



$$(2AC^2 + 2BC^2 - AB^2)(2AB^2 + 2AC^2) = 4AC^2(2AC^2 - AB^2 + 2BC^2)(2AB^2 - AC^2 + 2BC^2)$$

$$AB^2 + AC^2$$

МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



$$(2AC^2 - AB^2)(2AB^2 - AC^2) + 2BC^2(2AC^2 - AB^2) + 2BC^2(2AB^2 - AC^2) + 2BC^4$$

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^6 3^{13} 5^{11}$, bc делится на $2^{14} 3^{21} 5^{13}$, ac делится на $2^{16} 3^{25} 5^{28}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

$$2BC^2(2AC^2 - AB^2 + 2AB^2 - AC^2)$$

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой AC в точке A , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке E , а катет BC – в точке F . Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1,4$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF .

$$BC^2 \cdot 3AB^2$$

$$(AC^2 + AB^2)$$

3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

$$5AB^2 \cdot AC^2 - 2AC^4 - 2AB^4$$

имеет ровно 4 решения.

$$AB^2 AC^2 - 2(AB^4 + AC^4 - 2AB^2 \cdot AC^2)$$

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5, \quad \text{и} \quad \log_{11}^4(0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,125y^3} (11^{-13}) - 5.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-15;90)$, $Q(2;90)$ и $R(17;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 180, $SA = BC = 20$.

а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .

б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 6$, а радиус сферы Ω равен 8.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$a \cdot b = 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{11} \cdot t \quad abc - \text{min}$$

$$\textcircled{1} \quad bc = 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{13} \text{ км}$$

$$\textcircled{3} \quad ac = 2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{28} \text{ м}$$

$$\frac{b}{a} = \frac{1}{2^2} \cdot \frac{1}{3^{14}} \cdot \frac{1}{5^{15}} \cdot \frac{\text{км}}{\text{м}}$$

$$m \cdot 2^2 \cdot 3^{14} \cdot 5^{15} \cdot b = ak$$

$$m \cdot 2^2 \cdot 3^{14} \cdot 5^{15} \cdot b^2 = 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{11} \cdot t, \quad m \cdot 3 \cdot 5^4 \cdot b^2 = 2^4 \cdot t \Rightarrow t : 5^4 \cdot 3 \textcircled{2}$$

AA

$$\Rightarrow ab = 2^6 \cdot 3^{14} \cdot 5^{15} \cdot t_1$$

$$\begin{aligned} a &= 2^4 \cdot 3^9 \\ b &= 2^2 \cdot 3^5 \\ c &= 2 \cdot 3^{15} \end{aligned}$$

$$\textcircled{2} \quad ab = 2^6 \cdot 3^{14} \cdot 5^{15} \cdot t_1$$

$$\textcircled{1} \cdot \textcircled{3} : \textcircled{2} \quad \frac{a^2 \cdot c \cdot b}{bc} = \frac{2^{12} \cdot 3^{30} \cdot 5^{43} \cdot t_1 m}{2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{18} \cdot k} = 2^8 \cdot 3^{18} \cdot 5^{30} \cdot \frac{t_1 m}{k}$$

$$k \cdot t_1 m = 2^8 \cdot 3^{18} \cdot 5^{30} \cdot t_1 \cdot m \quad \text{if } a : 5^{30}, \text{ then } a : 5^{15}$$

$$\textcircled{1} \cdot \textcircled{2} \cdot \textcircled{3} = abc = 2^{36} \cdot 3^{60} \cdot 5^{28 \cdot 2} \cdot t_1 \cdot k \cdot m, \quad \text{где } t_1 \cdot k \cdot m = 1$$

$$\Rightarrow abc - \text{min} = 2^{36} \cdot 3^{60} \cdot 5^{28 \cdot 2} \Rightarrow abc = 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$$

$$\text{формулы: } \begin{cases} a = 2^4 \cdot 3^9 \cdot 5^{15} \\ b = 2^2 \cdot 3^5 \cdot 5^0 \\ c = 2^{12} \cdot 3^{16} \cdot 5^{13} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} a \cdot b &= 2^6 \cdot 3^{14} \cdot 5^{15} \\ bc &= 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{13} \\ ac &= 2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{28} \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\boxed{22} \quad \arccos(\sin X) = \frac{9\pi - 2X}{10} \Rightarrow -1 \leq \frac{9\pi - 2X}{10} \leq 1$$

$$\sin X = \cos(0,9\pi - 0,2X)$$

$$\begin{aligned} -10 &\leq 9\pi - 2X \leq 10 \\ \frac{9\pi - 10}{2} &\leq X \leq \frac{9\pi + 10}{2} \end{aligned}$$

$$\sin X = \cos 0,9\pi \cdot \cos 0,2X + \sin 0,9\pi \cdot \sin 0,2X$$

$$\sin X = -\cos(0,1\pi + 0,2X) = -\cos 0,1\pi \cdot \cos 0,2X + \sin 0,1\pi \cdot \sin 0,2X$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\boxed{14} \begin{cases} 5x + 6ay - b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 16y + 77) = 0 \end{cases}$$

1. $x^2 + y^2 = 25$. Подходят пары $(x|y|; |x|; -y|; (-x, y) | -y; x)$.

если $x=0$. $y = \pm 5$.

$$\begin{cases} 6 \cdot 5a - b = 0 \\ -6 \cdot 5a - b = 0 \end{cases} \Rightarrow a = 0. b = 0.$$

аналог. если $y=0$. $x = \pm 5$.

еще имеем:

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0 \\ -5x - 6ay - b = 0 \end{cases} \Rightarrow b = 0. \quad 5x + 6ay = 0. \quad a = \frac{-6y}{5x}, \text{ но } \frac{y}{x}$$

случают иметь равные знаки $\Rightarrow a = \emptyset$

2. $x^2 + y^2 + 16y + 77 = 0$

$$x^2 + (y+8)^2 = 4. \quad |x| \leq 2. \quad x, y \neq 0.$$
$$|y+8| \leq 2 \Rightarrow -10 \leq y \leq -6.$$

если есть пара $(x|y)$ то есть $(-x, y)$

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0 \\ -5x + 6ay - b = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 0 - \text{не подходит} \Rightarrow a = \emptyset$$

ответ: $a = \emptyset$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

5) $\log_x \frac{1}{|x|} = \log_x |x| = -2 \log_x 11 = -\frac{2}{3} \log_x 11$. \circ $\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$

Пусть $\log_x 11 = m$. $\log_{11} x = \frac{1}{m}$. $x = \sqrt[m]{11}$

тогда: $\log_x 11 = m$. $m \neq 0$.

$$\left(\frac{1}{m}\right)^4 - 6m = -\frac{2}{3}m - 5 \quad | \cdot 3m^4$$

$$3 - 18m^5 = -2m^5 - 15m^4$$

$$16m^5 - 15m^4 - 3 = 0 \quad \circ$$

$\log_y 11 = n$.

