



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^9 3^{10} 5^{10}$ ,  $bc$  делится на  $2^{14} 3^{13} 5^{13}$ ,  $ac$  делится на  $2^{19} 3^{18} 5^{30}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник  $ABC$ . Окружность, касающаяся прямой  $BC$  в точке  $B$ , пересекает высоту  $CD$ , проведённую к гипотенузе, в точке  $F$ , а катет  $AC$  – в точке  $E$ . Известно, что  $AB \parallel EF$ ,  $AD : DB = 3 : 1$ . Найдите отношение площади треугольника  $ABC$  к площади треугольника  $CEF$ .
3. [4 балла] Решите уравнение  $5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$ .
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} (3^{11}) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения  $xy$ .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0; 0)$ ,  $P(-14; 42)$ ,  $Q(6; 42)$  и  $R(20; 0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$ .
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида  $SABC$ , медианы  $AA_1, BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Сфера  $\Omega$  касается ребра  $AS$  в точке  $L$  и касается плоскости основания пирамиды в точке  $K$ , лежащей на отрезке  $AM$ . Сфера  $\Omega$  пересекает отрезок  $SM$  в точках  $P$  и  $Q$ . Известно, что  $SP = MQ$ , площадь треугольника  $ABC$  равна  $90$ ,  $SA = BC = 12$ .
  - а) Найдите произведение длин медиан  $AA_1, BB_1$  и  $CC_1$ .
  - б) Найдите двугранный угол при ребре  $BC$  пирамиды, если дополнительно известно, что  $\Omega$  касается грани  $BSC$  в точке  $N$ ,  $SN = 4$ , а радиус сферы  $\Omega$  равен  $5$ .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$2\beta_3 = 21 \quad ; \quad \beta_3 = \frac{21}{2} \quad ; \quad \beta_1 = \beta_3 - 3 = \frac{21-6}{2} = \frac{15}{2}$$
$$\beta_2 = 10 - \beta_1 = \frac{20-15}{2} = \frac{5}{2} \quad , \quad \text{однако такое}$$

невозможно, т.к.  $a, b, c \in \mathbb{N}$ .

$$\begin{cases} \beta_1 + \beta_2 \geq 10 & + \\ \beta_2 + \beta_3 \geq 13 & + \\ \beta_1 + \beta_3 \geq 18 & \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} 2(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3) \geq 41 \\ \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \geq 20,5 \end{cases}$$

abc<sub>min</sub> достигается при  $(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3)_{\min}$ ,  
т.е.  $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \in \mathbb{Z}$   
 $u \geq 0$

$$\begin{aligned} \text{Пусть } \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 &= 21 \\ 10 + \beta_3 &= 21 \\ \beta_3 &= 11 \end{aligned}$$

$$\beta_1 = 18 - \beta_3 = 7 \quad ; \quad \beta_2 = 13 - \beta_3 = 2 \quad ,$$

такое возможно

$$\begin{cases} \gamma_1 + \gamma_2 \geq 10 \\ \gamma_1 + \gamma_3 \geq 30 \\ \gamma_2 + \gamma_3 \geq 13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3) \geq 53 \\ \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 \geq 26,5 \end{cases}$$

Пусть  $\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 27$  - min

$$\gamma_3 = 27 - 10 = 17 \quad ; \quad \gamma_2 = 27 - 30 = -3$$

такое невозм., ~~т.к.  $\gamma_2 < 0$~~ , ~~т.к.  $\gamma_3 \neq 30$~~ , ~~т.к.  $\gamma_1 + \gamma_2 = 17$~~

$$\gamma_1 = 27 - (\gamma_2 + \gamma_3) = 27 - 13 = 14$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$a, b, c \in \mathbb{N}$  ;  $N1.$

$$ab: 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10}$$
$$bc: 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13}$$
$$ac: 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30}$$

$abc_{\min} = ?$

$abc$  будет наименьшим, если  $ab, bc, ac$  — ~~простые~~ <sup>линейные</sup>

$a, b, c$  — степени 2, 3 и 5

$$a = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\beta_1} \cdot 5^{\gamma_1} ; b = 2^{\alpha_2} \cdot 3^{\beta_2} \cdot 5^{\gamma_2}$$

$$c = 2^{\alpha_3} \cdot 3^{\beta_3} \cdot 5^{\gamma_3}, \text{ при этом}$$

из  $ab, bc, ac$  (если числа минимальные) и равенство возможно

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 9 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 14 \\ \alpha_1 + \alpha_3 = 19 \end{cases} ; \begin{cases} \alpha_2 = 9 - \alpha_1 \\ 9 - \alpha_1 + \alpha_3 = 14 \\ \alpha_1 + \alpha_3 = 19 \end{cases}$$

$$9 + 2\alpha_3 = 33$$

$$2\alpha_3 = 24$$

$$\alpha_3 = 12$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 7 + 2 + 12 = 21$$

$$\alpha_1 = 9 + \alpha_3 - 14 = 9 - 2 = 7$$

$$\alpha_2 = 9 - \alpha_1 = 2$$

аналогично:

$$\begin{cases} \beta_1 + \beta_2 = 10 \\ \beta_2 + \beta_3 = 13 \\ \beta_1 + \beta_3 = 18 \\ \beta_3 - \beta_1 = 3 \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

