



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^8 3^{14} 5^{12}$, bc делится на $2^{12} 3^{20} 5^{17}$, ac делится на $2^{14} 3^{21} 5^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой BC в точке B , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке F , а катет AC – в точке E . Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 5 : 2$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3, \quad \text{и} \quad \log_5^4 y + 4 \log_y 5 = \log_{y^3} 0,2 - 3.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-16;80)$, $Q(2;80)$ и $R(18;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 100, $SA = BC = 16$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 1.

$$a, b, c \in \mathbb{N}^+$$

$$a, b, c: 2^8 3^{14} 5^{12} \quad (1) \quad \text{Знаю}$$

$$b, c: 2^{12} 3^{20} 5^{17} \quad (2)$$

$$a, c: 2^{14} 3^{24} 5^{23} \quad (3)$$

Замечая, что если a, b, c имеют ещё на 4-ю - то прежде чем, в форму 2, 3, 5, то их можно разложить на эти числа и увидеть не перекрестно вычитаются.

Значит, a, b, c где мин. произв-я

a, b, c имеют только на 2, 3, 5

$$a = 2^{a_1} \cdot 3^{a_2} \cdot 5^{a_3}$$

$$b = 2^{b_1} \cdot 3^{b_2} \cdot 5^{b_3}$$

$$c = 2^{c_1} \cdot 3^{c_2} \cdot 5^{c_3}$$

тогда a из (1): $a_1 + b_1 \geq 8$ (1) (2): $b_1 + c_1 \geq 12$

$$a_2 + b_2 \geq 14 \quad b_2 + c_2 \geq 20$$

$$a_3 + b_3 \geq 24 \quad b_3 + c_3 \geq 17$$

(3): $a_1 + c_1 \geq 14$

$$a_2 + c_2 \geq 24$$

$$a_3 + c_3 \geq 23$$

Рассмотрим случаи 2:

Замечая, что при $a_1 = 5, b_1 = 3, c_1 = 9$ все рав-ва выполняются, т.е. достигаются наименьшие случаи 2 $\Rightarrow a_1 = 5, b_1 = 3, c_1 = 9$

случаи 3:

Замечая, что если все три рав-ва выполняются, то

$$2a_2 + 2b_2 + 2c_2 \leq 55, \text{ что невозможно, так как числа натуральные}$$

тогда увеличим $a_2 + c_2$ на 1, т.е. $a_2 + c_2 \geq 25$ тогда $a_2 + c_2 + b_2 \leq 14 + 20 = 34$

$$\Rightarrow b_2 = 9$$

$$\Rightarrow a_2 = 7 \Rightarrow c_2 = 13$$

т.е. равенства (минимального значения) не достигаются, а это означает минимальное значение на 4-ю - то не найдено



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Рассмотрим случаи 5:

Заметим, что если ^{возможные} ~~возможные~~ равенства в первом случае, т.е. ~~первые равенства~~

$$a_3 + c_3 = 39, \text{ то при } a = 12, c = 27, b = 0$$

первое и второе равенства верны, а если ^{или} ~~второе равенство~~ ^{или} ~~первое равенство~~ неверно, то не выполняются ~~первые~~ ^{и второе} равенства $\Rightarrow$ это лучший вариант.

Получаем, что:

$$a = 2^{a_1} \cdot 3^{a_2} \cdot 5^{a_3} = 2^5 \cdot 3^9 \cdot 5^{12}$$

$$b = 2^{b_1} \cdot 3^{b_2} \cdot 5^{b_3} = 2^3 \cdot 3^7 \cdot 5^0 = 2^3 \cdot 3^7$$

$$c = 2^{c_1} \cdot 3^{c_2} \cdot 5^{c_3} = 2^9 \cdot 3^{13} \cdot 5^{27} \quad \text{и это наилучший вариант}$$

$$\text{тогда } abc = 2^{(5+3+9)} \cdot 3^{(9+7+13)} \cdot 5^{(12+0+27)} = 2^{17} \cdot 3^{29} \cdot 5^{39}$$

$$\text{Итого: } 2^{17} \cdot 3^{29} \cdot 5^{39}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