$\begin{cases} y > 0 \\ y \neq 1 \end{cases}$

$$\left(\frac{1}{n}\right)^4 + n = -\frac{13}{3}n - 5 \quad | \cdot 3n^4$$

$$(y^5)^n = \sqrt[n]{11}$$

$$y = 2 \sqrt[n]{11}$$

$$3 + 3n^5 = -13n^5 - 15n^4$$

$$16n^5 + 15n^4 + 3 = 0, \quad \circ$$

$$xy = 2 \sqrt[n]{11} \cdot 11^{\frac{1}{m}} = 2 \cdot 11^{\frac{m+n}{mn}}$$

$$\circ + \circ \quad 16(m^5 + n^5) + 15(n^4 - m^4) = 0.$$

$$(n^2 - m^2)(n^2 + m^2)$$

$$(n-m)(n+m)(n^2+m^2)$$

$$(m+n) \left(16(m^4 + n^4) + 15(n-m)(n^2+m^2) \right) = 0$$

1) $m = -n \Rightarrow xy = 2 \cdot 11^0 = 2$

2) $16(m^4 - m^3n + m^2n^2 - mn^3 + n^4) = 15(m-n)(n^2+m^2) = 15(mn^2 + m^3 - n^3 - nm^2)$

$$16m^4 - 16m^3n + 16m^2n^2 - 16mn^3 + 16n^4 = 15mn^2 + 15m^3 - 15n^3 - 15nm^2$$

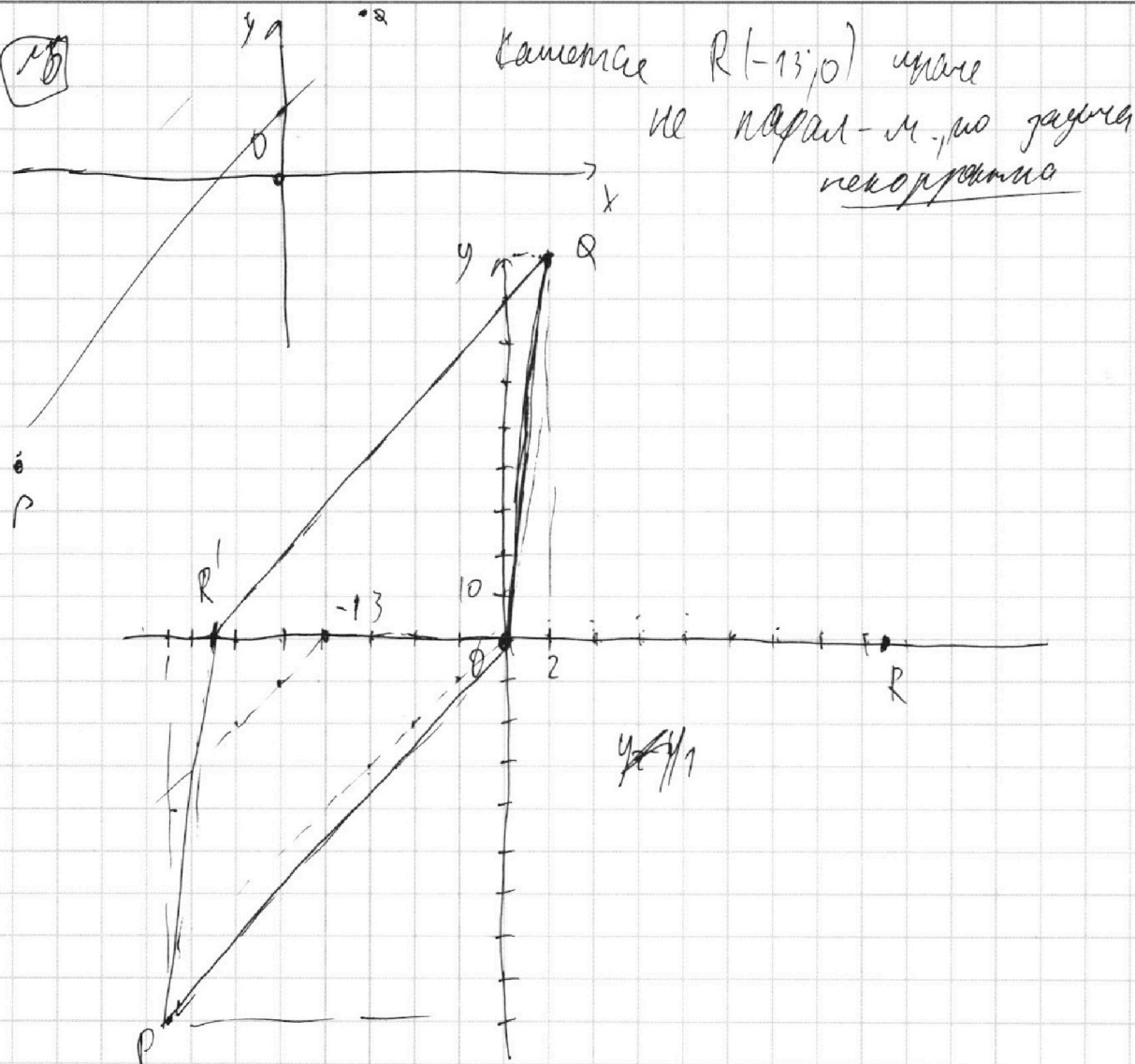
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

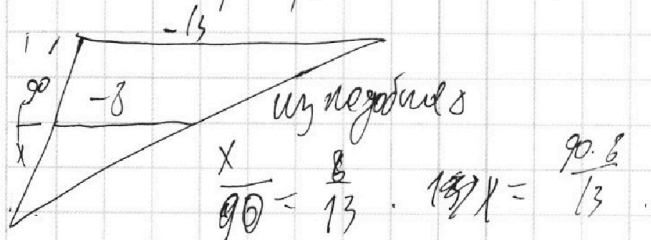


Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$6(y_2 - x_1) + y_2 - y_1 = 48$$

