



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



$$ab = 2^8 3^{14} 5^{12} \quad bc = 2^{12} 3^{20} 5^{17} \quad ac = 2^{14} 3^{21} 5^{39}$$

1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^8 3^{14} 5^{12}$ ,  $bc$  делится на  $2^{12} 3^{20} 5^{17}$ ,  $ac$  делится на  $2^{14} 3^{21} 5^{39}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .

$$abc = \sqrt{2^{37} 3^{55} 5^{68}} = 2^{17} 3^{27} 5^{34}$$

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник  $ABC$ . Окружность, касающаяся прямой  $BC$  в точке  $B$ , пересекает высоту  $CD$ , проведённую к гипотенузе, в точке  $F$ , а катет  $AC$  – в точке  $E$ . Известно, что  $AB \parallel EF$ ,  $AD : DB = 5 : 2$ . Найдите отношение площади треугольника  $ABC$  к площади треугольника  $CEF$ .

3. [4 балла] Решите уравнение  $10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$ .

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases} \quad (y-10)^2 + x^2 = 36 = 0$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют равенствам

$$\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3, \quad \text{и} \quad \log_5^4 y + 4 \log_y 5 = \log_{y^3} 0,2 - 3.$$

Найдите все возможные значения произведения  $xy$ .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0; 0)$ ,  $P(-16; 80)$ ,  $Q(2; 80)$  и  $R(18; 0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$ .

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида  $SABC$ , медианы  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Сфера  $\Omega$  касается ребра  $AS$  в точке  $L$  и касается плоскости основания пирамиды в точке  $K$ , лежащей на отрезке  $AM$ . Сфера  $\Omega$  пересекает отрезок  $SM$  в точках  $P$  и  $Q$ . Известно, что  $SP = MQ$ , площадь треугольника  $ABC$  равна 100,  $SA = BC = 16$ .

а) Найдите произведение длин медиан  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$ .

б) Найдите двугранный угол при ребре  $BC$  пирамиды, если дополнительно известно, что  $\Omega$  касается грани  $BCS$  в точке  $N$ ,  $SN = 4$ , а радиус сферы  $\Omega$  равен 5.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$n \in \mathbb{N}$   
 $a, b, c \in \mathbb{N}$   $ab: 2^8 3^{14} 5^{12}$ ,  $bc: 2^{12} 3^{20} 5^{17}$ ,  $ac: 2^{14} 3^{21} 5^{39}$

$\min abc$  - ? Найдем наиб. степень 2, на которую делится  $abc$ : Пусть  $x, y, z$  - 2-показатели  $a, b, c$  соответ. Тогда  $\begin{cases} x+y \geq 8 \\ y+z \geq 12 \\ z+x \geq 14 \end{cases}$  ~~пог-~~

ходят, потому что реш. ~~не~~ когда не-во превращается в р-во.  $x+y+z=17$ . Найдем наиб. 3-показатель  $abc$ :

Пусть  $x, y, z$  - 3-показатели  $a, b, c$  соответ. Тогда  $\begin{cases} x+y \geq 14 \\ y+z \geq 20 \\ z+x \geq 21 \end{cases}$

Когда все не-ва превращаются в р-ва эта сист. не имеет реш. Попробуем, что если мы увеличим одну из правых частей на 1 и новая сист. будет иметь реш., их сумма будет наиб. (потому что  $(x+y) + (y+z) + (z+x) = 2(x+y+z)$ ).

$\begin{cases} x+y=14 \\ y+z=21 \\ z+x=21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=7 \\ y=7 \\ z=14 \end{cases}$   $x+y+z=28$ . Найдем наиб. 5-показатель  $abc$ :

Пусть  $x, y, z$  - 5-показатели  $a, b, c$  соответ. верно. Тогда  $\begin{cases} x+y \geq 12 \\ y+z \geq 17 \\ z+x \geq 39 \end{cases}$  Т.к.  $y \geq 0$ ,  $(x+y) + (y+z) \geq z+x \geq 39$ . Значит  $x+y+z \geq \frac{78}{2} = 39$ .

~~при~~  $x=12, y=0, z=27$  - удовлетворяют системе. Значит  $\min x+y+z=39$ . Значит  $abc$  наиб. значит  $abc$  равно  $2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39}$ .

Ответ:  $2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39}$ .