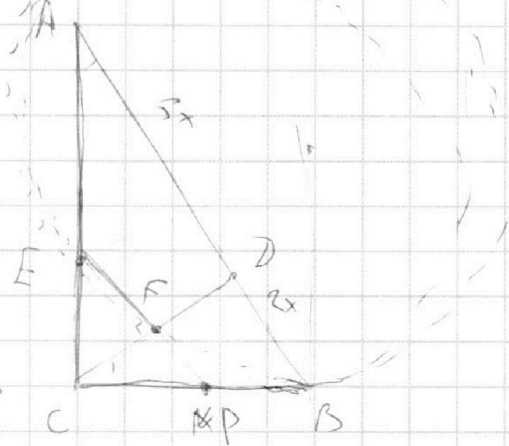
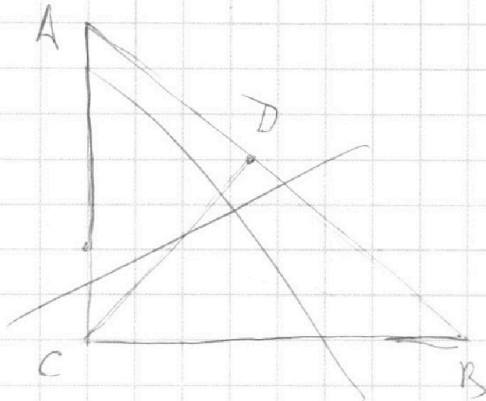
1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 2.



Дано:

$\triangle ABC$,
 $\angle ACB = 90^\circ$,
 $CD \perp AB, D \in AB$,
 $\text{через } \omega \cap BC = B$,
 $\omega \cap CD = F$,
 $\omega \cap AC = E$,
 $AB \parallel EF$,
 $\frac{AD}{DB} = \frac{5}{2}$,
 $\text{Найти: } \frac{S(\triangle ABC)}{S(\triangle CFE)}$

Решение: 1) Пусть $AD = 5x$, тогда $DB = 2x$

2) $\triangle CB$ — касательная к ω ,

$\angle EFA = \angle CBA$

$\text{т.к. } EF \parallel AB$, то $CD \perp EF \Rightarrow \angle CFE = 90^\circ$,
 $\angle CFE = \angle CAD$ или $\angle CFE = \angle CBA$ т.к. $EF \parallel AB$, следовательно AE

3) По св-ву $\frac{AD}{DB} = \frac{AF}{FB}$ (по теореме о секущей в прямоугольнике)

$$CD = \sqrt{AD \cdot DB} = x\sqrt{10}$$

тогда $CB = \sqrt{10x^2 + 4x^2} = x\sqrt{14}$ (в $\triangle DBC$ по теореме Пифагора)

$AC = \sqrt{10x^2 + 25x^2} = x\sqrt{35}$ (в $\triangle ADC$ по теореме Пифагора)

4) $EF \parallel BC \Rightarrow P$

5) $\triangle PCF \sim \triangle BCF$ (по двум углам, т.к. $AB \parallel EF$)

$$\Rightarrow \frac{PF}{BC} = \frac{CP}{BC} \Rightarrow \frac{PF}{BC} = k$$

тогда $PF = k \cdot 2x$, $FB =$

$\triangle PCF \sim \triangle BCF \Rightarrow \triangle PCF \sim \triangle BCF$ (по двум углам, — " —)

$$\Rightarrow \frac{PF}{BC} = \frac{CP}{BC} = k$$

$$\Rightarrow PF = k \cdot 2x$$

$$6) PB = BC - CD = BC - BC \cdot k = BC \cdot (1 - k)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