1. Если $y_2 - y_1 = 0$. $x_2 - x_1 = 8$. (VT $(8; 6)$, $90 (13; 0)$)



$$13 - 8 + 1 = 6$$

$$90 \cdot 8 = \frac{720}{13}$$

$$\frac{720}{13} = 55 \frac{5}{13}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

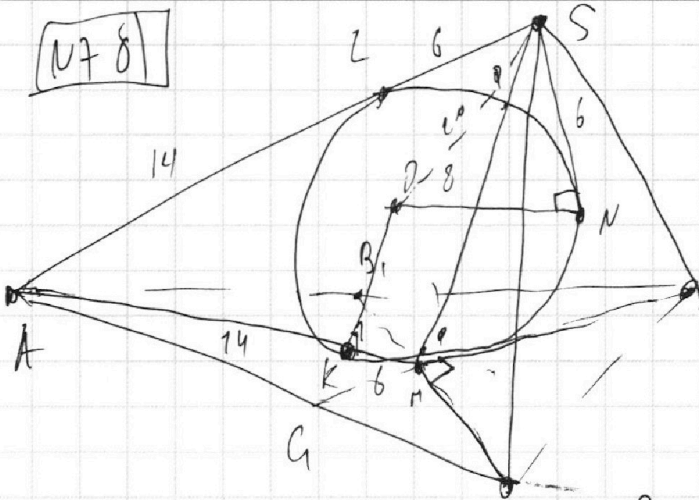
- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



178



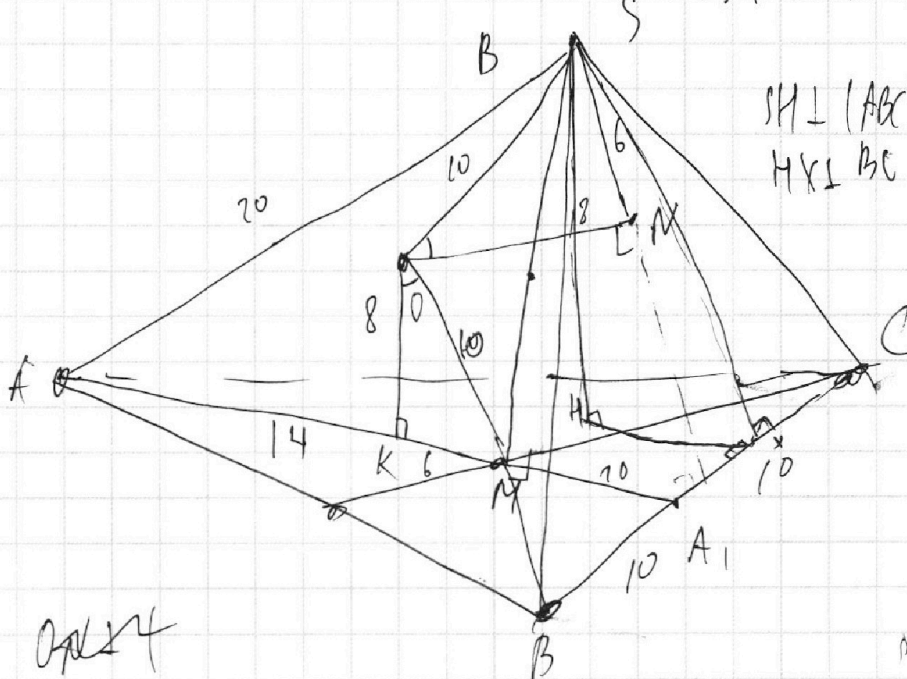
По т. Пифагора: $SO^2 = SN^2 + OS^2 \Rightarrow$

$SO = 10$

$SL = SN - \text{кас } SL \Rightarrow SL = 6 \Rightarrow$
 $= KM$

$\Rightarrow AL = 14 = AK$

$OM^2 = OK^2 + KM^2 \Rightarrow OM = 10$



$SH \perp (ABC) \Rightarrow$ по т. трех п-х
 $HK \perp BC$ $SK \perp BC$

опл 14

$(SHK) \perp (BSC)$, но $(SON) \perp (BSC)$ ($ON \perp (BSC)$)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

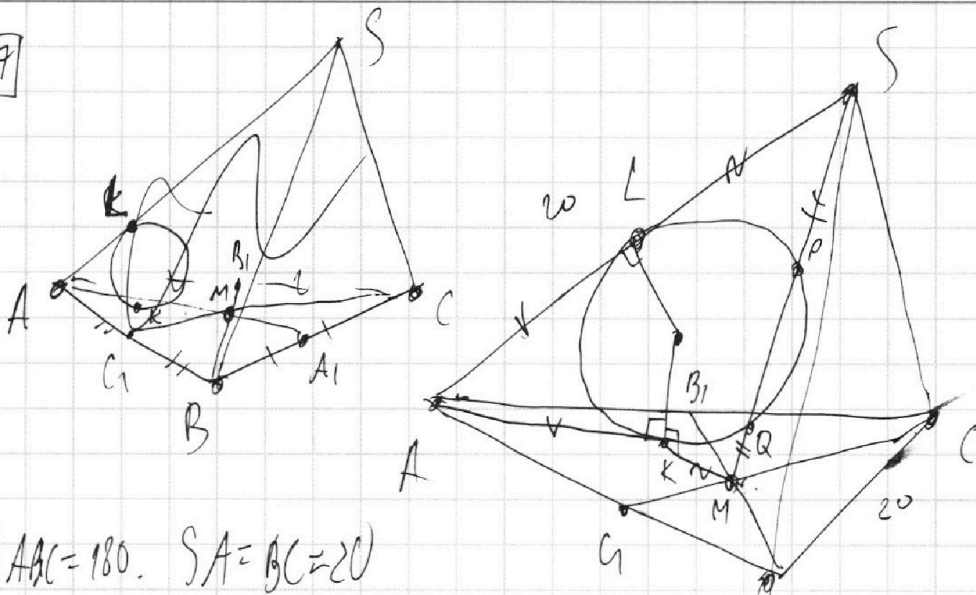
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

17



$S_{ABC} = 180$. $SA = BC = 20$

По Q -е ~~гипотезе~~ ~~междоу.~~
 $QC_1^2 = 2(AC^2 + BC^2) - AB^2$
 $QA_1^2 = 2(AC^2 + AB^2) - BC^2$
 $BB_1^2 = 2(AB^2 + BC^2) - AC^2$

$AL = AK = KC$. \angle

т.т. M в HL . $ML^2 = MQ \cdot MP \Rightarrow MQ = SP$ по HL .

