



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



$$\frac{13 \cdot 21 + 25}{2} \geq 30$$

$$\|a\| = 26$$

$$\|a\|_2 + \|b\|_2 \geq 6$$

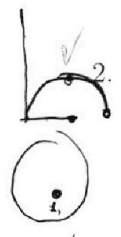
$$\|c\|_2 + \|b\|_2 \geq 14$$

$$\|a\|_2 + \|c\|_2 \geq 16$$

$$4 \cdot 2 \quad 2 \cdot 2$$

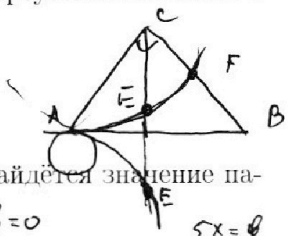
1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^6 3^{13} 5^{11}$ ,  $bc$  делится на  $2^{14} 3^{21} 5^{13}$ ,  $ac$  делится на  $2^{16} 3^{25} 5^{28}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .

$$abc \geq \text{НОК}(ab, bc, ac) = 2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{28}$$



2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник  $ABC$ . Окружность, касающаяся прямой  $AC$  в точке  $A$ , пересекает высоту  $CD$ , проведённую к гипотенузе, в точке  $E$ , а катет  $BC$  – в точке  $F$ . Известно, что  $AB \parallel EF$ ,  $AB : BD = 1,4$ . Найдите отношение площади треугольника  $ACD$  к площади треугольника  $CEF$ .

$$\frac{CE \cdot EF}{AD \cdot CD} \sin x = \cos \left( \frac{9\pi - 2x}{10} \right)$$



3. [4 балла] Решите уравнение  $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$ .

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система уравнений

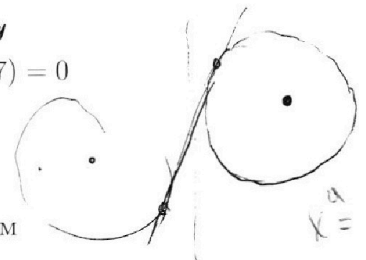
$$6a = 0 \quad 5x - b = 0$$

$$\log_x y = a$$

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

$$(x-1)^2 + y^2 = 1 \quad x^2 + (y+9)^2 = 4$$



5. [5 баллов] Некоторые числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют равенствам

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5, \quad \text{и} \quad \log_{11}^4 (0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,125y^3} (11^{-13}) - 5.$$

Найдите все возможные значения произведения  $xy$ .

$$\arccos(\sin x) = \left( \frac{3}{x} \right) =$$

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0;0)$ ,  $P(-15;90)$ ,  $Q(2;90)$  и  $R(17;0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$ .



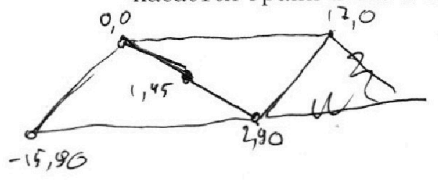
$$6(x_2 - x_1) + y_2 - y_1 = 48$$

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида  $SABC$ , медианы  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Сфера  $\Omega$  касается ребра  $AS$  в точке  $L$  и касается плоскости основания пирамиды в точке  $K$ , лежащей на отрезке  $AM$ . Сфера  $\Omega$  пересекает отрезок  $SM$  в точках  $P$  и  $Q$ . Известно, что  $SP = MQ$ , площадь треугольника  $ABC$  равна 180,  $SA = BC = 20$ .

а) Найдите произведение длин медиан  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$ .

$$x_2 - x_1 + \frac{y_2 - y_1}{2} = \sqrt{8}$$

б) Найдите двугранный угол при ребре  $BC$  пирамиды, если дополнительно известно, что  $\Omega$  касается грани  $BCS$  в точке  $N$ ,  $SN = 6$ , а радиус сферы  $\Omega$  равен 8.



$$\sin x = \cos \left( \frac{\pi}{2} - x \right)$$

$$\cos \left( x - \frac{\pi}{2} \right)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

н 1

~~abc~~  $\rightarrow$  ~~НОК (ab, bc, ac)~~, т.к.  $\begin{cases} abc : ab \\ abc : ac \\ abc : bc \end{cases}$

1) Обозначим за  $\|x\|_p$  степень включенная числа  $p$  в  $x$ .