н.к.  $x_2 \in \mathbb{Z}$ ,  $x_2 \geq 0$ ; ~~при  $x_2 = 0$ :~~

$(x_1 + x_2 + x_3)_{\min} = 30$ , такое возможно при  $x_2 = 0$

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 30 \\ x_1 \geq 10 \\ x_1 + x_3 \geq 30 \\ x_3 \geq 13 \end{cases}$$

Максимум произведе при  $x_1 = 10$ ,  $x_3 = 20$ ,  
при этом произведение  $a, b$  и  $c$  будет мин.

$$(abc)_{\min} = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 6 \cdot 5$$

Ответ:  $6 \cdot 5$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

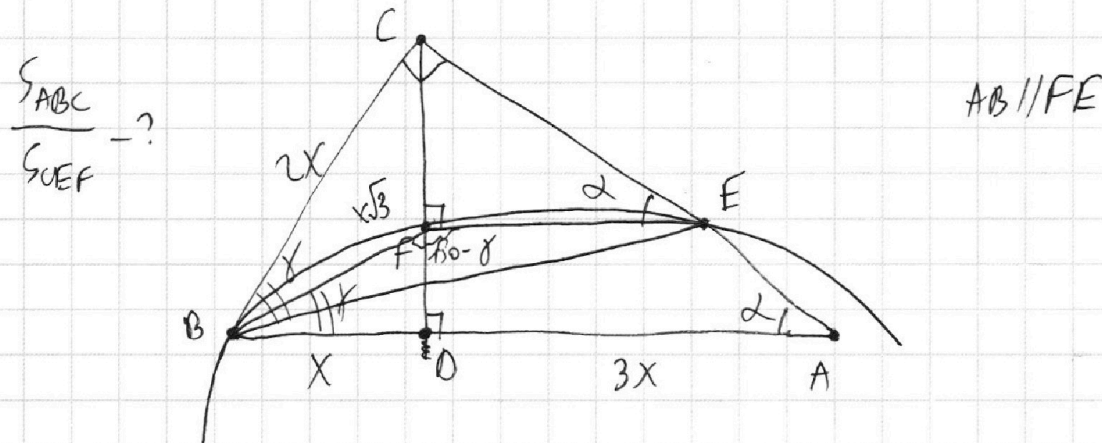
Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



примем  $BD$  за  $x$ ,  $AD = 3x$   
по св-ву впис. к мн:  $CD^2 = x \cdot 3x$

$$CD = x\sqrt{3}$$

$$\angle CAD = \angle CEF = \alpha; \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{CD}{AD} = \frac{x\sqrt{3}}{3x} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$\Downarrow$   
 $\alpha = 30^\circ$

(BC) - кас. к окруж. по т.п.

$$\angle CBE = \frac{\sphericalangle BE}{2}, \text{ как угол между касат. и хордой}$$

$$\angle BFE = 180^\circ - \frac{\sphericalangle BE}{2} = 180^\circ - \angle CBE \text{ как впис.}$$

$$\angle EFD = 90^\circ, \text{ тогда}$$

$$\angle BFD + 90^\circ = \angle BFE$$

$$\angle BFD = 180^\circ - \angle CBE - 90^\circ = 90^\circ - \angle CBE$$

примем  $\angle CBE$  за  $\gamma$

$$\left. \begin{array}{l} \text{в } \triangle CBE: \operatorname{tg} \gamma = \frac{CE}{CB} \\ \text{в } \triangle BFD: \operatorname{tg} \gamma = \frac{FD}{x} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{CE}{CB} = \frac{FD}{x}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



по ТЛ Треугольник  $\triangle BCD$ :

$$x^2 + 3x^2 = CB^2 \Rightarrow CB = 2x$$

$$\frac{CE}{2x} = \frac{FD}{x}$$

$$CE = 2FD$$

Треугольник  $\triangle CFE$   $FD = t$ ,  $CE = 2t$

$CF = x\sqrt{3} - t$ ;  $\triangle CFE$ :

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2} = \frac{CF}{CE}$$

$$\frac{x\sqrt{3} - t}{2t} = \frac{1}{2}; \quad x\sqrt{3} - t = t$$
$$x\sqrt{3} = 2t$$

$$t = \frac{x\sqrt{3}}{2} \Rightarrow CF = \frac{x\sqrt{3}}{2}$$

по ТЛ Треугольник:  $3x^2 + 9x^2 = AC^2$

$$AC = 2x\sqrt{3}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot x \cdot 2x\sqrt{3} = 2x^2\sqrt{3}$$