т.т. S в OM . $SP^2 = SP \cdot SQ$ $QR \perp OM \Rightarrow QR + MQ = QR + SP \Rightarrow MQ = SP \Rightarrow MK = SL \Rightarrow$

$AM = AS = 20 \Rightarrow AA_1 = \frac{2}{3} AM$ (пер. мед. гипот. мед. $2:1$) $\Rightarrow AA_1 = 30$

т. пер. мед. гипот. мед. $2:1 \Rightarrow S \Rightarrow AM = 2MA_1 = \frac{AA_1}{3} = 10 = \frac{1}{2} BC = BA_1 = A_1C$

$\Rightarrow \triangle CMB$ - \perp в M , т.к. $AM = \frac{1}{2} BC$.

$S_{C_1B_1C_2} = \frac{1}{2} B_1B_1 \cdot C_1C_1 \cdot \sin 90^\circ = \frac{1}{2} B_1B_1 \cdot C_1C_1$

$S_{C_1B_1C_2} = S_{ABC} - S_{AA_1C_1}$, но

B_1C_1 - пер. медиана $\Rightarrow S_{AB_1C_1} = \frac{1}{4} S_{ABC} \Rightarrow$

$\Rightarrow S_{C_1B_1C_2} = \frac{3}{4} S_{ABC} = 135 = \frac{1}{2} B_1B_1 \cdot C_1C_1$

$\Rightarrow B_1B_1 \cdot C_1C_1 = 270$. $AA_1 \cdot B_1B_1 \cdot C_1C_1 = 30 \cdot 270 = 8100$. **Ответ: 8100**

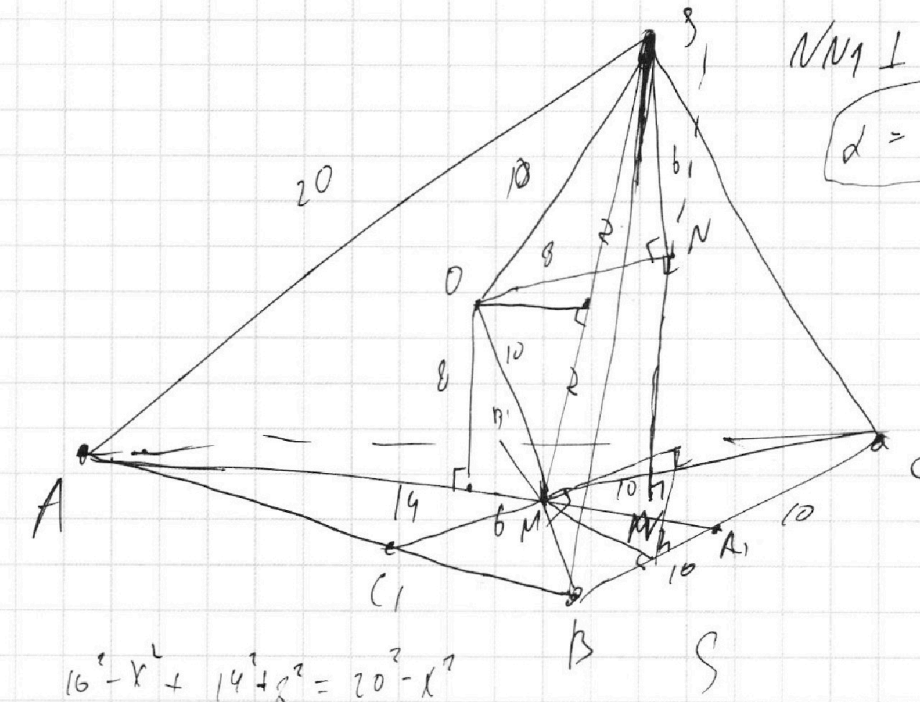
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

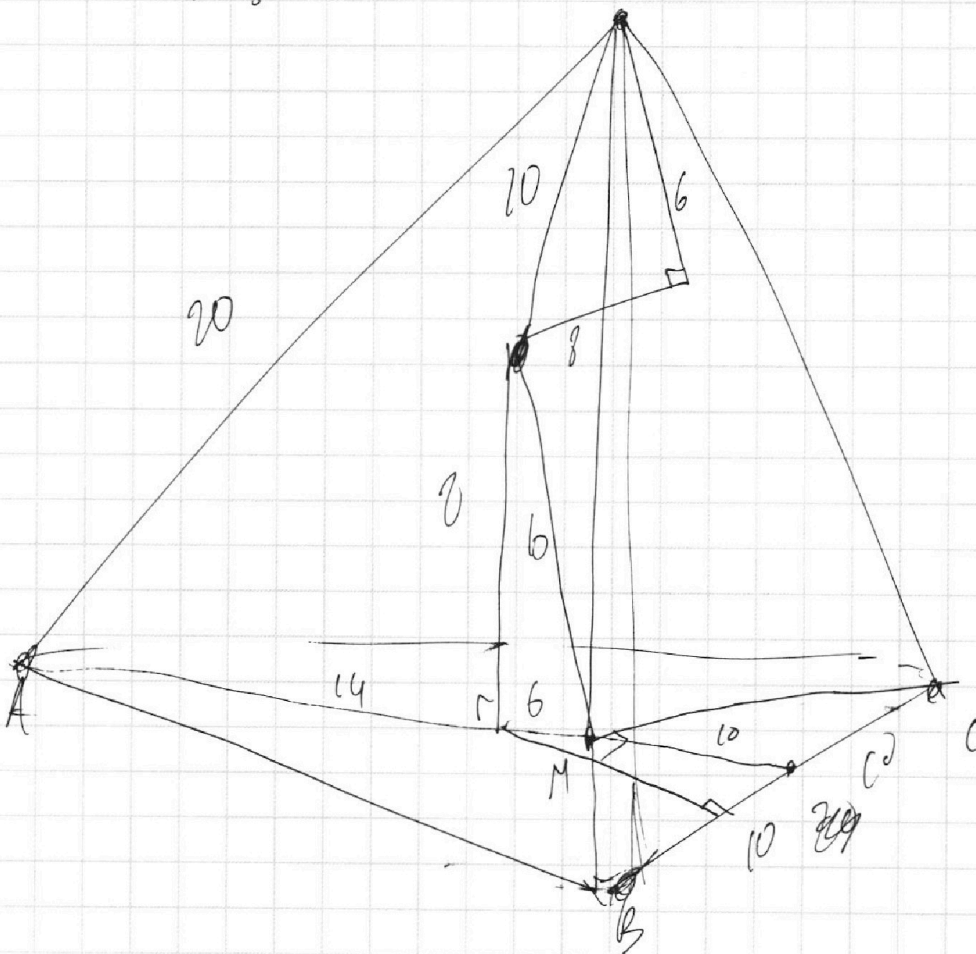
- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$SN \perp [ABC]$
 $d = 90 - \arccos\left(\frac{4}{5}\right)$