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

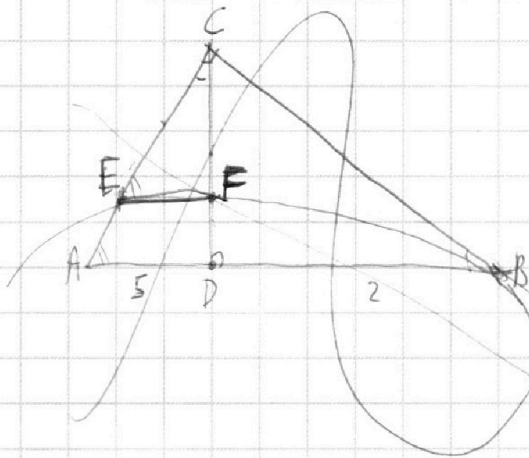
Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

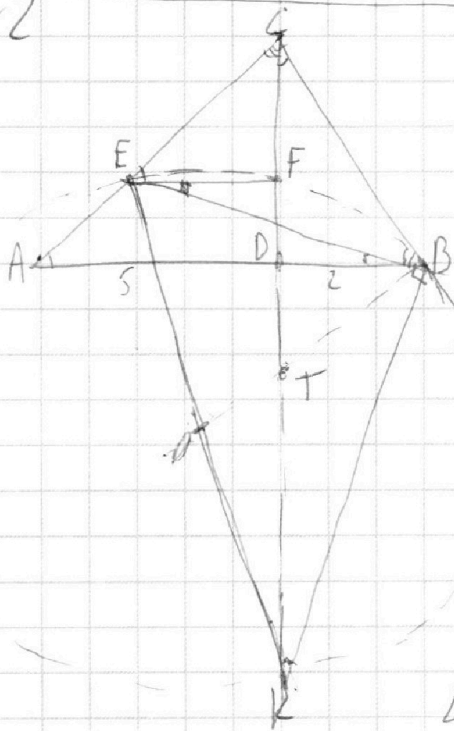
ЛМФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$AB \parallel EF$   $\frac{AD}{DB} = \frac{5}{2}$   $\frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = ?$   
 ~~$\triangle ABC \sim \triangle EFC$~~   
 Пусть  $DB = 2x \Rightarrow AD = 5x$   
 $CD = \sqrt{DB \cdot AD} = \sqrt{10}x$

~2



$AB \parallel EF$   $\frac{AD}{DB} = \frac{5}{2}$   $\frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = ?$   
 Пусть  $BD = 2$ . Тогда  $AD = 5$ .  
 $CD = \sqrt{2 \cdot 5} = \sqrt{10}$   $CB = \sqrt{10+4} = \sqrt{14}$   
 Пусть продолжим прямую CD за T. D пересекает окр. повторно  
 в т. К. Тогда по т. о степени точки CF:  $CF \cdot CK = CB^2 = 14$   
 Если O - центр окр. то  $OB \parallel AC$ , т.к. эти 2 прямые  $\perp CB$ ,  
 Пусть O - центр окружности.

$\angle FEB = \angle EBA$  (как накрест. лежащие при ||).  $\angle FEB = \angle FKB$  (как опр. на одну хорду)  $\Rightarrow \angle EBA = \angle FKB \Rightarrow \angle EBK = 90^\circ \Rightarrow EK$  - диаметр.  
 $CK = CF + EK = CF + \sqrt{EK^2 - EF^2}$   
 ~~$14 = CF^2 + CF \sqrt{EK^2 - EF^2}$~~   $CK = CD + DK$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\sqrt{3}$   
 ~~$10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$~~   
 ~~$10 \arcsin(\cos x) = 10 \left( \frac{\pi}{2} - \arccos x \right)$~~   
 $10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x \Leftrightarrow -10 \arccos(\cos x) + 5\pi = \pi - 2x \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow 10 \left( \frac{\pi}{2} - \arccos(\cos x) \right) = \pi - 2x \Leftrightarrow \begin{cases} 10 \left( \frac{\pi}{2} - y \right) = \pi - 2x \\ 0 \leq y \leq \pi, y = \pm x + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$   
 $\Leftrightarrow \begin{cases} 5\pi - 10y = \pi - 2x \\ 0 \leq y \leq \pi \\ y = \pm x + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\pi = 5y - x \\ 0 \leq y \leq \pi \\ y = \pm x + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$   
1)  $y = x + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} : 2\pi = 5x + 10\pi k - x \Leftrightarrow x = \frac{\pi - 5\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$   
 $y = \frac{\pi - 5\pi k}{2} + 2\pi k = \frac{\pi + \pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$ , т.к.  $0 \leq y \leq \pi$   $k=0$ ,  
 $x = \frac{\pi}{2}$  или  $k=1$   $y=0$   $x = -2\pi$  или  $k=-1$   $x = 3\pi$   
2)  $y = -x + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} : 2\pi = -5x + 10\pi k - x \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} + \frac{5\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z}$   
 $y = \frac{\pi}{3} - \frac{5\pi k}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow y = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi k}{3}$ , т.к.  $0 \leq y \leq \pi$ ,  
либо  $k=0$   $x = -\frac{\pi}{3}$ , либо  $k=1$   $x = \frac{4\pi}{3}$ , либо  $k=2$   
 $x = 3\pi$ , либо  $k=-1$   $x = -2\pi$ .