$S_{CEFA} = \frac{1}{2} \triangle CDA \sim \triangle CFE$  по 2  $\angle$ ,

поэтому  $\frac{FE}{AO} = \frac{CF}{CO} = \frac{1}{2} \Rightarrow FE = \frac{3x}{2}$

$$S_{CEF} = \frac{1}{2} \cdot \frac{x\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{3x}{2} = \frac{3x^2\sqrt{3}}{8};$$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = \frac{2x^2\sqrt{3} \cdot 8}{3x^2\sqrt{3}} = \frac{16}{3}; \quad \text{Ответ: } \frac{16}{3}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{при } k = -1: \quad 6x = -8\pi; \quad x = -\frac{4}{3}\pi$$

$$\text{при } k = -2: \quad 6x = -18\pi; \quad x = -3\pi$$

$$\text{при } k = 0: \quad 6x = 2\pi; \quad x = \frac{\pi}{3}$$

$$\text{при } k = 1: \quad 6x = 12\pi; \quad x = 2\pi$$

$$(2) \quad \frac{5\pi}{2} + 5x + 10\pi k = x + \frac{\pi}{2}$$

$$4x = -2\pi - 10\pi k$$

$$2x = -\pi - 5\pi k$$

$$-6\pi \leq 2x \leq 4\pi$$

$$\text{при } k = -1: \quad 2x = -\pi + 5\pi = 4\pi; \quad x = 2\pi$$

$$\text{при } k = 0: \quad 2x = -\pi; \quad x = -\frac{\pi}{2}$$

$$\text{при } k = 1: \quad 2x = -\pi - 5\pi = -6\pi; \quad x = -3\pi$$

$$\text{Ответ: } \left\{ -3\pi; -\frac{4}{3}\pi; \frac{\pi}{3}; 2\pi; -\frac{\pi}{2} \right\}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№3.

$$5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$$

Пусть  $\arcsin(\cos x) = \alpha$ , тогда:

$$\begin{cases} 5\alpha = x + \frac{\pi}{2} \\ -\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2} \\ \sin \alpha = \cos x \end{cases}$$

1) 
$$\begin{aligned} -\frac{5\pi}{2} &\leq 5\alpha \leq \frac{5\pi}{2} \\ -\frac{5\pi}{2} &\leq x + \frac{\pi}{2} \leq \frac{5\pi}{2} \\ \boxed{-3\pi \leq x \leq 2\pi} \end{aligned}$$

2)  $\sin \alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

$$\begin{cases} \alpha = \frac{\pi}{2} - x + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ \alpha = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = \frac{\pi}{2} - x + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} & (1) \\ \alpha = \frac{\pi}{2} + x + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} & (2) \end{cases}$$

3) (1) 
$$\frac{5\pi}{2} - 5x + 10\pi k = x + \frac{\pi}{2}$$
$$6x = 2\pi + 10\pi k$$

$$-18\pi \leq 6x \leq 12\pi$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Поскольку прямая симметрична оси  $Ox$ ,

для прямой  $l_2$   $\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha = -\frac{5}{\sqrt{11}}$

Чтобы было 4 реш:  $\operatorname{tg} \gamma \in (-\frac{5}{\sqrt{11}}; 0) \cup (0; \frac{5}{\sqrt{11}})$ ,

$$\text{т.е. } \operatorname{tg} \gamma = -\frac{a}{2}$$

также был разломан прямой  $\operatorname{tg} \delta = 0$ ,  
( $a = 0$ )

поэтому достаточно решить след систему:

$$\begin{cases} -\frac{a}{2} > -\frac{5}{\sqrt{11}} \cdot (-2) \\ -\frac{a}{2} < \frac{5}{\sqrt{11}} \cdot (-2) \end{cases} \begin{cases} a < \frac{10}{\sqrt{11}} \\ a > -\frac{10}{\sqrt{11}} \end{cases}$$

Ответ:  $a \in (-\frac{10}{\sqrt{11}}; \frac{10}{\sqrt{11}})$ .



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Найти  $a$ , при которых сущ.  $b$ , такие что

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 реш.

$$ax + 2y - 3b = 0$$

$$2y = -ax + 3b$$

$$y = -\frac{ax}{2} + \frac{3b}{2}$$

$$\begin{cases} y = -\frac{ax}{2} + \frac{3b}{2} \\ x^2 + y^2 = 9 \\ (x-6)^2 - 36 + y^2 + 32 = 0 \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 = 9$$