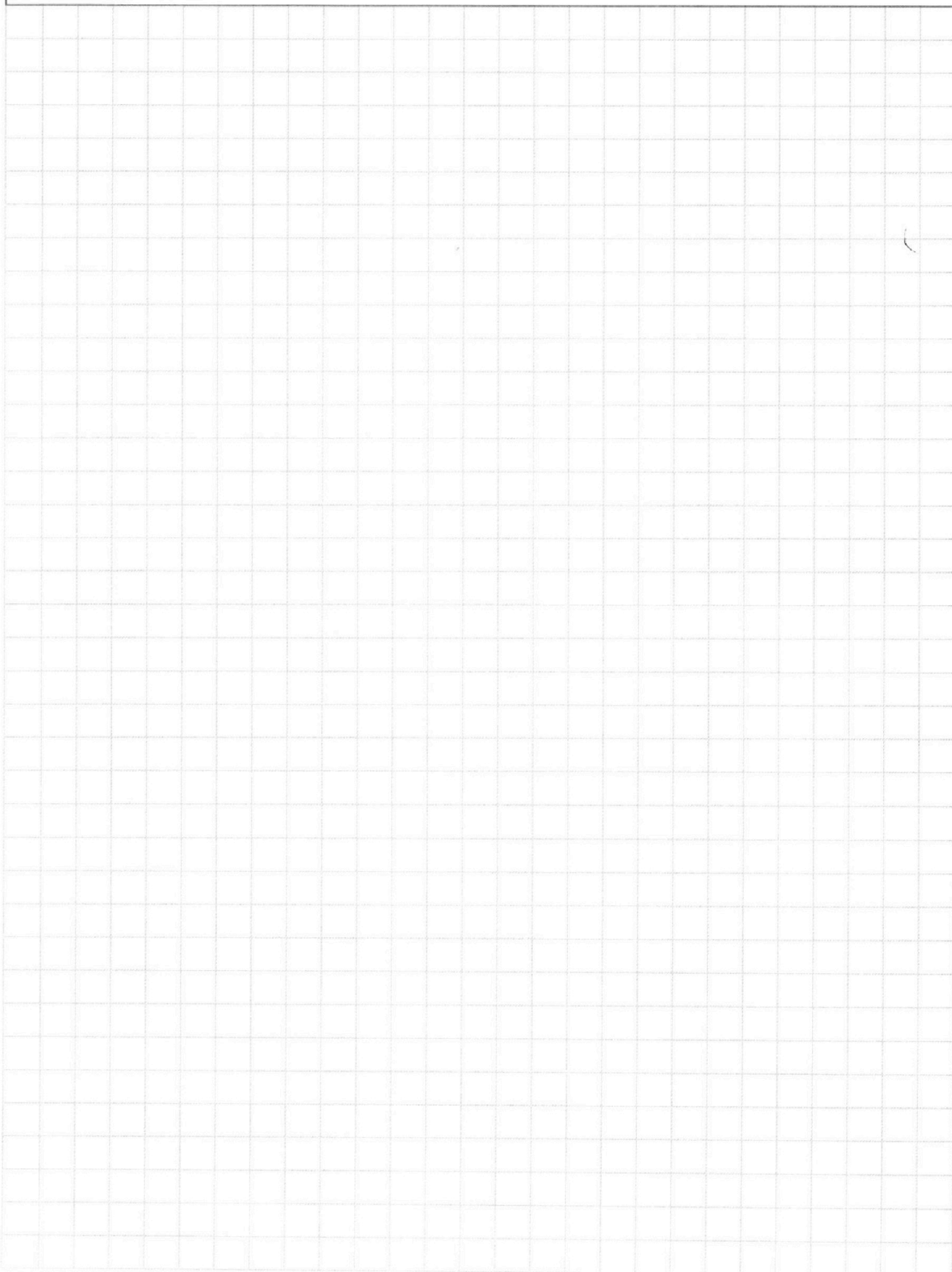
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