Ответ:  $\left\{ \frac{\pi}{2}, -2\pi, 3\pi, -\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3} \right\}$ .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

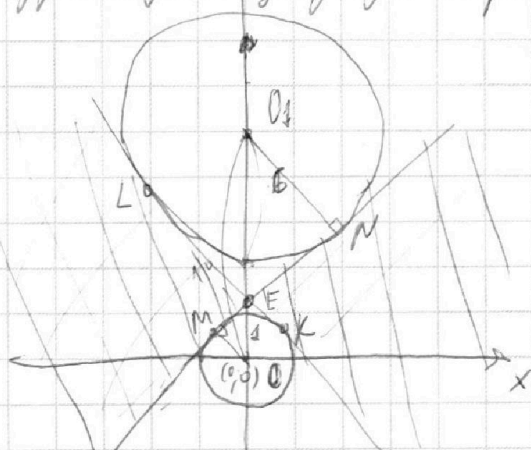
№4

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ x^2 + y^2 - 20y + 64 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ (x^2 + y^2 - 10)^2 = 6^2 \end{cases}$$

— уравнения окружностей.  $ax - 3y + 4b = 0$  — ур-ие прямой.

Значит нам надо найти значения  $a$  и  $b$   $ax - 3y + 4b = 0 \Leftrightarrow y = \frac{a}{3}x + \frac{4}{3}b$

Значит нам надо найти значения ~~и~~ ~~у~~ ~~условных~~ коэф., при которых упр. прямая с этим коэф., пересекающая каждую из этих двух окр. в 2 точки. Заметим, что нам



подходят только коэф. прямых

Пусть  $O, O_1$  — центры окруж.

$KL$  и  $MN$  — точки касания общих кас. с окружностями,  $E$  — точка перес. общих касат. Заметим,

что нам подходит только те условные коэф., которые являются условными коэф. прямых проходящих через  $E$  и лежащих в области, заштрихованной линией на рисунке. Их условные коэф. будут лежать между усл. коэф.  $LK$  и  $MN$ . Условный коэф.  $LK = \text{tg} \angle KEO = EK = \sqrt{EO^2 - 1}$

$EO = \frac{1}{7} \cdot 10 = \frac{10}{7}$  (из подобия  $\triangle O_1NE$  и  $\triangle OME$ )  $\Rightarrow LK = \sqrt{\frac{100 - 49}{49}} = \frac{\sqrt{51}}{7}$

Условный коэф.  $MN = -\frac{\sqrt{51}}{7}$ . Значит  $-\frac{\sqrt{51}}{7} < \frac{a}{3} < \frac{\sqrt{51}}{7}$

Ответ:  $-\frac{3}{7}\sqrt{51} < a < \frac{3}{7}\sqrt{51}$ .

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№5

$$\log_5^4(2x) - 3 \log_5 2x = 5 = \log_5 3125 - 3$$

$$\log_5^4 y + 4 \log_5 y = \log_5 3012 - 3$$

сделаем замену

$$\log_5 2x = z \quad z^4 - \frac{3}{z} = \log_5 (2x)^3 \cdot 5^4 - 3 = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{z} - 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z^4 - \frac{13}{3z} + 3 = 0 \Leftrightarrow z^5 - \frac{13}{3} + 3z = 0 \Leftrightarrow z^5 + 3z - \frac{13}{3} = 0$$