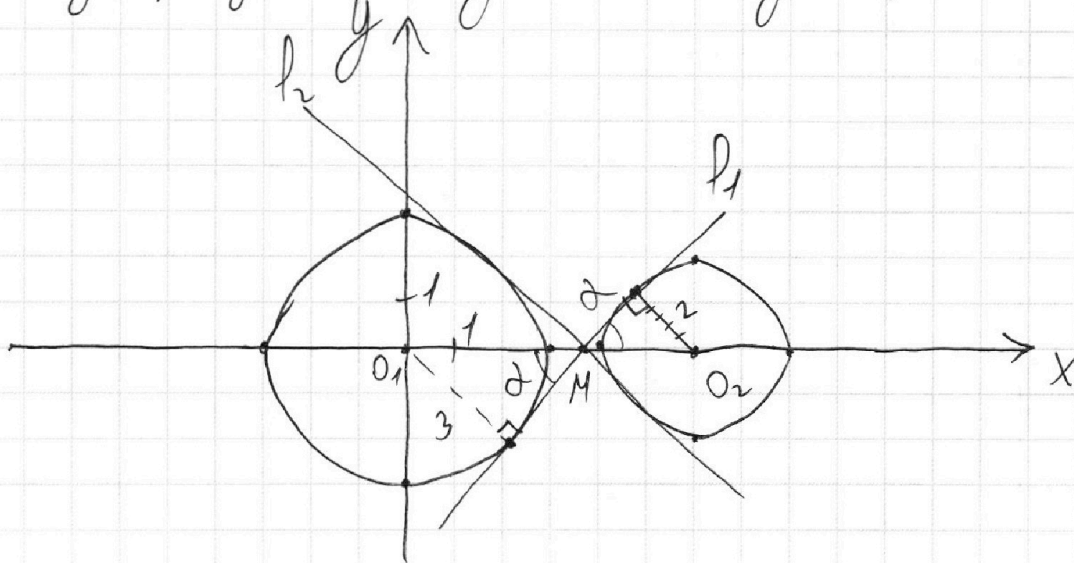
$$(x-6)^2 - 36 + y^2 + 32 = 0$$

$$\begin{cases} y = -\frac{ax}{2} + \frac{3b}{2} \\ x^2 + y^2 = 9 \\ (x-6)^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 = 9$$

$$(x-6)^2 + y^2 = 4$$

Изобразим эту систему графически



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 + y^2 = 9 \text{ - окружность } R=3, O_1(0;0)$$

$$(x-6)^2 + y^2 = 4 \text{ - окружность } R=2; O_2(6;0)$$

$$y = -\frac{ax}{2} + \frac{3b}{2} \text{ - прямая (если } a \neq 0)$$

1) Рассмотрим особый случай  $a=0$ :

$$y = \frac{3}{2}b \text{ - найдется макс } b, \text{ что}$$

4 реш. (например,  $b=0$ )

$$\boxed{a=0} \text{ в ответ}$$

2) от  $a$  зависит наклон прямой,

тогда найдем предельный случай при  
котором все 4 реш., - ~~тогда~~  $y = -\frac{ax}{2} + \frac{3b}{2}$  является  
общей внешней касательной

Пусть эта прямая  $l_1$  касается  $O_1$  в  $(\cdot)M$

$$O_1M + O_2M = 6. \text{ Пусть } \angle 2, \text{ тогда}$$

$$\sin 2 \cdot 6 = \frac{2}{O_2M} = \frac{3}{O_1M}$$

$$\frac{2}{6 - O_1M} = \frac{3}{O_1M}; \quad 2O_1M = 18 - 3O_1M$$

$$5O_1M = 18; \quad O_1M = \frac{18}{5}$$

$$\sin 2 = \frac{18 \cdot 5}{48 \cdot 6} = \frac{5}{6}; \quad \cos 2 = \sqrt{1 - \frac{25}{36}} = \frac{\sqrt{11}}{6}$$

$$\tan 2 = \frac{5}{\sqrt{11}} \neq \frac{5}{6}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$x < 1$$

$$(2) \quad \frac{7}{2} \log_{5y} 3 = \log_3^4(5y) + 8 > 0$$

$$\log_{5y} 3 > 0$$

$$\log_{5y} 3 - \log_{5y} 1 > 0$$

$$(5y - 1)(3 - 1) > 0$$

$$5y > 1$$

$$(*) \quad (\log_3 5y - \log_3 x) \log_3 x \log_3 5y \underset{>0}{\overbrace{(\log_3^2 5y + \log_3^2 x) = \frac{7}{2}}} > 0$$

$$(1) + (2): \quad \frac{7}{2} (\log_x 3 - \log_{5y} 3)$$

$$\frac{7}{2} (\log_x 3 - \log_{5y} 3) + \log_3^4 x + \log_3^4 5y = -16$$

$$\log_x 3 - \log_{5y} 3 = \frac{2}{7} (-16 - \log_3^4 x - \log_3^4 5y) < 0$$

$$\log_x 3 - \log_{5y} 3 < 0, \text{ тогда}$$

$$\text{н.к. } \log_3^2 5y + \log_3^2 x > 0, \text{ но равенство } (*)$$

$$\text{возможно, только если } \log_3 x \log_3 5y < 0,$$

но по доп-му это не так

$$\text{Ответ: } \frac{1}{5}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№ 5.

$$\begin{cases} \log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \\ \log_3^4 (xy) + 2 \log_{xy} 3 = \log_{xy^2} (3^{11}) - 8 \end{cases}$$