2) Замечим, что PB — кас. к ω ,
 P — F — E — диаметр ω } из точки P

$$\Rightarrow PB^2 = PF \cdot PE$$

$$BC \cdot (1-k)^2 = k^2 \cdot 2x \cdot 7x$$

$$14x^2 \cdot (1-k)^2 = 14x^2 \cdot k^2$$

$$14x^2 \cdot (k^2 - (1-k)^2) = 0$$

Т.к. $x \neq 0$ (иначе $AB=0$), то

$$k^2 = (1-k)^2$$

$$k^2 = k^2 - 2k + 1$$

$$1 - 2k = 0$$

$$k = \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow CP = \frac{BC}{2} \Rightarrow k = \frac{1}{2}$ $PE \parallel AB$, P — с.р. BC , то PE — с.р. ΔABC
(по признаку)

$\Rightarrow$ ~~E — с.р. AC~~ , $EP = \frac{7x}{2}$, $FP = \frac{2x}{2} = x \Rightarrow EF = \frac{7x - 2x}{2} = \frac{5x}{2}$

$$8) \text{ Замечим, что } S(\Delta CEF) = \frac{EF}{EP} \cdot S(\Delta PEC) = \frac{EF}{EP} \cdot S(\Delta ABC) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{5}{2 \cdot 4} \cdot S(\Delta ABC) = \frac{5}{28} S(\Delta ABC)$$

$$\Rightarrow \frac{S(\Delta ABC)}{S(\Delta CEF)} = \frac{28}{5}$$

$$\text{Ответ: } \frac{28}{5}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача № 3.

$$10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$$

т.к. $\arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}$, то $\arcsin(x) = \frac{\pi}{2} - \arccos(x)$

$$10 \cdot \frac{\pi}{2} - 10 \arccos(\cos x) = \pi - 2x$$

$$4\pi = 10 \arccos(\cos x) - 2x$$

$$x + 2\pi = 5 \arccos(\cos x)$$

$$y = \arccos(\cos x)$$

1. $x \in [0, \pi]$:

$$\Rightarrow \arccos(\cos x) = x$$

$$x + 2\pi = 5x$$

$$2\pi = 4x$$

$$x = \frac{\pi}{2}$$

2. $x \in [\pi, 2\pi]$

$$\arccos(\cos x) = 2\pi - x$$

$$x + 2\pi = 10\pi - 5x$$

$$6x = 8\pi$$

$$x = \frac{8\pi}{6} = \frac{4\pi}{3}$$

3. $x \in [2\pi, 3\pi]$

$$x + 2\pi = 5x - 10\pi$$

$$12\pi = 4x$$

$$x = 3\pi, \text{ не принадлежит промежутку.}$$

4. $x \in [3\pi, 4\pi]$: $\arccos(\cos x) = 4\pi - x$

$$x + 2\pi = 20\pi - 5x$$

$$6x = 18\pi \quad x = 3\pi$$

5. $x \in [-\pi, 0]$: $\arccos(\cos x) = -x$

$$2\pi + x = -x + 5$$

$$2x = -2\pi$$

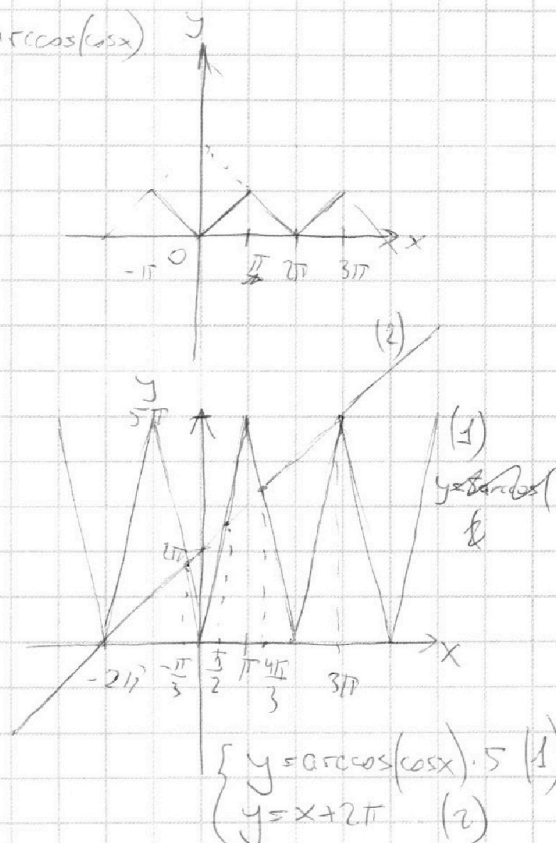
$$x = -\frac{\pi}{1}$$

6. $x \in [-2\pi, -\pi]$: $\arccos(\cos x) = x + 2\pi$

$$x + 2\pi = 5 \cdot (x + 2\pi)$$

$$4 \cdot (x + 2\pi) = 0$$

$$x = -2\pi$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что т.ч. область значений
 $\arccos(t) - [0; \pi]$, то

область значений $\arccos(\cos x) - [0; 5\pi]$

при $x > 3\pi$ $x + 2\pi > 5\pi$

при $x < -2\pi$ $x + 2\pi < 0$

$\Rightarrow$ на $(-\infty; -2\pi) \cup (3\pi; +\infty)$ нет корней

$\Rightarrow$ мы можем рассмотреть

$[2\pi; 3\pi]$ и найти все корни на интервале $-\pi$ - все корни
данного уравнения

$\Rightarrow$ Ответ: $-2\pi; -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}; \frac{4\pi}{3}; 3\pi$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 4.

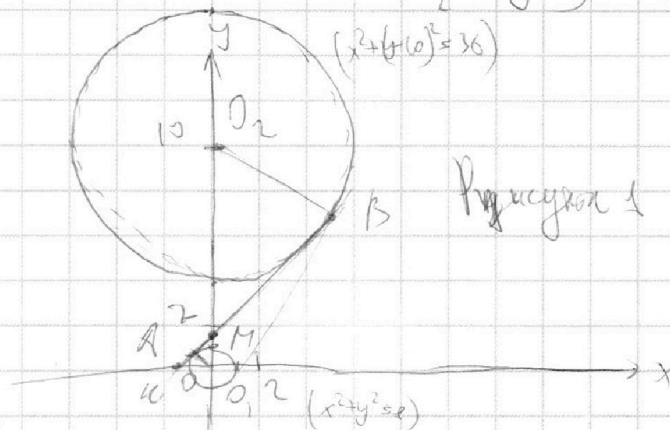
$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases}$$

Также $a, b \neq 0$ найдется λ при котором
имеет 4 решения

Заключим, что $(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + (y - 10)^2 = 36 \end{cases}$

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + (y - 10)^2 = 36 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{ax}{3} + \frac{4b}{3} \\ x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + (y - 10)^2 = 36 \end{cases}$$



Заключим, что
сформулировано в системе - 2
окр-сти, а первое ур-е - прямая
случай $\frac{a}{3}$ и точки пересечения
с осью абсцисс

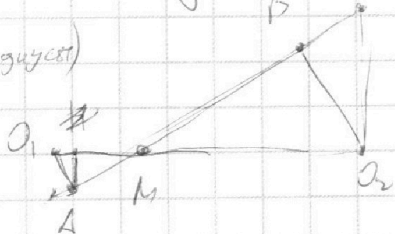
(Рассмотрим при $a \neq 0$)

Найдем ур-е осей координат касательных к двум окр-стям:

O_1, O_2 - центры, A, B - точки касания, $M = O_1 O_2 \cap AB$

Рисунок 2

$O_1 A = 1$ (радиус)
 $O_2 B = 6$
 $O_1 O_2 = 10$



$\triangle O_1 A M \sim \triangle O_2 B M$ (по 2 углам, один - общий)
по 2 углам, один - общий

$$\Rightarrow \frac{O_1 M}{O_1 A} = \frac{O_2 B}{O_2 M} = \frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow O_1 M = \frac{1}{6+1} \cdot 10 = \frac{10}{7}$$