2) тогда  $\begin{cases} ab : 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{11} \\ bc : 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{13} \\ ac : 2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{28} \end{cases} \Rightarrow abc^2 : 2^{22} \cdot 3^{36} \cdot 5^{52}$

тогда  ~~$abc : 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$~~   $abc : 3^{30}$  (т.к. иначе  $\|abc\|_3 \leq 29 \Rightarrow \|(abc)^2\|_3 \leq 58$ )

3)  $\|ab\|_5 = \|a\|_5 + \|b\|_5 \geq 11$   
 $\|ac\|_5 = \|a\|_5 + \|c\|_5 \geq 28$   
 $\|bc\|_5 = \|b\|_5 + \|c\|_5 \geq 13$

тогда  $\|abc\|_5 \geq \|ac\|_5 = 28$

$$\|abc\|_5 \geq 28$$

4)  $\|abc\|_2 = \frac{\|a^2 b^2 c^2\|_2}{2} = \frac{\|ab\|_2 + \|bc\|_2 + \|ac\|_2}{2} \geq$

$\geq \frac{6 + 14 + 16}{2} = 18$

тогда  $abc : 2^{18}$

5) но 2, 3, 4 пункта!  $\begin{cases} abc : 2^{18} \\ abc : 3^{30} \\ abc : 5^{28} \end{cases}$

тогда  $abc : 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28} \Rightarrow abc \geq 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$

(т.к.  $abc \neq 0$ )

**ПРИМЕР:**

$$a = 2^4 \cdot 3^9 \cdot 5^{11}$$

$$b = 2^2 \cdot 3^{21}$$

$$c = 2^{12} \cdot 3^{17} \cdot 5^{17}$$

**Ответ:**  $2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

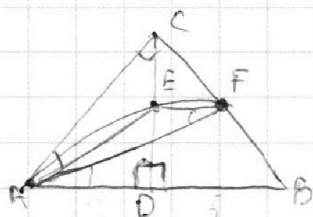
1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



с 2



1)  $\angle CAE = \angle EFA$  по теореме об углах между хордой и касательной

2)  $\angle EFA = \angle FAB$  как накрест лежащие при  $EF \parallel AB$

3)  $\triangle AED$  и  $\triangle ACF$

1)  $\angle EAD = \angle CAF$  по 2) и 1)

2)  $\angle ACF = \angle EDA = 90^\circ$

$\triangle AED \sim \triangle ACF$  по двум углам

тогда  $\frac{AC}{AD} = \frac{CF}{DE}$

4)  $\triangle CFE$  и  $\triangle CBD$

1)  $\angle CFE = \angle CBD$  как соответственные

2)  $\angle CEF = \angle CBD$  как соответственные

при  $EF \parallel BD$

тогда  $\triangle CFE \sim \triangle CBD$  по двум углам

тогда  $\frac{CE}{CD} = \frac{EF}{BD} = \frac{CF}{CB} = k \Rightarrow \frac{DE}{CD} = 1 - k$

$$\frac{CE}{ED} = \frac{CF}{FB}$$

5) по свойствам相似形:  $\frac{CE^2}{CB^2} = \frac{AD}{BD} = \frac{2}{5}$

6)  $\frac{AC}{BC} = \frac{DE}{AD} = \frac{CF}{BC} = k$  по 4) и 3)

$$\frac{AC}{BC} \cdot \frac{CD}{AD} = \frac{1}{1-k} \cdot (1-k) = k \text{ по 5)}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{AC}{BC} \cdot \frac{CD}{AD} = k \cdot (1-k)$$
$$\sqrt{\frac{2}{5}} \cdot \frac{CD}{AD} = k \cdot (1-k) \text{ по 5}$$

7) по свойству высоты медиан. треугольника:

$$CD = \sqrt{AD \cdot BD}$$

$$\frac{CD}{AD} = \frac{\sqrt{AD \cdot BD}}{AD} = \sqrt{\frac{BD}{AD}} = \sqrt{\frac{5}{2}}$$