$xy - ?$

ОДЗ:

$$\begin{cases} x > 0 \\ x \neq \pm 1 \\ y > 0 \\ y \neq \pm \frac{1}{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \frac{5}{2} \log_x 3 - 8 \\ \log_3^4 (xy) + 2 \log_{xy} 3 = \frac{11}{2} \log_{xy} 3 - 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log_3^4 x + \frac{7}{2} \log_x 3 = -8 & (1) \\ \log_3^4 (xy) - \frac{7}{2} \log_{xy} 3 = -8 & (2) \end{cases}$$

$$\log_3^4 x + \frac{7}{2} \log_x 3 = \log_3^4 (xy) - \frac{7}{2} \log_{xy} 3$$

$$\log_3^4 (xy) - \log_3^4 x = \frac{7}{2} (\log_x 3 + \log_{xy} 3)$$
$$(\log_3^2 (xy) - \log_3^2 x) (\log_3^2 (xy) + \log_3^2 x) = \frac{7}{2} \left( \frac{1}{\log_3 x} + \frac{1}{\log_3 (xy)} \right)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} & (\log_3(5y) - \log_3 x) (\log_3(5y) + \log_3 x) (\log_3^2 5y + \log_3^2 x) = \\ & = \frac{7}{2} \left( \frac{\log_3 x + \log_3 5y}{\log_3 x \log_3 5y} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \log_3 \left( \frac{5y}{x} \right) \cdot \log_3(5xy) \cdot (\log_3^2 5y + \log_3^2 x) = \\ & = \frac{7}{2} \cdot \frac{\log_3(5xy)}{\log_3 x \log_3 5y} \end{aligned}$$

1) или  $\log_3(5xy) = 0$  :

$$\log_3(5xy) = \log_3 1$$

Ф-ция  $g(t) = \log_3 t$  монотонна на  $D(g)$ ,

поэтому

$$5xy = 1$$

$$xy = \frac{1}{5}$$

2) или  $\log_3(5xy) \neq 0$  :

$$\log_3 \left( \frac{5y}{x} \right) \cdot \log_3 x \cdot \log_3 5y \cdot (\log_3^2 5y + \log_3^2 x) = \frac{7}{2}$$

$$\frac{7}{2} \log_x 3 = -8 - \log_3^4 x < 0$$

(1)  $\log_x 3 < 0$

$$\log_x 3 - \log_x 1 < 0$$

$$(x-1)(3-1) < 0$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_x 243 - 8$$

$$\log_3^4 (5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{5y} 2 (3^{11}) - 8$$

$xy = k$   
 $\log_3 5y = k$   
 $\log_3 x = t$

$$x^2 + t^2 = (x+t)^2 - 2xt$$

$$\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \\ y > 0 \\ y \neq \frac{1}{5} \end{cases}$$

$$\log_3^2 x = \frac{1}{3} \log_3 x$$

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \frac{1}{2} \cdot 5 \log_x 3 - 8$$

$$\log_3^4 (5y) + 2 \log_{5y} 3 = \frac{1}{2} \cdot 11 \log_{5y} 3 - 8$$

$$\log_3^4 x + 6 \log_x^2 3 - \frac{5}{2} \log_x 3 + 8 = 0$$

$$\log_3^4 (5y) + 2 \log_{5y}^2 3 - \frac{11}{2} \log_{5y} 3 + 8 = 0$$

$$\log_3^4 x + \frac{7}{2} \log_x 3 + 8 = 0$$

$$\log_3^4 5y - \frac{7}{2} \log_{5y} 3 + 8 = 0$$

$$\log_3^4 x + \frac{7}{2} \log_x 3 = \log_3^4 5y - \frac{7}{2} \log_{5y} 3$$

$$\log_3^4 x - \log_3^4 5y = -\frac{7}{2} (\log_x 3 + \log_{5y} 3)$$

$a^4 - b^4 = (a-b)(a+b)(a^2+b^2)$   
 $\log_x \frac{1}{5y} \log_3 5xy$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Пусть  $\log_3 x = t \neq 0$ ,  $\log_3 5y = k \neq 0$

$\frac{7}{2} \log_x 3 = -8 - \frac{4}{3} \frac{t}{k} = -8$ ;  $3^k = 5y$ ;  $3^t > 0$

$\log_3 x < \log_3 5y$   $5xy = 3^{t+k}$ ;  $xy = \frac{3^{t+k}}{5}$

$(k-t)tk(k^2+t^2) = \frac{7}{2}$

$\log_x 3 < 0$   $\log_x 3 < \log_x 5 < 5$   $x < 1$   $(t+k)^2 - 2tk =$

или  $k+t = p$ ,  $(x-1)(y-1) \geq 0$   $\log_3 3 \geq \log_3 5xy$   $\log_3 3 \geq \log_3 5xy$

$t-k = \log_3 \left(\frac{x}{5y}\right)$   $p = k^2 + 2tk + t^2$   $\log_3 x \log_3 5y = 2tk = k^2 + t^2$

$t-k = \log_3 \frac{x}{5y}$   $(k-t)tk(p^2 - 2tk) = \frac{7}{2}$

$(3 - \frac{7}{2tk} + tk^2 + tk^2 - k^3 + \frac{7}{2tk})$

$t^4 - k^4 + \frac{7}{2} \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{k}\right) = 0$

$t^4 - k^4 + \frac{7}{2} \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{k}\right) = 0$