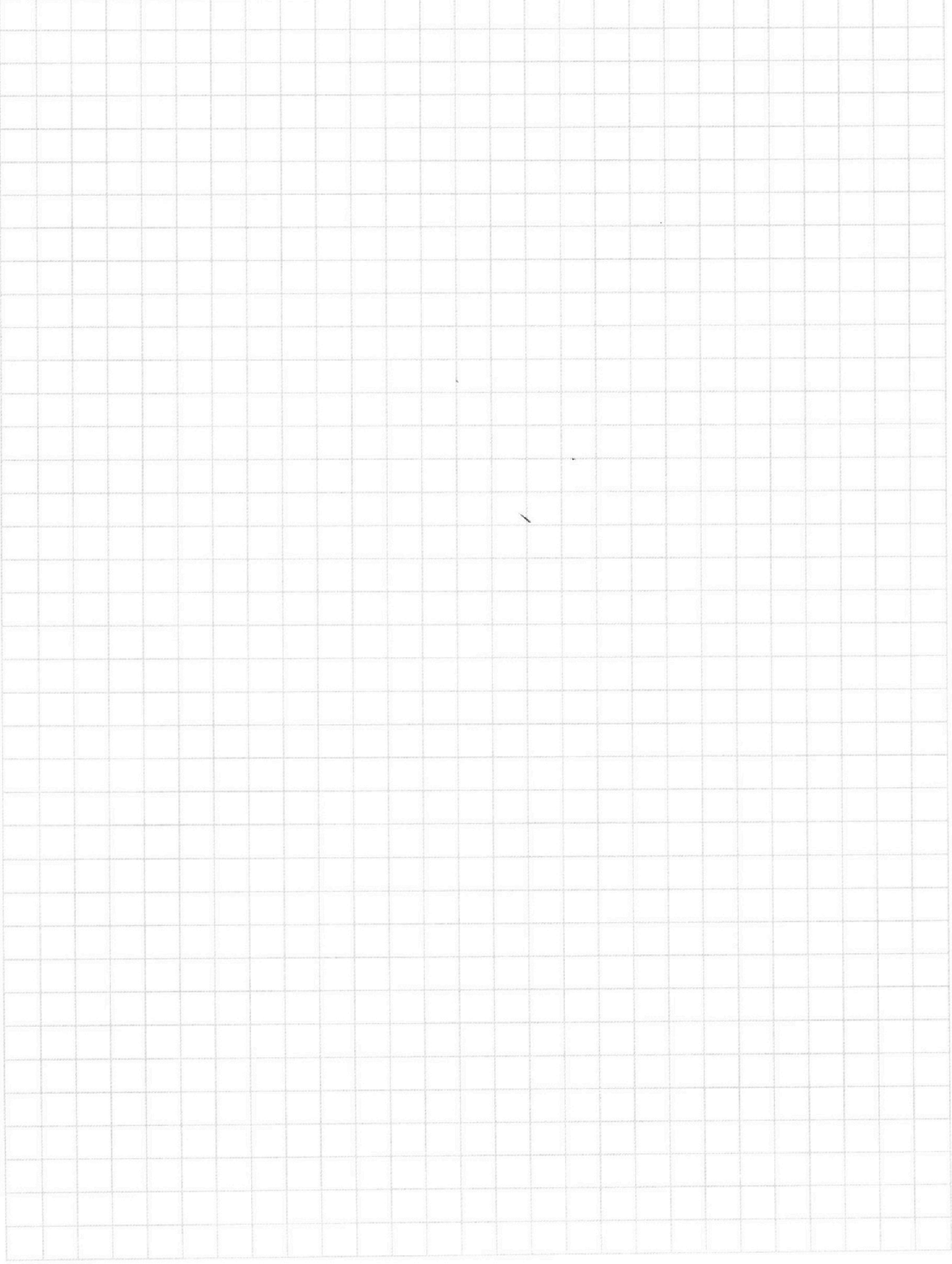
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



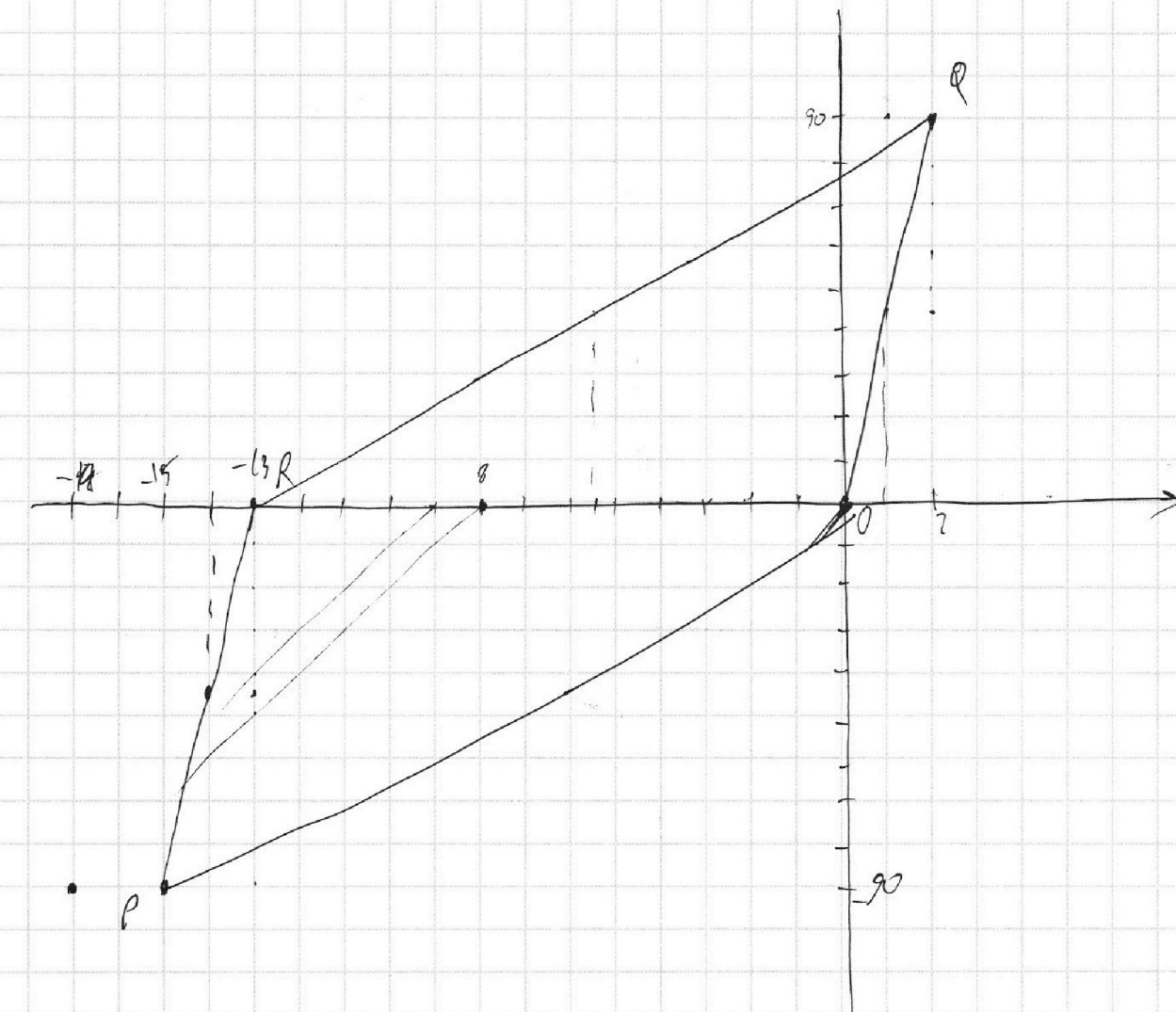
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