8)  ~~$k(1-k) = 1$~~   ~~$k^2 + 1 - k = 0$~~   ~~$\frac{5}{\sqrt{k}} = 1$~~   ~~$k = \frac{1}{2}$~~

9) тогда  $\frac{CE}{CD} = \frac{EF}{BD} = k = \frac{1}{2}$

$$S_{CEF} = \frac{1}{4} S_{CBD}$$

10)  $\frac{S_{ACD}}{S_{CBD}} = \frac{AD}{BD} = \frac{2}{5}$

$$S_{CEF} = \frac{1}{4} S_{CBD} = \left( \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{2} S_{ACD} \right) = \frac{5}{8} S_{ACD}$$

8)  $\frac{k}{k+1} = \sqrt{\frac{2}{5}} \cdot \sqrt{\frac{5}{2}} = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{2}$

9)  $\frac{S_{ACD}}{S_{CEF}} = \frac{\frac{1}{2} AD \cdot CD}{\frac{1}{2} \cdot CE \cdot EF} = \frac{AD}{EF} \cdot \frac{CD}{CE} = \frac{AD}{BD} \cdot \frac{BD}{FE} = \frac{1}{k} =$

$$= \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{k^2} = \frac{8}{5}$$

Ответ:  $\frac{8}{5}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



~ 3

$$10 \quad \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$$

$$\sin x = \cos\left(\frac{9\pi - 2x}{10}\right)$$

$$\sin x = \cos\left(\frac{9\pi}{10}\right) \cdot \cos\left(\frac{x}{5}\right) + \sin\left(\frac{9\pi}{10}\right) \cdot \sin\left(\frac{x}{5}\right)$$

$$(*) \sin 5y = \sin 2y \cdot \cos 3y + \cos 2y \cdot \sin 3y =$$

$$= 2 \cos y \cdot \sin y \cdot (4 \cos^2 y - 3 \cos y) + (\cos^2 y - \sin^2 y)(3 \sin y - 4 \sin^3 y)$$

$$= \sin y (2 \cos^2 y (4 \cos^2 y - 3) + (2 \cos^2 y - 1)(3 - 4 \sin^2 y)) =$$

$$= \sin y (2(1 - \sin^2 y)(4 - 4 \sin^2 y - 3) + (1 - 2 \sin^2 y)(3 - 4 \sin^2 y)) =$$

$$= \sin y (2(1 - \sin^2 y)(1 - 4 \sin^2 y) + (1 - 2 \sin^2 y)(3 - 4 \sin^2 y)) =$$

$$= \sin y (2 - 10 \sin^2 y + 8 \sin^4 y + 3 - 10 \sin^2 y + 8 \sin^4 y) =$$

$$= \sin y (8 \sin^4 y - 20 \sin^2 y + 5)$$

$$\sin x \text{ и } \cos y \quad \frac{9\pi - 2x}{10} = y \Rightarrow \sin x = \cos y$$

$$\Rightarrow \text{так как } \sin^2 x = \cos^2 y \Rightarrow 1 - \cos^2 x = 1 - \sin^2 y \Rightarrow \cos x = \pm \sin y$$

$$\sin x \cdot \sin y = \cos x (\pm \cos y)$$

$$\sin x \cdot \sin y \mp \cos x \cdot \cos y = 0$$

$$\cos(x \pm y) = 0$$

$$x \pm y = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$x \pm \frac{9\pi - 2x}{10} = \frac{\pi}{2} + \pi k$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$\approx 3$  (проверка)

$$\begin{cases} x + \frac{9\pi - 2x}{10} = \frac{\pi}{2} + \pi k & (1) \\ x - \frac{9\pi - 2x}{10} = \frac{\pi}{2} + \pi k & (2) \end{cases}$$

~~(1)  $x - \frac{x}{5} = \frac{\pi}{2} - \frac{9\pi}{10} + \pi k = -\frac{4\pi}{10} + \pi k = -\frac{2\pi}{5} + \pi k$~~   
~~(2)  $x + \frac{x}{5} = \frac{9\pi}{10} + \frac{\pi}{2} + \pi k = \frac{14\pi}{10} + \pi k = \frac{7\pi}{5} + \pi k$~~