Тогда $AM = O_1 M \cdot \frac{O_2 B}{O_1 A} = \frac{10}{7} \cdot \frac{6}{1} = \frac{60}{7}$

Тогда $AM \neq O_1 M \Rightarrow \angle A O_1 M \neq \angle A M O_1$

$\angle A M O_1 \neq \angle M O_1 A \Rightarrow \angle M O_1 A = \angle A O_1 M$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



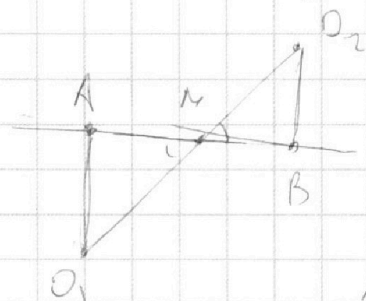
В тогда т.к. $\tan \angle AOM = \frac{15}{7}$ при $\angle AOM = \arctan \frac{15}{7}$ в ур-н прямой равен $\tan$ угла наклона OA - этот прямой, то

$$\frac{a}{3} = \tan \angle AOM = \frac{15}{7}, \text{ а } \frac{4b}{3} = \frac{10}{7} - \text{ордината точки } M$$

$$\Rightarrow a = \frac{45}{7}, \quad b = \frac{30}{7}$$

Заметим, что рассмотрим

Рисунок
3.



В данном случае это не так, а просто перпендикуляр

$$AO_1 = OM \cdot \cos \angle AOM$$

$$O_2B = O_2M \cdot \cos \angle MO_2B = O_2M \cdot \cos \angle AOM$$

т.к. углы равны

$$\Rightarrow AO_1 + O_2B = \cos \angle AOM \cdot (OM + O_2M) = \cos \angle AOM \cdot OA = \cos \angle AOM$$

$$\text{Заметим, что при } \tan \angle AOM = \frac{15}{7} \quad \cos \angle AOM = \frac{7}{17}$$

$$\text{значит, при } \tan \angle AOM \leq \frac{15}{7} \quad \cos \angle AOM \geq \frac{7}{17} \quad (\text{так } \tan \in [0; \frac{15}{7}], \cos \in [\frac{7}{17}; 1])$$

$$\text{Получаем, что } AO_1 + O_2B \geq 7 = \text{длина радиуса окружности}$$

Значит, хотя бы из рассмотренных окружностей $y = \frac{ax}{3} + \frac{b \cdot 4}{3}$

будет касаться окружности, т.е. радиус

$\Rightarrow$ будет 1 или 2 точки пересечения, а нам нужно, чтобы с каждой окружностью было 2 точки пересечения (тогда будет 4

Также заметим, что при $\tan \angle AOM = \frac{15}{7}$ прямая, проходящая через $M(0; \frac{4}{3})$ и параллельная OA имеет $\tan \angle AOM$, касается окружности с рисунка 2, т.е.,

касается ее окружности $\Rightarrow$ имеет 2 точки пересечения $\Rightarrow$ система имеет 4 решения



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Получаем, что при $a > \frac{3\sqrt{54}}{7}$ ~~и~~
~~можно~~ ~~стан~~ ~~здесь~~ ~~при~~ $b = \frac{30}{28}$ и будет 4 точки пересечения,
и при $a \leq \frac{3\sqrt{54}}{7}$ не получится, то есть 5 или 4 точки
пересечения

~~и~~ ~~ответ~~: график ~~или~~
Заметим, что ~~уравнение~~ симметрично относительно оси ~~и~~ ординат
~~симметрично~~
~~свойственности~~

Значит, при $a < 0$ будет всё то же самое, но с минусом,
т.е., если получилось a , то $-a$ тоже получится

Значит, при $a < 0$ получится $a \leq -\frac{3\sqrt{54}}{7}$

Ответ: $(-\infty; -\frac{3\sqrt{54}}{7}) \cup (\frac{3\sqrt{54}}{7}; +\infty)$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 5.

