



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $2^9 3^{10} 5^{10}$, bc делится на $2^{14} 3^{13} 5^{13}$, ac делится на $2^{19} 3^{18} 5^{30}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой BC в точке B , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке F , а катет AC – в точке E . Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 3 : 1$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF .

3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} (3^{11}) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-14; 42)$, $Q(6; 42)$ и $R(20; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 90, $SA = BC = 12$.

а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .

б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$a, b, c \in \mathbb{N} \quad ab: 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10} \quad bc: 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13} \quad ac: 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30}$$

Заметим, что наличие в числах a, b, c простых делителей помимо $2; 3; 5$ лишь увеличит их произведение, не повлияв на данные в условии делимости, т.к. любые простые делители помимо $2; 3; 5$ взаимно просты с числами вида $2^n \cdot 3^k \cdot 5^m$, где $n, m, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Тогда пусть $a = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\alpha_2} \cdot 5^{\alpha_3}$, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$b = 2^{\beta_1} \cdot 3^{\beta_2} \cdot 5^{\beta_3}$, $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$c = 2^{\gamma_1} \cdot 3^{\gamma_2} \cdot 5^{\gamma_3}$, $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

Из данных в условии делимости получаем

1)
$$\begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 \geq 9 \\ \alpha_1 + \gamma_1 \geq 19 \\ \beta_1 + \gamma_1 \geq 14 \end{cases}$$

Отсюда $\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 \geq 21$ причем рав-во и выполнение неравенств системы достигается при $\alpha_1 = 7; \beta_1 = 2; \gamma_1 = 12$

2)
$$\begin{cases} \alpha_2 + \beta_2 \geq 10 \\ \beta_2 + \gamma_2 \geq 13 \\ \alpha_2 + \gamma_2 \geq 18 \end{cases}$$

Отсюда $\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 \geq \frac{41}{2}$ в силу принадлежности α_2, β_2 и γ_2 целым числам $\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 \geq 21$, причем рав-во и выполнение неравенств системы достигается при $\alpha_2 = 8; \beta_2 = 2; \gamma_2 = 11$

3)
$$\begin{cases} \alpha_3 + \beta_3 \geq 10 \\ \beta_3 + \gamma_3 \geq 13 \\ \alpha_3 + \gamma_3 \geq 30 \end{cases}$$

Отсюда и т.к. $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3 \geq 0$ $\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3 \geq \alpha_3 + \gamma_3 \geq 30$, причем рав-во и выполнение неравенств системы достигается при $\alpha_3 = 15; \beta_3 = 0; \gamma_3 = 15$.

Таким образом мы минимизировали суммы $\alpha_i + \beta_i + \gamma_i$

$$abc = 2^{\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1} \cdot 3^{\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2} \cdot 5^{\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3} \geq 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$$

причем рав-во достигается при указанных ранее $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$

ответ: $2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

мет 2

14) $OB^2 = y_0^2 = R^2 - (\text{радиус окружности} - R)$

$OF^2 = (\sqrt{3}x_1 - 2x)^2 + (x_1 - y_0)^2 = y_0^2$ т.к. принадлежит одной окружности.

$OE^2 = 4x^2 + (4x_1 - y_0)^2 = y_0^2$

$\begin{cases} 3x_1^2 - 4\sqrt{3}x_1x + 4x^2 + x_1^2 - 2x_1y_0 + y_0^2 = y_0^2 \\ 4x^2 + 16x_1^2 - 8x_1y_0 + y_0^2 = y_0^2 \end{cases}$

$\begin{cases} 4x_1^2 - 2x_1y_0 - 4\sqrt{3}x_1x + 4x^2 = 0 \\ 16x_1^2 - 8x_1y_0 + 4x^2 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} 4x_1^2 - 2x_1y_0 - 4\sqrt{3}x_1x + 4x^2 = 0 \\ 16x_1^2 - 8x_1y_0 + 4x^2 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} 16x_1^2 - 8x_1y_0 + 4x^2 = 0 \\ -16x_1^2 + 8x_1y_0 + 16\sqrt{3}x_1x - 16x^2 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} 16x_1^2 - 8x_1y_0 + 4x^2 = 0 \\ 16x_1^2 - 8x_1y_0 + 4x^2 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} 16x_1^2 - 8x_1y_0 + 4x^2 = 0 \\ 16x_1^2 - 8x_1y_0 + 4x^2 = 0 \end{cases}$

Выйдем из системы против рав-ва

$16\sqrt{3}x_1x = 12x^2$

$x_1 = \frac{12}{16\sqrt{3}}x$

$x_1 = \frac{3}{4\sqrt{3}}x \quad x_1 = \frac{\sqrt{3}}{4}x$

Отсюда $E(0; \sqrt{3}x)$, значит, $EC = \sqrt{3}x$.