$(t^2 - k^2)(t^2 + k^2) + \frac{7(k+t)}{2tk} = 0$

$(t-k)(t+k)(t^2 + k^2) + \frac{7}{2} \frac{(t+k)}{tk} = 0$

$(k+t) \left( (t-k)(t^2 + k^2) + \frac{7}{2} \right) = 0$

$(t^2 + k^2)(t-k) + \frac{7}{2} = 0$

$(t^2 + k^2)(t-k) + \frac{7}{2} = 0$

$(t^2 + k^2)(t-k) + \frac{7}{2} = 0$

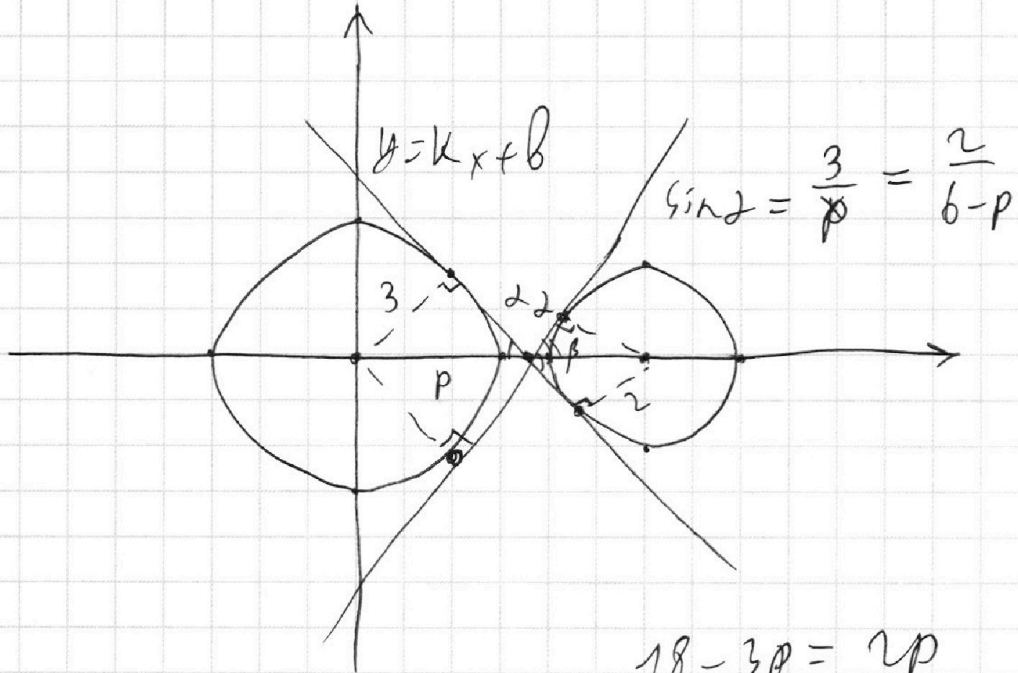
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sin \alpha = \frac{3}{p} = \frac{2}{b-p}$$

$$\begin{aligned} 18 - 3p &= 2p \\ 5p &= 18 \\ p &= \frac{18}{5} \end{aligned}$$

$$\sin \alpha = \frac{3}{\frac{18}{5}} = \frac{15}{18} = \frac{5}{6}$$

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \sqrt{1 - \frac{25}{36}} = \sqrt{\frac{11}{36}} = \frac{\sqrt{11}}{6} \\ \tan \alpha &= \frac{\frac{5}{6}}{\frac{\sqrt{11}}{6}} = \frac{5}{\sqrt{11}} \end{aligned}$$

~~$$1 + \sin^2 = \frac{1}{\cos^2}$$~~

$$\tan(180 - \alpha) = -\frac{5}{\sqrt{11}} = -\frac{a}{b}$$

$$\tan \beta = \frac{2}{b-k} = \frac{3}{k}$$

н.к. *мнимая* *действительная* *симметричек*, *по*

$$\begin{aligned} \tan \beta &= -\tan \alpha = -\frac{5}{\sqrt{11}} \\ &= \tan(180 - \alpha) = -\tan \alpha \end{aligned}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