сделаем замену  $\log_5 y = v$ . Тогда  $v^4 + \frac{4}{v} = -\frac{1}{3} - 3$

$$\Leftrightarrow v^4 + \frac{13}{3v} + 3 = 0 \Leftrightarrow v^5 + 3v + \frac{13}{3} = 0$$

$$\log_5 2x = z \Leftrightarrow 5^z = 2x \Leftrightarrow x = \frac{5^z}{2} \quad \log_5 y = v \Leftrightarrow y = 5^v$$

$$xy = \frac{5^{z+v}}{2} \quad \text{Так чему же может быть равна сумма}$$

$$z \text{ и } v, \text{ если } \begin{cases} v^5 + 3v + \frac{13}{3} = 0 \\ z^5 + 3z - \frac{13}{3} = 0 \end{cases} \quad \text{Обе функции монотонно}$$

возрастают, но вторую имеет ровно 1 корень. Т.к. каждая

$$\text{имеет } \Leftrightarrow \text{сист. } \begin{cases} v^5 + \frac{13}{3v} + 3 = 0 \\ z^5 - \frac{13}{3z} + 3 = 0 \end{cases}$$

имеет  $(v; z)$ -реш. сист., то и это решение сист.

имеет вид  $(v; -v)$ .

$$\text{Значит } xy = \frac{5^{z+v}}{2} = \frac{5^{v+(-v)}}{2} = \frac{1}{2}$$

Ответ:  $\frac{1}{2}$ .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\log_5^4(2x) - 3 \log_2 v 5 = \log_2 x^3 625 - 3$$

$$\log_5^4 y + 4 \log_2 y 5 = \log_2 y^3 0,2 - 3$$

$$\log_2 5 = z \quad \frac{1}{2^4} - 3z = -3$$

$$\log_2(x)^3 625 = \log_2 x^3 \quad \frac{1}{v^4} + 4v = -\frac{1}{3}v - 3$$

$$\frac{1}{2^4} - \frac{13}{3}z + 3 = 0$$

$$\frac{1}{v^4} + \frac{13}{3}v + 3 = 0$$

$$xy = \frac{t}{2} \quad y = \frac{\log_5 \frac{1}{z}}{\log_5 \frac{1}{v}} = \frac{\log_5 z}{\log_5 v}$$

логарифмы по 4 и 5. Если z - решение куба, то - z - решение

$$x, y > 0$$

$$t^z = 5$$

$$t = 5^{\frac{1}{z}}$$

$$\frac{13}{3}v^5 + 3v^4 + 1 = 0$$

$$\frac{13}{3}(v^5 - z^5) + 3(v^4 - z^4) = 0 \quad v = z$$

$$v^5 - z^5 = (v - z)(v^4 + v^3z + v^2z^2 + vz^3 + z^4)$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} x+y=8 \\ x+y=12 \\ x+z=14 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x &= 5 \\ \Leftrightarrow y &= 3 \\ z &= 9 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} xy \geq 14 \\ y+z \geq 20 \\ z+x \geq 21 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x &= 7 \\ y &= 7 \\ z &= 14 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x+y=12 \\ y+z=17 \\ z+x=39 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x &= 17 \\ \Leftrightarrow y &= -5 \\ z &= 22 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x+y=14 \\ x= \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy \geq 14 \\ y+z \geq 21 \\ z+x \geq 21 \end{cases}$$

