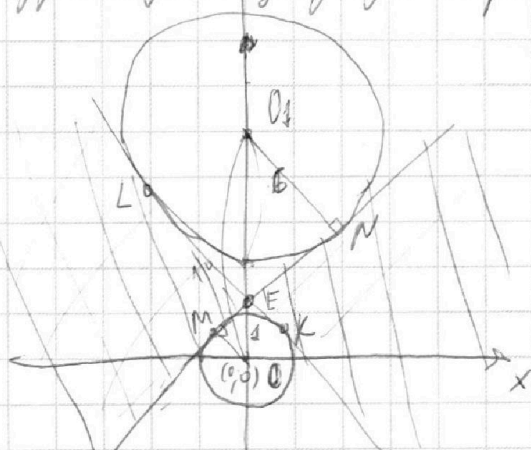
№4

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \\ ax - 3y + 4b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ x^2 + y^2 - 20y + 64 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ (x^2 + y^2 - 10)^2 = 6^2 \end{cases}$$

— уравнения окружностей. $ax - 3y + 4b = 0$ — ур-ие прямой.

Значит нам надо найти значения a и b $ax - 3y + 4b = 0 \Leftrightarrow y = \frac{a}{3}x + \frac{4}{3}b$

Значит нам надо найти значения ~~и~~ ~~условных~~ ~~коэф.~~ при которых упр. прямая с этим коэф., пересекающая каждую из этих двух окр. в 2 точки. Заметим, что нам



подходят только коэф. прямых

Пусть O, O_1 — центры окруж.

KL и MN — точки касания общих кас. с окружностями, E — точка перес. общих касат. Заметим,

что нам подходит только те условные коэф., которые являются условными коэф. прямых проходящих через E и лежащих в области, заштрихованной линией на рисунке. Их условные коэф. будут лежать между усл. коэф. LK и MN . Условный коэф. $LK = \text{tg} \angle KEO = EK = \sqrt{EO^2 - 1}$

$EO = \frac{1}{7} \cdot 10 = \frac{10}{7}$ (из подобия $\triangle O_1NE$ и $\triangle OME$) $\text{tg} \angle K = \sqrt{\frac{100 - 49}{49}} = \frac{\sqrt{51}}{7}$

Условный коэф. $MN = -\frac{\sqrt{51}}{7}$. Значит $-\frac{\sqrt{51}}{7} < \frac{a}{3} < \frac{\sqrt{51}}{7}$

Ответ: $-\frac{3}{7}\sqrt{51} < a < \frac{3}{7}\sqrt{51}$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№5

$$\log_5^4(2x) - 3 \log_2 x^5 = \log_{2x^3} 625 - 3$$

$xy = ?$

$$\log_5^4 y + 4 \log_5 y^5 = \log_{y^3} 12 - 3$$

Зона опр: $x, y > 0$.

сделаем замену

$$\log_5 2x = z \quad z^4 - \frac{3}{z} = \log_{(2x)^3} 5^4 - 3 = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{z} - 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z^4 - \frac{13}{3z} + 3 = 0 \Leftrightarrow z^5 - \frac{13}{3} + 3z = 0 \Leftrightarrow z^5 + 3z - \frac{13}{3} = 0$$

сделаем замену $\log_5 y = v$. Тогда ~~$v^4 + \frac{1}{v} = -\frac{1}{3v^3}$~~

$$\Leftrightarrow v^4 + \frac{13}{3v} + 3 = 0 \Leftrightarrow v^5 + 3v + \frac{13}{3} = 0$$

$$\log_5 2x = z \Leftrightarrow 5^z = 2x \Leftrightarrow x = \frac{5^z}{2} \quad \log_5 y = v \Leftrightarrow y = 5^v$$

$$xy = \frac{5^{z+v}}{2} \quad \text{Так чему же может быть равна сумма}$$

$$z \text{ и } v, \text{ если } \begin{cases} v^5 + 3v + \frac{13}{3} = 0 \\ z^5 + 3z - \frac{13}{3} = 0 \end{cases} \quad \text{Обе функции монотонно}$$

возрастают, но эту систему имеет ровно 1 решение. Т.к. каждая

$$\text{имеет } \Leftrightarrow \text{сист. } \begin{cases} v^5 + \frac{13}{3v} + 3 = 0 \\ z^4 - \frac{13}{3z} + 3 = 0 \end{cases}$$

имеет $(v; z)$ -реш. сист., то и это решение сист.