15) $\begin{matrix} EF \parallel AB \\ CD \perp AB \\ F \in CD \end{matrix} \Rightarrow CF \perp EF$

16) $EF \parallel AB \Rightarrow \angle CAB = \angle CEF$ как соответственные при секущей AC.

17) $\begin{cases} \angle CAB = \angle CEF \\ \angle CFE = \angle ACB = 90^\circ \end{cases} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle ECF$ по 2 углам.

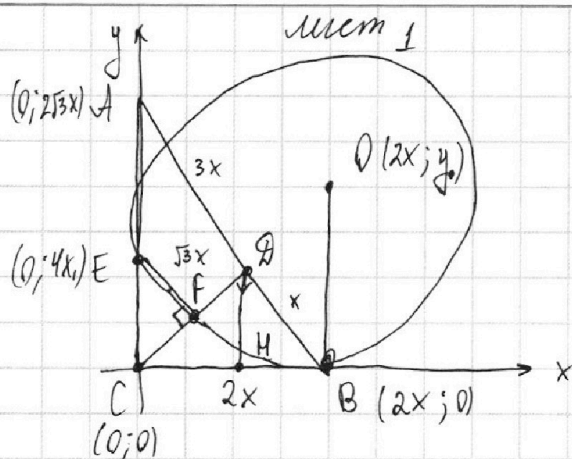
18) $k = \frac{AB}{EC} = \frac{4x}{\sqrt{3}x} = \frac{4}{\sqrt{3}}$ коэффициент подобия.

18) $\frac{S(\triangle ABC)}{S(\triangle CEF)} = k^2 = \frac{16}{3}$

Ответ: $\frac{16}{3}$.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Пусть $AD = 3x$ $BD = x$

1) Введем ПСК

$C(0; 0)$ $Ox \uparrow CB$
 $Oy \uparrow CA$

2) Д.п. O - центр окружности
из условия.

3) По св-ву прямоуг. тр-ка. $\triangle ABC$

$BC = \sqrt{AB \cdot BB'} = 2x$

$AC = \sqrt{AB \cdot AA'} = 2\sqrt{3}x$

4) Отсюда $A(0; 2\sqrt{3}x)$ $B(2x; 0)$

5) $AB \perp BC$ по св-ву касательной
Пусть $O(2x; y_0)$

6) $\vec{AB} = \{2x; -2\sqrt{3}x\}$

7) По св-ву $CH = \frac{BC \cdot AC}{AB} = \frac{2x \cdot 2\sqrt{3}x}{4x} = \sqrt{3}x$

8) Д.п. $OH \perp CB$. $OH = \frac{CO \cdot OB}{BC} = \frac{x \cdot \sqrt{3}x}{2x} = \frac{\sqrt{3}}{2}x$

9) По Т Пифагора из $\triangle CHH'$: $CH = \sqrt{3x^2 - \frac{3}{4}x^2} = \frac{3}{2}x$

10) Значит; $O(\frac{3}{2}x; \frac{\sqrt{3}}{2}x)$

11) $\vec{CF} \parallel \vec{CO}$
 $C(0; 0)$ $\Rightarrow F(\sqrt{3}x_1; x_1)$
 $O(\frac{3}{2}x; \frac{\sqrt{3}}{2}x)$

12) $E(0; y_2)$

13) $\vec{EF} = \{\sqrt{3}x_1; x_1 - y_2\}$
 $\vec{EF} \parallel \vec{AB}$, т.к. $EF \parallel AB$
 $AB = \{2x; -2\sqrt{3}x\}$
 $\Rightarrow \frac{\sqrt{3}x_1}{2x} = \frac{x_1 - y_2}{-2\sqrt{3}x}$
 $-3x_1 = x_1 - y_2$
 $y_2 = 4x_1$