(1)  $x - \frac{x}{5} = \frac{\pi}{2} - \frac{9\pi}{10} + \pi k = -\frac{4\pi}{10} + \pi k = -\frac{2\pi}{5} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$

(2)  $x + \frac{x}{5} = \frac{9\pi}{10} + \frac{\pi}{2} + \pi k = \frac{14\pi}{10} + \pi k = \frac{7\pi}{5} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{cases} \frac{4}{5}x = \frac{3\pi}{5} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ \frac{6}{5}x = \frac{2\pi}{5} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{4}{5}x = \frac{3\pi}{5} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ \frac{6}{5}x = \frac{2\pi}{5} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$x = \frac{3}{4}\pi + \frac{5}{4}\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{3} + \frac{5}{6}\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Ответ

проверка:

~~$\sin\left(\frac{3}{4}\pi + \frac{5}{4}\pi n\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{5\pi}{4}n\right)$~~

проверка:

~~$\sin\left(\frac{3}{4}\pi + \frac{5}{4}\pi n\right) = \cos\left(\frac{9\pi - \frac{3}{2}\pi - \frac{5}{2}\pi n}{10}\right)$~~

~~$\sin\left(\frac{3}{4}\pi + \frac{5}{4}\pi n\right) = \cos\left(\frac{3}{4}\pi - \frac{1}{4}\pi n\right)$~~

~~$\sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{5\pi}{6}n\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{5\pi}{6}n\right)$~~

Ответ:  $\frac{3}{4}\pi + \frac{5}{4}\pi n, n \in \mathbb{Z}$

$\frac{\pi}{3} + \frac{5}{6}\pi n, n \in \mathbb{Z}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0 & \textcircled{2} \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 12y + 7z) = 0 & \textcircled{1} \end{cases}$$

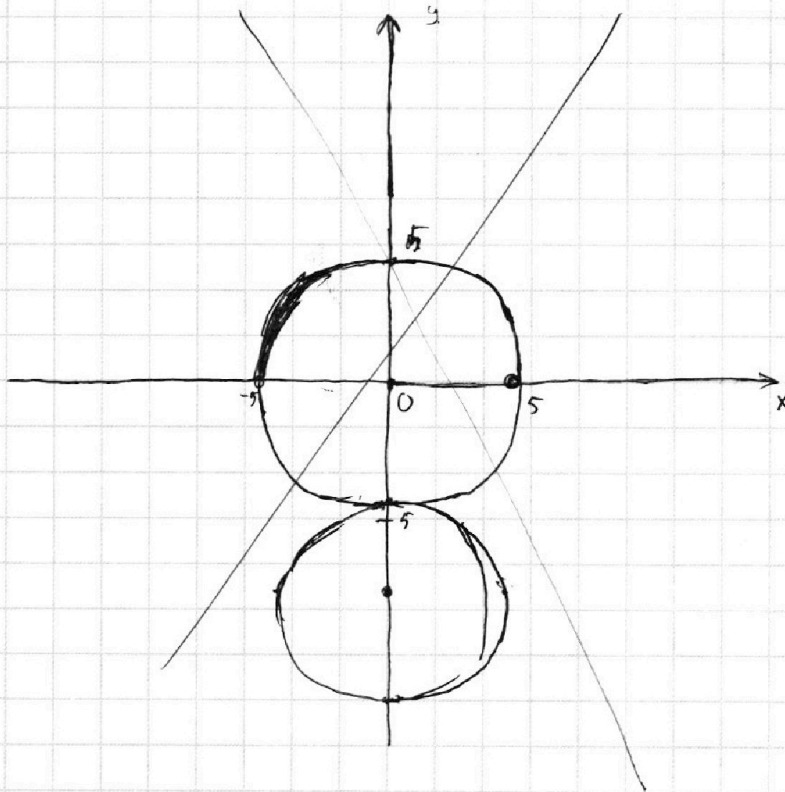
$$\textcircled{1} \begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x^2 + (y+6)^2 = 4 \end{cases}$$

$$\textcircled{2} \quad 6ay = -5x + b$$

$$\begin{cases} a=0 \\ 5x=b \\ y = \frac{5}{6a}x + \frac{b}{6a} \end{cases}$$

$$x = -\frac{6}{5}a \cdot y + \frac{b}{5}$$

Решим систему графически:  $\mathbb{R}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