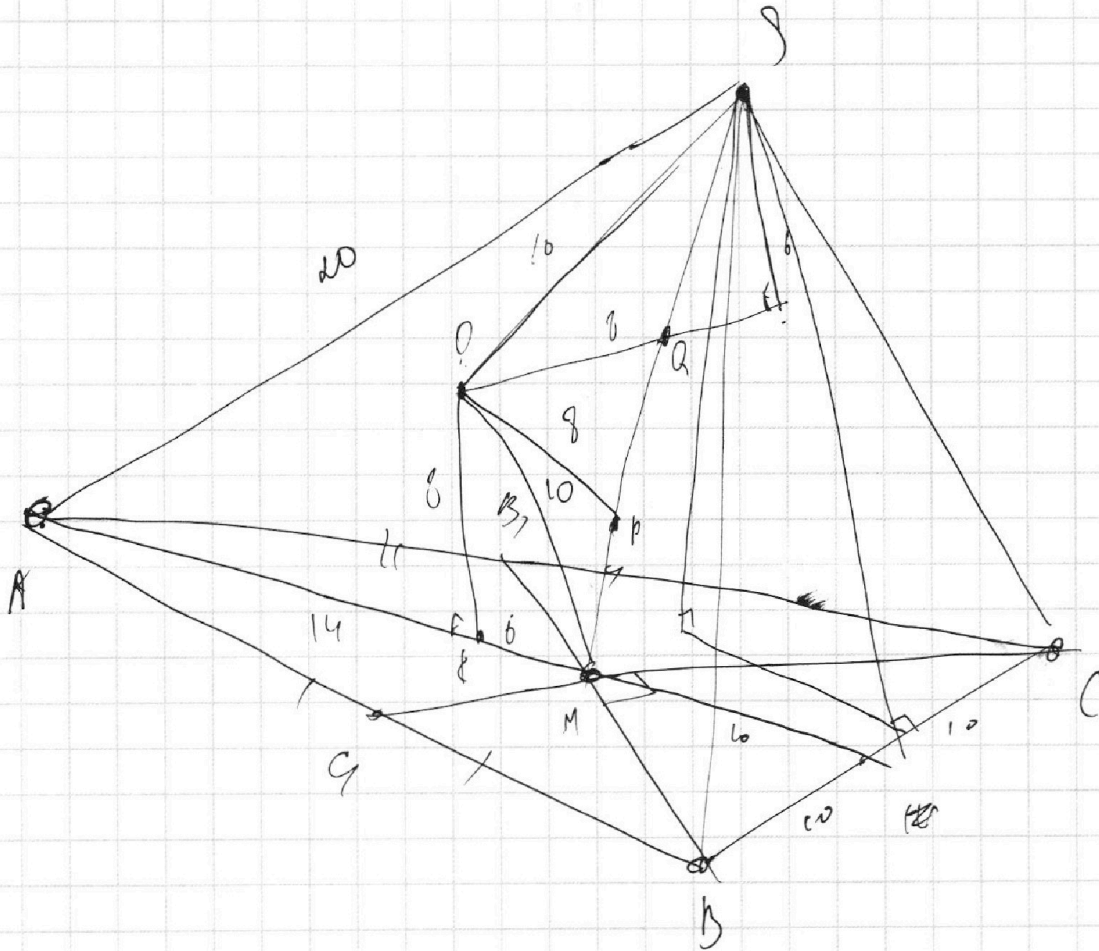
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

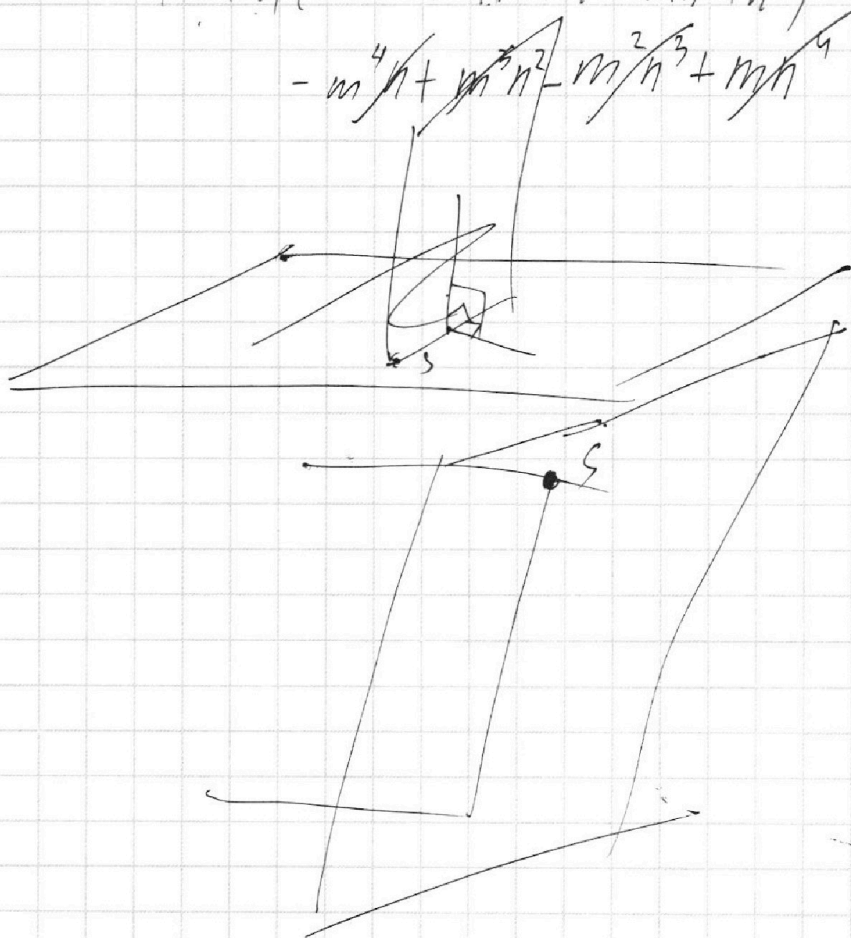
1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$m^5 + a^5 = (m+n) (m^4 - m^3n + m^2n^2 - mn^3 + n^4)$$
$$m^5 - m^4n$$
$$m^5 - m^4/n + m^3/n^2 - m^2/n^3 + mn^4$$

$$m^5 + a^5 = (m+n) (m^4 - m^3n + m^2n^2 - mn^3 + n^4)$$
$$- m^4n + m^3n^2 - m^2n^3 + mn^4$$