имеет вид $(v; -v)$.

$$\text{Значит } xy = \frac{5^{z+v}}{2} = \frac{5^{v+(-v)}}{2} = \frac{1}{2}$$

Ответ: $\frac{1}{2}$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\log_5^4(2x) - 3 \log_2 v 5 = \log_2 x^3 625 - 3$$

$$\log_5^4 y + 4 \log_2 y 5 = \log_2 y^3 0,2 - 3$$

$$\log_2 5 = z \quad \frac{1}{2^4} - 3z = -3$$

$$\log_2(x)^3 625 = \log_2 x^3 \quad \frac{1}{v^4} + 4v = -\frac{1}{3}v - 3$$

$$\frac{1}{2^4} - \frac{13}{3}z + 3 = 0$$

$$\frac{1}{v^4} + \frac{13}{3}v + 3 = 0$$

$$xy = \frac{t}{2} \quad y = \frac{\log_5 \frac{1}{z}}{\log_5 \frac{1}{v}} = \frac{\log_5 z}{\log_5 v}$$

$\log_2 5 = z$ — решение куба, $v = -z$ — второе

$$x, y > 0$$

$$t^z = 5$$

$$t = 5^{\frac{1}{z}}$$

$$\frac{13}{3}v^5 + 3v^4 + 1 = 0$$

$$\frac{13}{3}(v^5 - z^5) + 3(v^4 - z^4) = 0 \quad v = z$$

$$v^5 - z^5 = (v - z)(v^4 + v^3z + v^2z^2 + vz^3 + z^4)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} x+y \geq 8 \\ x+y=12 \\ x+z=14 \end{cases} \quad \begin{matrix} x=5 \\ \Leftrightarrow y=3 \\ z=9 \end{matrix}$$

$$\begin{cases} x+y \geq 14 \\ y+z \geq 20 \\ z+x \geq 21 \end{cases} \quad \begin{matrix} x+y=14 \\ y+z=20 \\ z+x=21 \end{matrix}$$

$$\begin{cases} x+y=12 \\ y+z=17 \\ z+x=39 \end{cases} \quad \begin{matrix} x=17 \\ \Leftrightarrow y=-5 \\ z=12 \end{matrix}$$

$$\begin{cases} x+y \geq 14 \\ y+z \geq 21 \\ z+x \geq 21 \end{cases} \quad \begin{matrix} x=y=7 \\ z=14 \end{matrix}$$