Значит, $\vec{EF} = \{\sqrt{3}x_1; -3x_1\}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2} \quad \sqrt{3}$$

$$\arcsin(\cos x) + \arccos(\cos x) = \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{5\pi}{2} - 5 \arccos(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$\arcsin(\cos x) = \frac{\pi}{2} - \arccos(\cos x)$$

$$5 \arccos(\cos x) + x = 2\pi$$

Заметим, что $5 \arccos(\cos x) \geq 0$, значит, $x \leq 2\pi$

$5 \arccos(\cos x) \leq 5\pi$, значит, $x \geq -3\pi$

1) $x \in [-3\pi; -2\pi]$ тогда $\arccos(\cos x) = -x - 2\pi$

$$-5x - 10\pi + x = 2\pi$$

$$-4x = 12\pi$$

$$x = -3\pi$$

$$-3\pi \in [-3\pi; -2\pi]$$

2) $x \in (-2\pi; -\pi]$ тогда $\arccos(\cos x) = -x - \pi$

$$-5x - 5\pi + x = 2\pi$$

$$-4x = 7\pi$$

$$x = -\frac{7}{4}\pi$$

$$-\frac{7}{4}\pi \in (-2\pi; -\pi]$$

3) $x \in (-\pi; 0]$ тогда $\arccos(\cos x) = -x$

$$-4x = 2\pi$$

$$x = -\frac{\pi}{2}$$

$$-\frac{\pi}{2} \in (-\pi; 0]$$

4) $x \in (0; \pi]$ тогда $\arccos(\cos x) = x$

$$6x = 2\pi$$

$$x = \frac{\pi}{3}$$

$$\frac{\pi}{3} \in (0; \pi]$$

5) $x \in (\pi; 2\pi]$ тогда $\arccos(\cos x) = x - \pi$

$$5x - 5\pi + x = 2\pi$$

$$x = \frac{7\pi}{6}$$

$$\frac{7\pi}{6} \in (\pi; 2\pi]$$

6) Как было замечено ранее при $x > 2\pi$ $5 \arccos(\cos x) + x > 2\pi$ ~~решений нет~~

при $x < -3\pi$ $5 \arccos(\cos x) + x < 2\pi$

Значит, при $x \in (-\infty; -3\pi) \cup (2\pi; +\infty)$ ур-е не имеет решений.

Ответ: $-3\pi; -\frac{7\pi}{4}; -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{3}; \frac{7\pi}{6}$.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

мест, 2

Заметим, что, если угловой коэффициент прямой, задаваемой ур-ем (2) будет больше $\frac{5}{\sqrt{11}}$ или меньше $-\frac{5}{\sqrt{11}}$, то пересечение будет не более чем с одной окружностью, а значит, точек пересечения может быть не более 2, т.е. этот случай нам не подходит из геометрических соображений.

Из геометрических же соображений получаем, что при $-\frac{5}{\sqrt{11}} < -\frac{a}{2} < \frac{5}{\sqrt{11}} \quad \exists b$: прямая $y = -\frac{a}{2}x + b$ является (в совокупности)

общей секущей 2 окружностей и имеет с ними ~~2 точки~~ ровно 4 точки пересечения, что нам и требуется.

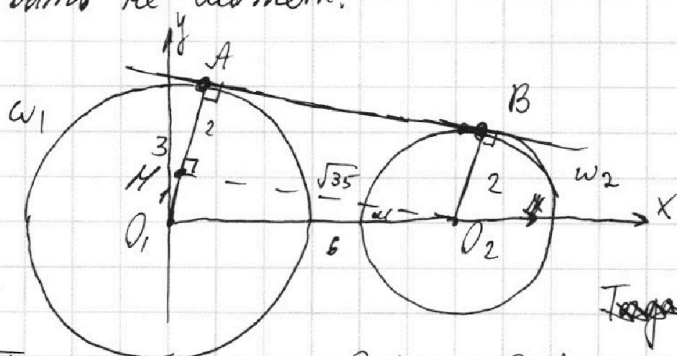
T. e.

$$\frac{5}{\sqrt{11}} > \frac{a}{2} > -\frac{5}{\sqrt{11}}$$

$$-\frac{10}{\sqrt{11}} < a < \frac{10}{\sqrt{11}}, \text{ эти значения нам подходят.}$$

При $a = \pm \frac{10}{\sqrt{11}}$ прямая $y = -\frac{a}{2}x + b$ будет в зависимости от b может быть секущей одной окружности или общей касательной двух окружностей, значит эти значения нам не подходят.

Заметим также, что в силу того, что у 2 непересекающихся окружностей существует всего 2 общих внутренних касательных, значит, других общих внутренних касательных помимо l_1 и l_2 быть не может.



Рассмотрим окружности ω_1 и ω_2 с центрами O_1 и O_2 и радиусами 3 и 2 соответственно.

Пусть A_0 - биссектриса внешняя
касательная. и $\vec{O}_1 \vec{O}_2 \parallel O_x$

Пусть $Q_1, Q_2 = 6$.