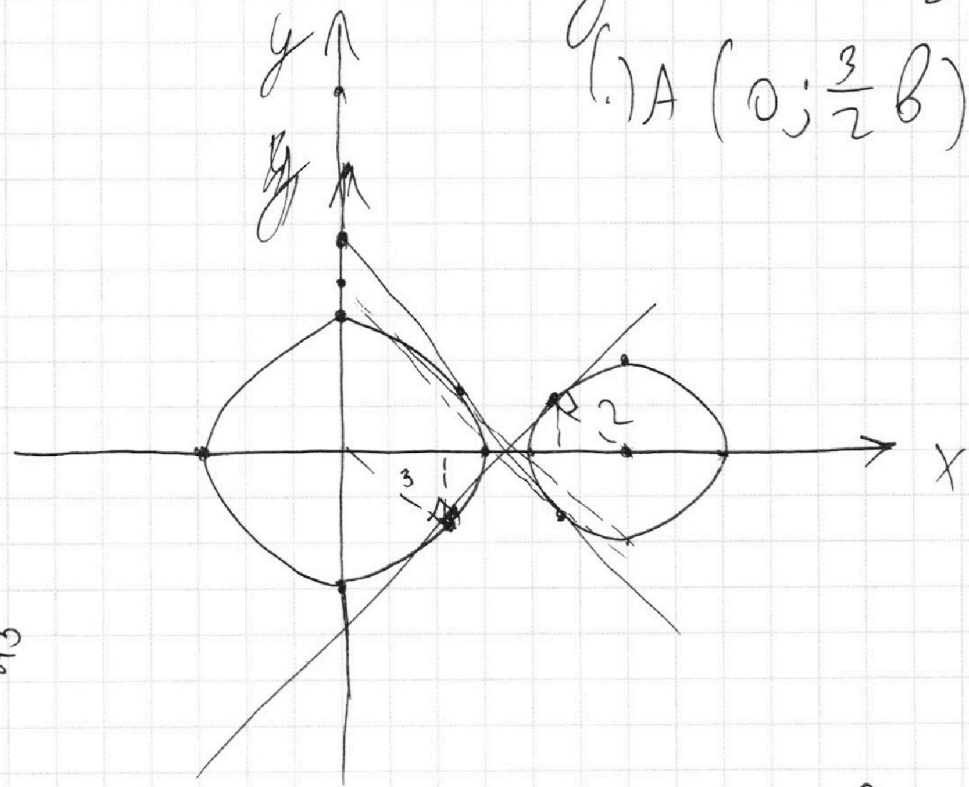


$\log_3^4 x + 6 \log_3 x = \frac{1}{2} \cdot 5 \log_3 x - 8$   
 $\frac{81}{x^2} = \frac{5}{2} \log_3 x - 8$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ (x-b)^2 + y^2 - 36 + 32 = 0 \rightarrow (x-b)^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

$$y = -ax + 3b \rightarrow y = -\frac{ax}{2} + \frac{3}{2}b$$

(.) A (0;  $\frac{3}{2}b$ )



1) следовательно  $a = 0$  :  $y = \frac{3b}{2}$   
 касательная (касир  $b=0$ )

2) граница - внутрен. обш. кас.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \quad \sqrt{3} \\ \sin \alpha = \cos x \\ \alpha = x + \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\sin \alpha = \sin \left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\begin{cases} \alpha = \frac{\pi}{2} - x + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ \alpha = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - x + 2\pi k \quad (1)$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2} + x + 2\pi k \quad (2)$$

~~(1)  $\frac{\pi}{2} - x + 2\pi k = x + \frac{\pi}{2}$~~

~~$\frac{5\pi}{2} = 5x + 10\pi k \rightarrow x + \frac{\pi}{2}$~~

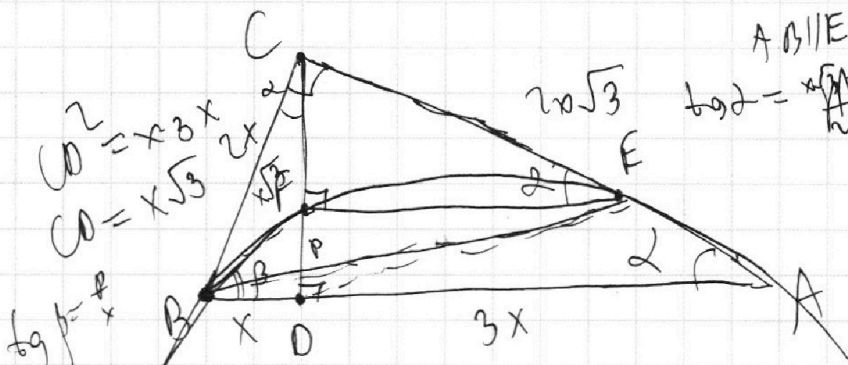
$$-\frac{5\pi}{2} \leq 5\alpha \leq \frac{5\pi}{2}$$

$$-\frac{5\pi}{2} \leq x + \frac{\pi}{2} \leq \frac{5\pi}{2}$$

$$\boxed{-3\pi \leq x \leq 2\pi}$$

4)  $\frac{5\pi}{2} - 5x + 10\pi k = x + \frac{\pi}{2}$

$$-18\pi \leq 6x = 2\pi + 10\pi k \leq 10\pi$$



AB || EF

$$\tan \alpha = \frac{x\sqrt{3}}{2x}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \alpha = 30^\circ$$

SCEF

$\Delta - \text{III}$   
погодики по  $\alpha$ ,  
моргон

$$AC = \sqrt{3x^2 + 9x^2} = x\sqrt{12} = 2x\sqrt{3}$$

$$BC = \sqrt{3x^2 + 4x^2} = 2x$$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = k^2$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$5 > 2 \quad - > 0 \quad 31$$

$$2 > 2$$

$$2(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3) \geq 41$$

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \geq 20,5$$

$$\text{нужно } \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \geq 21 - \min$$

$$\text{нужно } \beta_1 + \beta_2 = 10: \quad \beta_3 = 11$$

$$\beta_2 = 13 - \beta_3 = 2$$

$$\beta_1 = 18 - \beta_3 = 7$$

$$2(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3) \geq 10 + 13 + 30 = 53$$