$$\log_5^4(2x) - 3\log_{2x} 5 = \log_{8x} 3.625 - 3$$

Пусть $\log_5(2x) = t$, тогда

$$\text{т.е. } \log_{2x} 5 = \frac{1}{\log_5 2x} = \frac{1}{t}$$

$$\log t^4 - \frac{3}{t} = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{t} - 3 \quad , \text{ т.е. } \log_{8x} 3.625 = \log_{(2x)^3} 5^4 = \frac{4}{3} \log_{2x} 5$$

$$\frac{3t^5 - 9 - 4 + 9t}{3t} = 0$$

$$\frac{3t^5 + 9t - 13}{3t} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3t^5 + 9t - 13 = 0 & (1) \\ t \neq 0 \end{cases}$$

$$\log_5^5 y + 4\log_y 5 = \log_{y^3} 0.2 - 3$$

Пусть $\log_5 y = p$, тогда

$$p^5 + \frac{4}{p} = -\frac{1}{3p} - 3$$

$$\frac{3p^5 + 12 + 1 + 9p}{3p} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3p^5 + 9p + 13 = 0 & (2) \\ p \neq 0 \end{cases}$$

Заметим, что

$$\text{для } f(t) = 3t^5 + 9t - 13$$

$$g(p) = 3p^5 + 9p + 13$$

$$f'(t) = 15t^4 + 9$$

Значит, тогда

$$g'(p) = 15p^4 + 9$$

Заметим, что $f'(t) > 0$ при всех t , $g'(p) > 0$ при всех p , то
Ф. и. возр., значит, у них не более одного корня на $\mathbb{R}$
(т.е. область значений логарифма $-\mathbb{R}$)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Также заметим, что если есть $t = t_0$, y является решением системы (1), то $p = -t_0$ является решением системы (2): $\{$

$$\begin{aligned} 3t_0^5 + 9t_0 - 13 &= 0 - \text{первое уравнение системы (1) (используем при } t_0 \text{ верно)} \\ -3t_0^5 - 9t_0 + 13 &= 0 \quad \text{логарифмируем в 5-е уравнение системы (2) в } -t_0: \\ 3(-t_0) + 9(-t_0) + 13 &= 0 \\ -3t_0^5 - 9t_0 + 13 &= 0 \\ 3t_0^5 + 9t_0 - 13 &= 0 \end{aligned}$$

↑ Верно из предположения.

Заметим, что $f(1) = 3 + 9 - 13 = -1 < 0$
 $f(2) = 3 \cdot 32 + 9 \cdot 2 - 13 = 96 + 5 = 101 > 0$
 $\Rightarrow$ в силу непрерывности f и g (т.к. это многочлены) существует t_0 при $1 < t_0 < 2$: $f(t_0) = 0$

Значит, $\begin{cases} \log_5 2x = t_0 \\ \log_5 y = -t_0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \log_5 2x + \log_5 y = 0$$

$$\begin{cases} \log_5 2xy = 0 \\ x > 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2xy = 1$$

$$xy = \frac{1}{2}$$

Итого: $\frac{1}{2}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

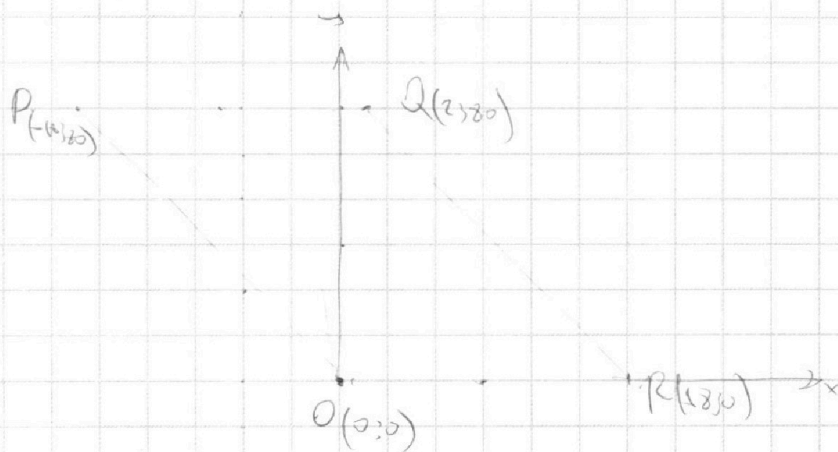
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