m+n

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

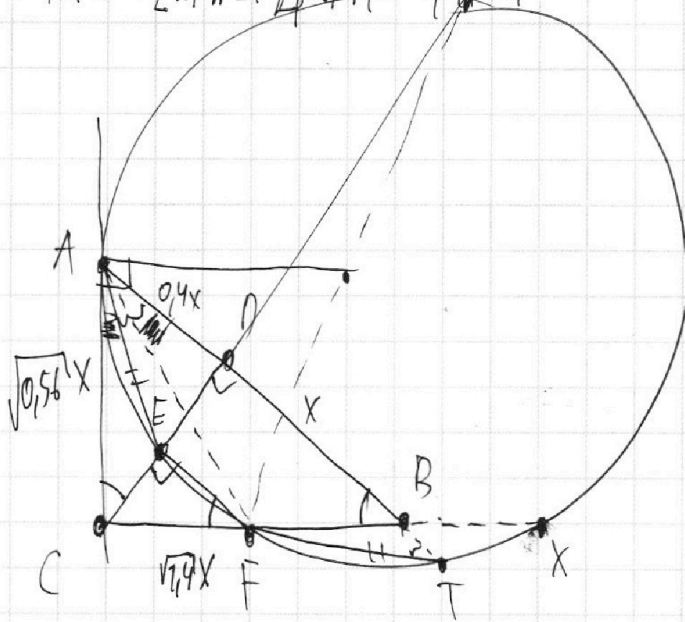


Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$m^4 + n^4 + 4m^2n^2 + 2m^2n^2 - 4n^3m$$

$$20^2 - 14$$

$$8 \cdot 10 + 8 = 18$$



$$\begin{array}{r}
 196 \\
 \times 12 \quad 6 \\
 \hline
 1176 \\
 1176 \\
 \hline
 181 \\
 \hline
 324 \\
 + 196 \\
 \hline
 520
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 10^2 - x^2 \\
 20^2 - y^2
 \end{array}$$

$$CD = 0.4x^2 \Rightarrow CD = \sqrt{0.4}x$$

$$\frac{\sin(\dots)}{AE} = \frac{\sin(90 - \xi)}{AC}$$

$$\frac{\cos \xi}{AC} = \frac{\sin \xi}{FB}$$

$$(m+n)(m^2 - mn + n^2)$$

$$m^3 - m^2n + mn^2 - mn^2$$

$$\frac{\sin(\dots)}{FT} = \frac{\sin \xi}{FB} \frac{(m-n)^2}{(m^2+n^2-2mn)}$$

$$\frac{FB}{AC} = \tan \xi = \frac{ED}{AD}$$

$$\frac{ED}{FB} = \frac{0.4}{\sqrt{0.56}}$$

$$\sin(\dots) = \frac{AC}{AB} = \frac{CE}{BF}$$

$$(m^2 + n^2) = (m+n)(m^2 + mn + n^2)$$

~~CE~~

$$\frac{CE}{CE} = \frac{ED}{BF} \quad m^2 + m^2n + mn^2 - nm^2 - mn^2 - n^2$$

$$m^5 + n^5 = (m+n)(m^4 - mn^4 - nm^4 + n^5)$$

$$m^5 + n^5 = (m+n)(\dots)$$

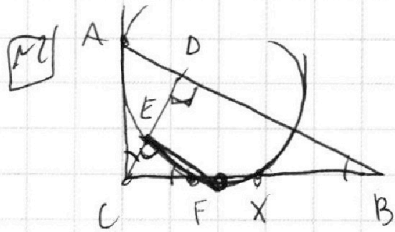
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

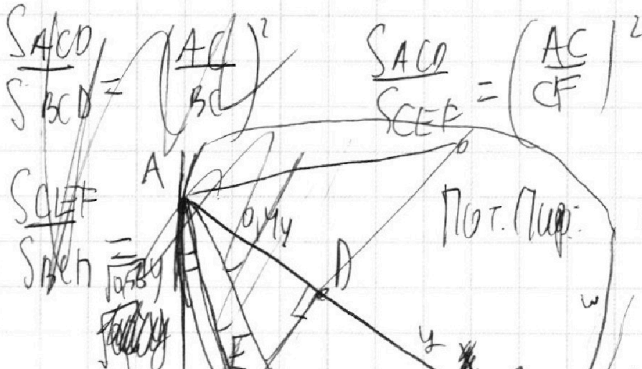


$$AB = 1,4 BD$$

$$\frac{S_{ACD}}{S_{CEF}}$$

$EF \parallel BD \Rightarrow \angle CEF = \angle CDB = 90^\circ$
 $\angle EFC = \angle DBC$ -
 соответ. углы при $EF \parallel BD$,
 CD и BC - соответ. сек.

$$\begin{aligned}
 CD \perp BC &\Rightarrow \angle AED = \angle ABC = \angle CFE \Rightarrow \triangle ACD \sim \triangle CFE \\
 \text{по } CD &\Rightarrow BD \cdot AB = BC^2 \Rightarrow BC = \sqrt{1,4} BD = \sqrt{1,4} y
 \end{aligned}$$



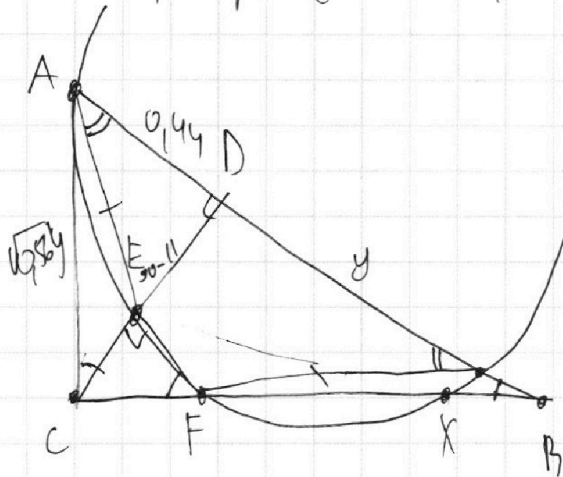
$$CD^2 = BC^2 - BD^2 = 0,4 BD^2$$

$$CD = \sqrt{0,4} y$$

$$AC^2 = AD^2 + CD^2 = 0,16 y^2 + 0,4 y^2 = 0,56 y^2$$

$$AC = \sqrt{0,56} y$$

$$\text{ср. т.-с. откл. окр.} \quad CA^2 = CF \cdot CX = 0,56 y^2$$



$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos(60-30) = \cos 60 \cdot \cos 30 + \sin 60 \cdot \sin 30$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2}$$