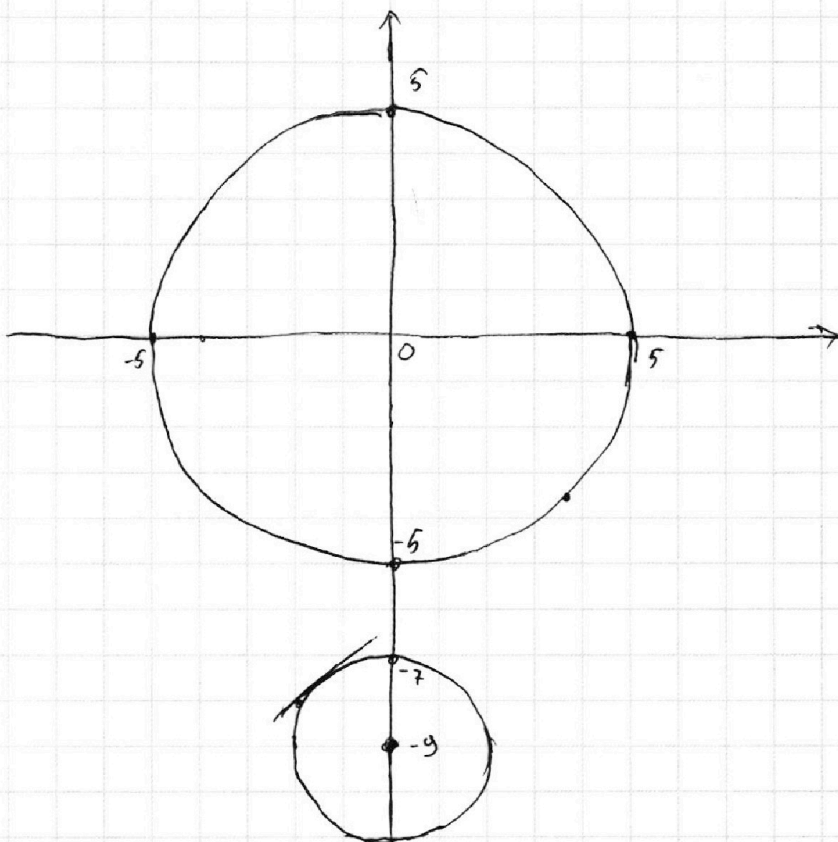
1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№ 4 (продолжение)



при  $a=0$ : ~~тогда~~  $b=5$  даёт 4 решения.

при  $a \neq 0$ : заменим  $-\frac{5a}{a}$  макс,  $\frac{b}{a}$  на  $n$ .

тогда  $x^2 - 25 = kx + n$  имеет 2 решения

$$y^2 - 25 = (ky + n)^2 \text{ имеет 2 решения}$$

$$(y+9)^2 - 4 = (ky+n)^2 \text{ имеет 2 решения}$$

$$y^2(k^2+1) + 2nk \cdot y + n^2 + 25 = 0 \text{ - имеет 2 решения}$$

$$y^2(k^2-1) + (2nk-18)y + n^2 + 77 = 0 \text{ имеет 2 решения}$$

$$D_1 = n^2 k^2 - (n^2 + 25) \cdot (k^2 - 1) > 0$$

$$D_2 = (n^2 k^2 - 9)^2 - (n^2 + 77)(k^2 - 1) > 0$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