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 28 - \min$$

$$\sin \alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\gamma_3 = 28 - 10 = 18$$

$$\gamma_2 = 28 - 30 = -2$$

$$\begin{cases} \alpha = \frac{\pi}{2} - x \\ \alpha = \pi - (\frac{\pi}{2} - x) \end{cases}$$

$$(\gamma_1 + \gamma_2)_{\min} = 30$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 14 \\ + 17 \\ \hline 31 \end{array}$$

$$\gamma_{\min} = 30 \quad \alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\begin{cases} \alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \\ \sin \alpha = \cos x, \\ 5\alpha = x + \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$-\frac{5\pi}{2} \leq 5\alpha \leq \frac{5\pi}{2}$$

$$-\frac{5\pi}{2} \leq x + \frac{\pi}{2} \leq \frac{5\pi}{2}$$

$$-\frac{5\pi}{2} \leq x + \frac{\pi}{2} \leq \frac{5\pi}{2}$$

$$-3\pi \leq x \leq 2\pi$$

$$x + \frac{\pi}{2}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

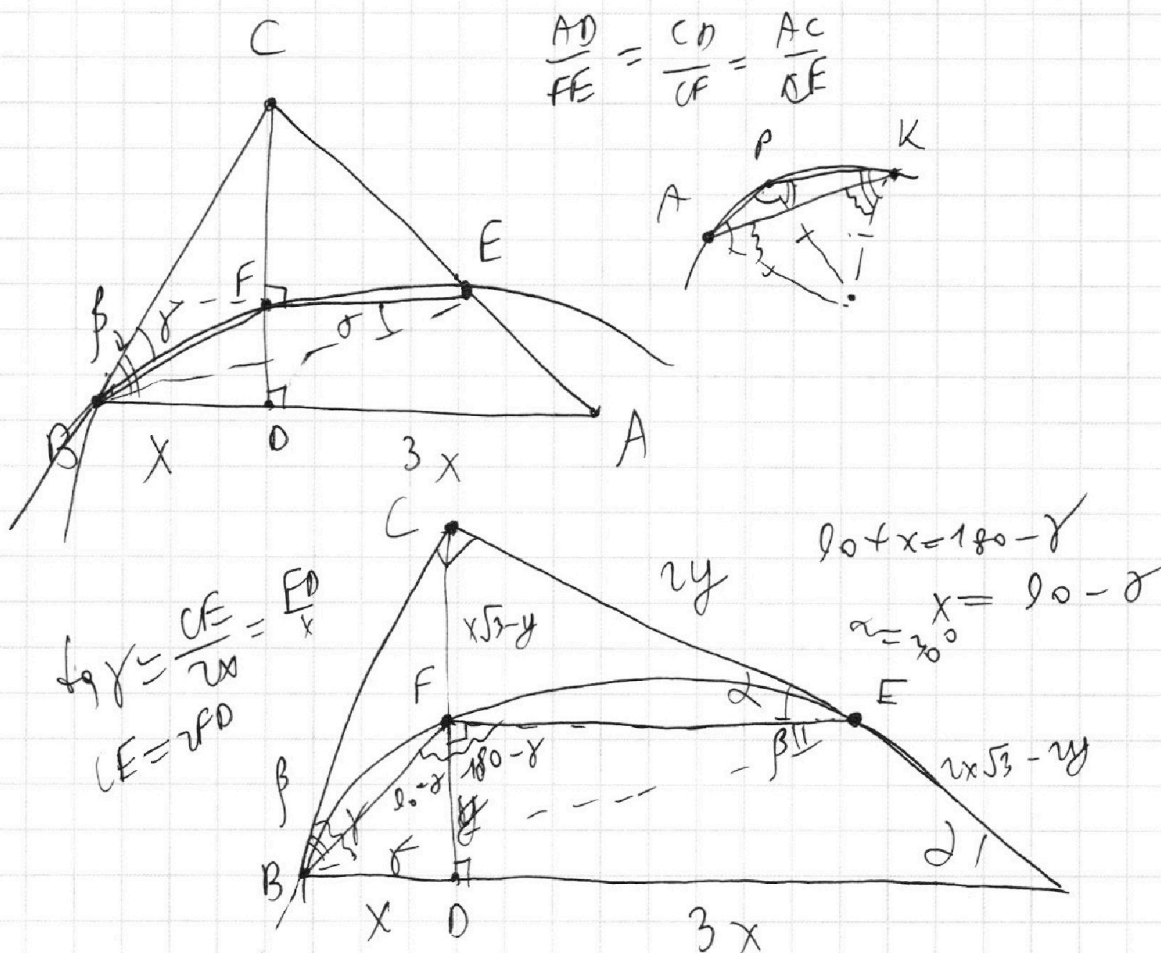
Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{AD}{FE} = \frac{CD}{CF} = \frac{AC}{CE}$$

$$\sin \gamma = \frac{CF}{CE} = \frac{FD}{x}$$

$$CE = 2FD$$

$$90 + x = 180 - \gamma$$

$$x = 90 - \sigma$$

$$\alpha = 30^\circ$$

$$\sin 30 = \frac{x\sqrt{3} - y}{2y} = \frac{1}{2}$$

$$x\sqrt{3} - y = y$$

$$x\sqrt{3} = 2y$$

ИЧ.

$$\begin{cases} ax + by - 3b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 11x + 32) = 0 \end{cases}$$

Найти a, при  
которых будет b,  
что уреш.