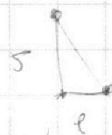
Задача 6.



Заметим, что PO :

$$y = -5x$$

т.е. $y + 5x = 0$



Рассмотрим прямые вида

$$y + 5x = 5 \cdot n, 0 \leq n \leq 18$$

при $n=0$ — OP , $n=18$ — RQ , при $0 < n < 18$ — прямая, параллельная, проходящая через целочисленные точки на OP

тогда заметим, что y ~~меньше~~ ^{больше} для всех точек на прямых на прямой l_1 : $y + 5x \leq 5n$

$$l_2: y + 5x = 5n + 45$$

или ~~больше~~ ^{меньше} где

Аббаты $A_1 \in l_1$, $B \in l_2$ равно из условия $(5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45)$

во множестве

Значит, если учесть все наборы точек на прямых

$$l_1: y + 5x \leq 5n$$

$$y + 5x = 5(n+9)$$

Каково? 150; 1; 233; 4; 556; 7; 8; 9

таких наборов 10



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Далее рассмотрим, сколько вариантов выбрать точку с $y/\text{км}$ координатой на каждой прямой

$$y + 5x = 5n$$

Значит, $0 \leq y \leq 80$, а также, 200

$$x \leq n - \frac{y}{5} \quad \text{Значит,}$$

$$\begin{cases} 0 \leq y \leq 80 \\ y \equiv 5 \end{cases}$$

$$y = 0; 5; 10; 15; 20; 25; 30; 35; 40; 45; 50; 55; 60; 65; 70; 75; 80$$

17 вариантов выбрать точку с $y/\text{км}$ координатой на прямой
значит выберем 2 точки (на каждой из 2 прямых по одной)

$$17 \cdot 17 = 289 \text{ вариантов}$$

Значит, у нас ¹⁰ ~~10~~ наборов по 289 вариантов на каждом, ~~ни один~~
из вариантов не повторяется ¹⁰

$$\Rightarrow \text{всего наборов } 10 \cdot 289 = 2890$$

$$\text{Ответ: } 2890.$$

289
~~289~~
2890

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7
☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Решение:

1) Т.ч. $SP \perp MQ$, P

середина SM — середина PQ

2) Д.ч. P — с.р. SM

ΔABC — т.р. $AB \perp AC$, $BC \perp AB$

AA_1, BB_1, CC_1 — медианы

$AA_1, BB_1, CC_1 \perp M$

$\Omega \cap AS \perp M, L$

$\Omega \cap (ABC) \perp K, K \in AM$

$\Omega \cap SM \perp P, Q, SP \perp MQ$

$S(ABC) = 100, BC = 16$

4) Контр: AA_1, BB_1, CC_1

5) $\Omega \cap (BCS) \perp N, SN \perp L$

$R(\Omega) = 5$

Контр: $\Delta ABC \perp A(BC)$

$p = 144$

$q = 16$

$\times 36$
 36

18

$5x + y, z - 5x - 5y = 45$

$88 \ 129 \ 284 \ 243 \ 900 \ 561 \ 1029 \ 1005 \ 156 \ 1225 \ 1329$

$4 \ 9 \ 16 \ 25 \ 36 \ 49 \ 64 \ 81 \ 100 \ 121$

$144 \ 169 \ 196 \ 225 \ 256 \ 289 \ 324 \ 361 \ 400 \ 441 \ 484 \ 529 \ 576 \ 625$