14 (продолжение)

$$\frac{b}{a} = a^2 - 25k^2 + 25 > 0$$

$$\frac{b}{a^2} = 18k + 81 - 77k^2 + 77k^2 + 77k^2 > 0$$

$$\frac{b^2}{25} - 25 \cdot \frac{36a^2}{25} + 25 > 0$$

$$18 \cdot \frac{6ab}{25} - 77 \cdot \frac{6a^2}{25} + \frac{b^2}{25} > 0$$

$$\begin{cases} b^2 - 25 \cdot 36a^2 + 25 > 0 & (1) \\ -18 \cdot 6ab - 77 \cdot 6a^2 + b^2 > 0 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} b^2 - 25 \cdot 36a^2 + 25 > 0 \\ -6 \cdot 18a^2 + 18ab + 81 \\ -6 \cdot (18a^2 + 18ab + 81) + b^2 + 6 \cdot 4a^2 > 0 \\ b^2 > 25(36a^2 - 1) \\ 7b^2 + 24a^2 > 6 \cdot (9a + b)^2 \end{cases}$$

(1) раскрыли (2) неравенство  
уравнение как уравнение

$$F(a) > 0.$$

$$-77 \cdot 6a^2 - 18 \cdot 6b \cdot a + b^2 > 0$$

$$D = (6 \cdot 18)^2 + 4 \cdot 6 \cdot 77b^2 = 6 \cdot 9^2 \cdot b^2 + 4 \cdot 6 \cdot 77b^2 =$$

$$= (b \cdot \sqrt{6 \cdot 4 \cdot 77 + 6 \cdot 9^2})^2 = (b \cdot \sqrt{3764})^2$$

$$- \frac{(54 - \sqrt{3764})b}{77 \cdot 6} < a < - \frac{\sqrt{3764}b + 9 \cdot 6 \cdot b}{77 \cdot 6} \quad \text{при } b \leq 0$$

$$- \frac{(54 + \sqrt{3764})b}{77 \cdot 6} < a < - \frac{(54 - \sqrt{3764})b}{77 \cdot 6} \quad \text{при } b > 0$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Рассмотрим как неравенство от  $b$

$$b^2 + 25 \geq 25 \cdot 36 a^2$$

$$\begin{cases} \sqrt{b^2 + 25} \leq +a, & a < 0 \\ \sqrt{b^2 + 25} \geq a, & a > 0 \end{cases}$$

Рассмотрим как неравенство от  $b$

$$b^2 - 18 \cdot 6 \cdot a \cdot b - 77 \cdot 6 a^2 \geq 0$$

$$\frac{b}{a} = (6 \cdot 9)^2 a^2 + 77 \cdot 6 a^2 = 6 a^2 (54 + 77) \neq$$

$$\text{при } a < 0: \quad 54a - \sqrt{6 \cdot 131} |a| < b < 54a + \sqrt{6 \cdot 131} |a|$$

$$\text{при } a > 0: \quad \begin{cases} \sqrt{b^2 + 25} \geq a \cdot 30 & \Leftrightarrow b \geq \sqrt{900a^2 - 25} \\ \sqrt{b^2 + 25} \geq a \cdot 30 & \Rightarrow b \geq 54a - \sqrt{6 \cdot 131} \cdot a \\ 54a + \sqrt{6 \cdot 131} \cdot a \geq b \end{cases}$$

Все решения на  $b$ , есть

$$\begin{aligned} 54a + \sqrt{6 \cdot 131} a &> \sqrt{900a^2 - 25} \\ a^2 (54 + 6\sqrt{6 \cdot 131})^2 &> 900a^2 - 25 \end{aligned}$$

что всегда выполняется

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

если  $a < 0$ :

$$\begin{cases} b^2 + 25 < 30 a^2 \\ -54|a| - \sqrt{6 \cdot 131} |a| < b < -54|a| + \sqrt{6 \cdot 131} |a| \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b^2 + 25 < 30 a^2 \\ -54|a| - \sqrt{6 \cdot 131} |a| < b \\ b > \sqrt{6 \cdot 131} |a| + 54|a| \end{cases}$$

$$b^2 = 30 a^2$$

$$\left( \sqrt{6 \cdot 131} |a| + 54|a| \right)^2 < 30 a^2$$

мет решение

ответ: при  $a > 0$ .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_x 3 \frac{1}{121} - 5 & (1) \\ \log_{11}^4 \left(\frac{1}{2}y\right) + \log_{\frac{1}{2}y} 11 = \log_{\left(\frac{1}{2}y\right)^3} 11^{-13} - 5 & (2) \end{cases}$$