$$10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$$

$$10 \arccos(\cos x) = \pi - 2x$$

$$10 - x = \pi - 2x$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№4

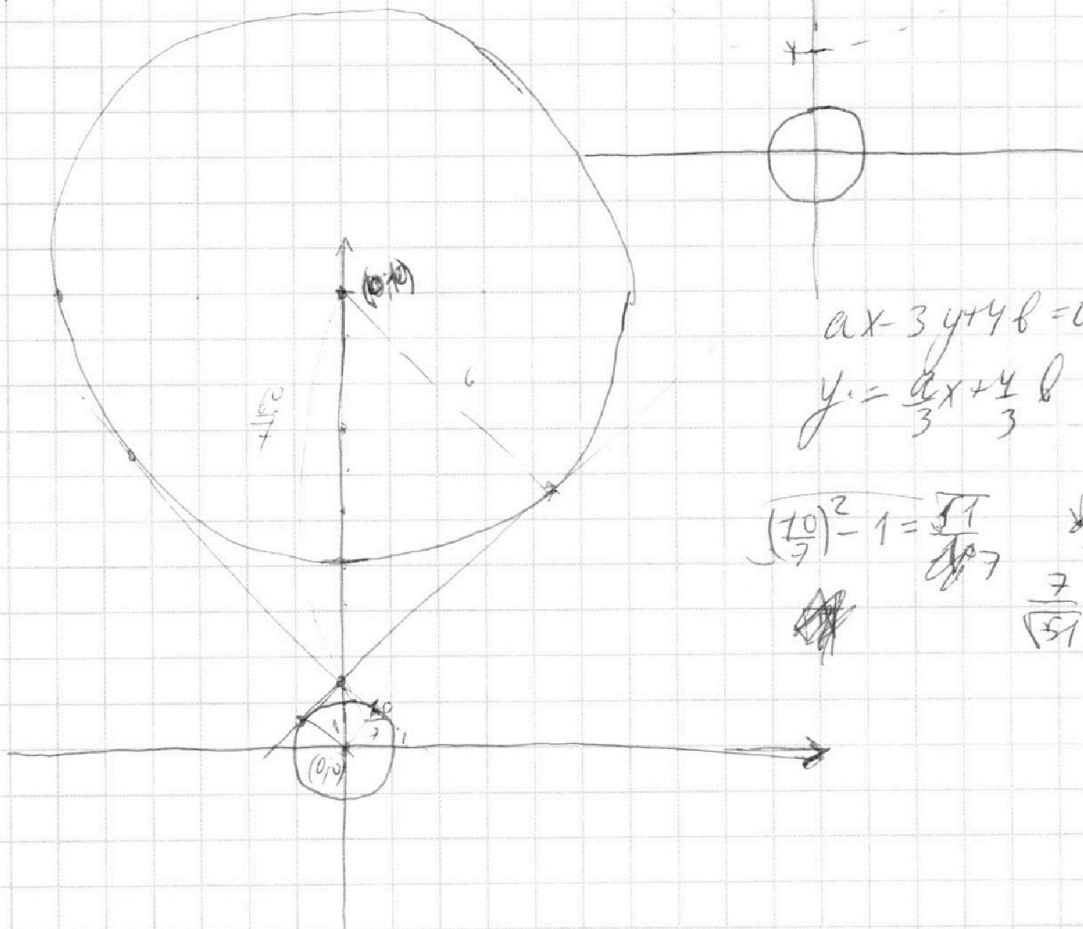
$$ax - 3y + 4b = 0$$

$$(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0$$

— уравнения окр.

$$x^2 + y^2 - 1 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 20y + 64 = x^2 + (y - 10)^2 - 36 = 0$$



$$ax - 3y + 4b = 0 \text{ — прямая}$$
$$y = \frac{a}{3}x + \frac{4}{3}b$$

$$\left(\frac{10}{3}\right)^2 - 1 = \frac{11}{9}$$
$$\frac{7}{\sqrt{11}}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~~$\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{2x} 3625 - 3$~~

~~$\log_5^4 y + 4 \log_{y^5} 5 = \log_y 30,2 - 3$~~

~~$xy - ?$~~

~~Зона стр.: $x, y > 0$.~~

~~Сделаем замену $\log_5 2x = z, 3 + z^4 - \frac{3}{z} = \frac{1}{z} = \frac{3}{4z} \Leftrightarrow$~~

~~$\Leftrightarrow z^5 + 3z - \frac{15}{4} = 0$~~

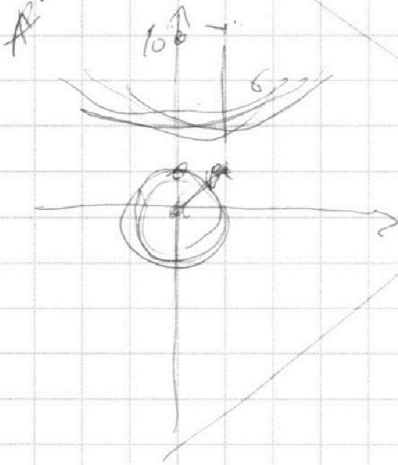
~~Теперь замену $\log_5 y = v, v^4 + \frac{4}{v} = \frac{1}{v}$~~

~~xy~~

~~$ax - 3y + 4b = 0$~~

~~$(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 2ay + 6y) = 0$~~

~~$(x^2 + y^2 - 10)^2 = 36$~~



~~$ax - 3y + 4b = 0$~~

~~$y = \frac{ax}{3} + \frac{4}{3}b$~~



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