№3

$$10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$$

$$10 \arccos(\cos x) = \pi - 2x$$

$$10 - x = \pi - 2x$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№4

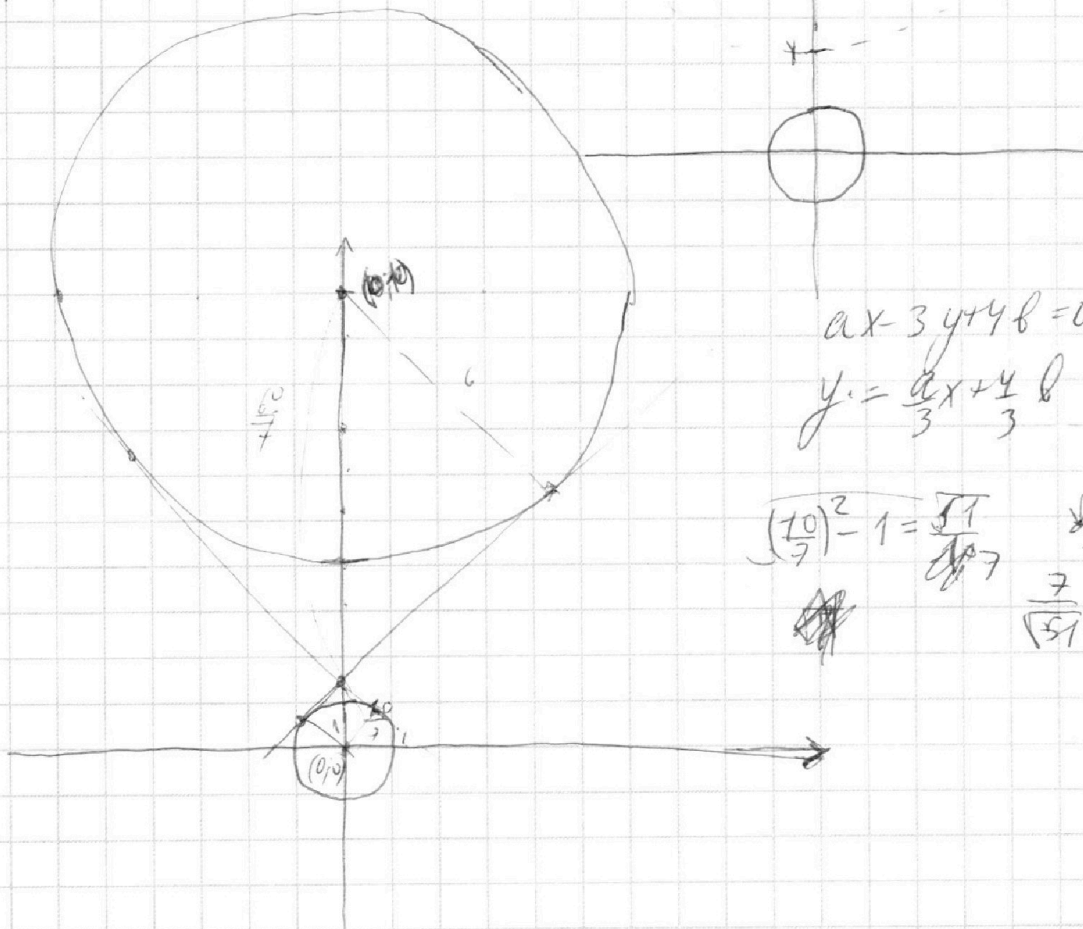
$$ax - 3y + 4b = 0$$

$$(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0$$

— уравнения окр.

$$x^2 + y^2 - 1 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 20y + 64 = x^2 + (y - 10)^2 - 36 = 0$$



$$ax - 3y + 4b = 0 \text{ — прямая}$$
$$y = \frac{a}{3}x + \frac{4}{3}b$$

$$\left(\frac{10}{3}\right)^2 - 1 = \frac{11}{9}$$
$$\frac{7}{\sqrt{11}}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~~$\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{2x} 3625 - 3$~~

~~$\log_5^4 y + 4 \log_y 5 = \log_y 30,2 - 3$~~

~~$xy - ?$~~

~~Зона стр.:  $x, y > 0$ .~~

~~Сделаем замену  $\log_5 2x = z$ .  $3 + z^4 - \frac{3}{z} = \frac{1}{z} = \frac{3}{4z}$   $\ominus$~~

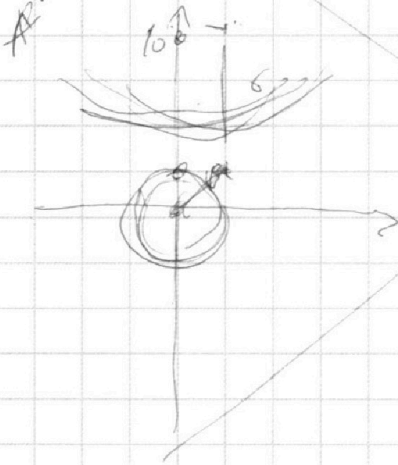
~~$\ominus z^5 + 3z - \frac{15}{4} = 0$~~

~~Теперь замену  $\log_5 y = v$ .  $v^4 + \frac{4}{v} = \frac{1}{v}$~~

~~$xy$~~

~~$ax - 3y + 4b = 0$~~

~~$(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0$   $(x^2 + y^2 - 10)^2 = 36$~~



~~$ax - 3y + 4b = 0$~~

~~$y = \frac{ax}{3} + \frac{4}{3}b$~~



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