~~$$(1) \log_{11}^4 x + \frac{6}{\log_{11} x} = \frac{1}{3} \log_x \left(\frac{1}{121}\right) - 5$$

$$\log_{11}^4 \left(\frac{1}{2}y\right) + \frac{1}{\log_{\frac{1}{2}y} 11} = \frac{1}{3} \log_{\left(\frac{1}{2}y\right)^3} 11^{-13} - 5$$~~

~~$$\log_{11}^4 x + \frac{6}{\log_{11} x} = \frac{2}{3} \log_{11}^{-1}(x) - 5$$~~

~~$$\frac{\log_{11}^5 x + \left(6 + \frac{2}{3}\right)}{\log_{11}(x)} = -5$$~~

~~$$\log_{11}^5 x + \frac{20}{3} + 5 \log_{11}(x) = 0$$~~

~~$$(2) \log_{11}^4 \left(\frac{1}{2}y\right) + \frac{1}{\log_{\frac{1}{2}y} 11} = \log_{\frac{1}{2}y} - 13$$~~

~~$$(1) \log_{11}^4 x - 6 \frac{1}{\log_{11}(x)} = -\frac{2}{3} \log_{11}^{-1}(x) - 5$$~~

~~$$(2) \log_{11}^4 \left(\frac{1}{2}y\right) + \frac{1}{\log_{11}\left(\frac{1}{2}y\right)} = -\frac{13}{3} \log_{11}\left(\frac{1}{2}y\right) - 5$$~~

Тогда: 
$$\begin{cases} \log_{11}^5 x + 5 \log_{11} x = 5 + \frac{1}{3} = \frac{16}{3} \\ \log_{11}^5 \left(\frac{1}{2}y\right) + 5 \log_{11} \left(\frac{1}{2}y\right) = -\frac{16}{3} \end{cases}$$

тогда 
$$\log_{11}^5 x + \log_{11}^5 \left(\frac{1}{2}y\right) + 5 \left(\log_{11} \left(\frac{1}{2}xy\right)\right) = 0$$

$$\left(\log_{11}^4 x + \log_{11}^4 \left(\frac{1}{2}y\right)\right) \cdot \left(\log_{11}^3(x) - \log_{11}^3\left(\frac{1}{2}y\right)\right) + \log_{11}^2(x) \cdot \log_{11}^2\left(\frac{1}{2}y\right) - \log_{11}^2(x) \cdot \log_{11}^3\left(\frac{1}{2}y\right) + \log_{11}^4\left(\frac{1}{2}y\right) + 5 = 0$$

$$\log_{11}\left(\frac{1}{2}xy\right) \cdot \left(\log_{11}^4 x \log_{11}^4 \left(\frac{1}{2}y\right) \log_{11}^2(x) \cdot \log_{11}^2\left(\frac{1}{2}y\right) - \log_{11}(x) \cdot \log_{11}\left(\frac{1}{2}y\right) (\log_{11}^2 x + \log_{11}^2 y) + 5\right) = 0$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

и 5 (продолжение)

тогда:

$$\log_{11} \left( \frac{1}{2}xy \right) = 0 \quad (2)$$

$$\left[ \log_{11}^4(x) + \log_{11}^4\left(\frac{1}{2}y\right) + \log_{11}^2(x) \cdot \log_{11}^2\left(\frac{1}{2}y\right) - \log_{11}(x) \cdot \log_{11}\left(\frac{1}{2}y\right) \right] \cdot \log_{11}^2(x) + \log_{11}^2(x) \cdot \log_{11}^2\left(\frac{1}{2}y\right) + 5 = 0 \quad (1)$$

$$\textcircled{1} \quad \log_{11}^3 x \left( \log_{11}(x) - \log_{11}\left(\frac{1}{2}y\right) \right) + \log_{11}^3\left(\frac{1}{2}y\right) \left( \log_{11}\left(\frac{1}{2}y\right) - \log_{11}(x) \right) + 5 \cdot \log_{11}^2 x \cdot \log_{11}^2\left(\frac{1}{2}y\right) = 0$$

$$\left( \log_{11}^3 x - \log_{11}^3\left(\frac{1}{2}y\right) \right) \left( \log_{11}(x) - \log_{11}\left(\frac{1}{2}y\right) \right) + \log_{11}^2\left(\frac{1}{2}y\right) \log_{11}^2 x + 5 = 0$$

$$\left( \log_{11}(x) - \log_{11}\left(\frac{1}{2}y\right) \right)^2 \left( \log_{11}^2(x) + \log_{11}(x) \cdot \log_{11}y + \log_{11}^2 y \right) + 5 + \log_{11}^2 x \cdot \log_{11}^2 y = 0$$

$$5 > 0, \quad \log_{11}^2 x \cdot \log_{11}^2\left(\frac{1}{2}y\right) \geq 0; \quad \log_{11}^2(x) + \log_{11}(x) \cdot \log_{11}\left(\frac{1}{2}y\right) + \log_{11}^2\left(\frac{1}{2}y\right) > 0 \text{ как маленький квадрат, } \left( \log_{11}(x) - \log_{11}\left(\frac{1}{2}y\right) \right)^2 > 0$$

тогда это уравнение не имеет решений

$$\textcircled{2} \quad \log_{11} \left( \frac{1}{2}xy \right) = 0$$

$$\frac{1}{2}xy = 1$$

$$xy = 2$$

Ответ: 2

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

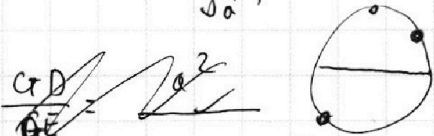
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

**ЧЕРНОВИК**

$x = \frac{\pi}{2} - y$        $x =$

$\frac{CE}{CD} = \frac{x}{\frac{\theta^2}{\sqrt{a^2+b^2}}} \Rightarrow \frac{ED}{CD} = \frac{\theta^2 - x\sqrt{a^2+b^2}}{\theta^2}$



$\frac{GE}{GD} = \frac{x\sqrt{a^2+b^2}}{a^2} \Rightarrow \frac{GD}{EG} = \frac{a^2}{x\sqrt{a^2+b^2}} \Rightarrow \frac{DE}{GE} = \frac{a^2 + x\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$\frac{GE}{CD} = \frac{x\sqrt{a^2+b^2} \cdot \theta^2 - x^2(a^2+b^2)}{\theta^2 \cdot (a^2 + \theta^2 \cdot x \cdot \sqrt{a^2+b^2})} \stackrel{?}{=} \frac{a^4}{(a^2+\theta^2) \left( \frac{a^2}{a^2+b^2} + a^2 \right)}$

$\frac{GD}{GC} = \frac{AD^2}{CA^2} \Rightarrow \frac{GD}{CD} = \frac{AD^2}{AD^2+AC^2}$

$\sin 3x = -\sin x \cdot \cos 2x + \cos x \cdot \sin 2x = -\sin^3 x + \cos^2 x \cdot \sin x + 2\cos^2 x \cdot \sin x$

$\arccos(\sin x)$

$x = \frac{\pi}{2} - y + 2\pi k$        $\arccos(\cos x) = x$

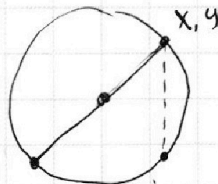
$x = x - \frac{\pi}{2} + 2\pi k$        $3 \cos x - 4 \cos^3 x \sin x = \cos y$

$\pi - x =$        $x = \frac{\pi}{2} - y + 2\pi k$

$x = y + \frac{\pi}{2} + 2\pi k$

$\pi - x = \frac{\pi}{2} - y + 2\pi k$

$\pi - x = y + \frac{\pi}{2}$



$\sin^2 x$

$\cos x \cdot \cos 2x - \sin x \cdot \sin 2x = \cos^3 x - \cos x \cdot \sin^2 x - 2\cos^2 x \cdot \sin^2 x = \cos^3 x - 3\cos x(1 - \cos^2 x) = 4\cos^3 x - 3\cos x$

$\sin^5 x = \sin 2x \cdot \cos 3x + \sin 3x \cdot \cos 2x$

$2 \cos x \cdot \sin x = (4\cos^3 x - 3\cos x)$

$\cos \frac{x}{5}$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