Тогда построим $O_2 M \perp O_1 A$. $O_2 M$ ~~будет пер~~ $\parallel AB$, т.к. $AB \perp O_1 A$ по св-ву касательной. $M_1 A \parallel O_2 B$, т.к. $M_1 A \perp AB$ по св-ву касательной $O_2 B \perp AB$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



лист 3

Тогда ABO_2M_1 - параллелограмм по определению, и значит,

$$M_1O_2 \parallel AB \Rightarrow \angle (M_1O_2; O_1O_2) = \angle (AB; O_1O_2).$$

$$ABO_2M_1 - \text{пар.-мн} \Rightarrow AM_1 = BO_2 = 2 \Rightarrow O_1M_1 = 1.$$

$$\text{Отсюда } \operatorname{tg} \angle O_1O_2M = \frac{1}{M_1O} = \frac{1}{\sqrt{35}} \text{ по Т Пифагора в } \triangle O_1O_2M.$$

$$\text{Но } \angle O_1O_2M = \angle (AB; O_1O_2) = \angle (M_1O_2; O_1O_2) = \angle (AB; O_1O_2). \quad \neq$$

~~= модулю угла наклона~~

При этом $\operatorname{tg} \angle O_1O_2M = \operatorname{tg} \alpha$, где α -
угол наклона прямой AB .

Теперь заметим, что $-\frac{5}{\sqrt{11}} < -\frac{1}{\sqrt{35}} < \frac{1}{\sqrt{35}} < \frac{5}{\sqrt{11}}$, значит,
~~все~~ внешние касательные не подходят на ответ,
полученный ранее.

$$\text{Ответ: } a \in \left(-\frac{10}{\sqrt{11}}; \frac{10}{\sqrt{11}}\right).$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

лист 1

✓ 4

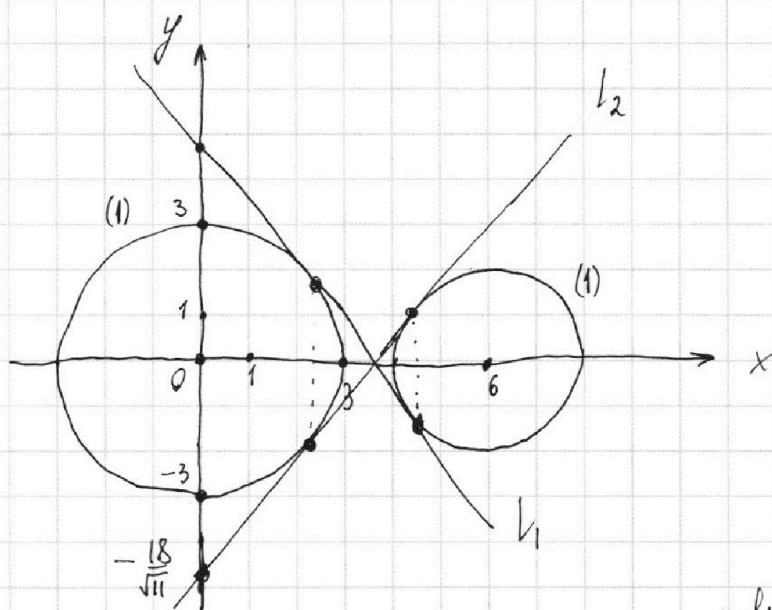
$$ax + 2y - 3b = 0$$

$$(x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0$$

$$ax + 2y - 3b = 0 \quad (2)$$

$$(x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \quad (1)$$

а-? найдется b, при котором система имеет ровно 4 решения.



Решим графически:
уравнение (1) задает пару окружностей с центрами в точках (0;0) и (6;0) и радиусами 3 и 2 соответственно

уравнение (2) задает прямую
ровно 4 решения системы будут ровно 4 точками пересечения прямой с окружностями на графике.

$$y = -\frac{a}{2}x + \frac{3}{2}b \quad (2)$$

$$(x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \quad (1)$$

Заметим, что

$$L_1: y = -\frac{5}{\sqrt{11}}x + \frac{18}{\sqrt{11}}$$

$$L_2: y = \frac{5}{\sqrt{11}}x - \frac{18}{\sqrt{11}}$$

— общие касательные к окружностям.

Проверим это подстановкой:

$$1) x^2 + \left(\frac{5}{\sqrt{11}}x - \frac{18}{\sqrt{11}}\right)^2 - 9 = 0$$

$$\frac{36}{11}x^2 - \frac{180}{11}x + \frac{225}{11} - 9 = 0$$

$$\frac{D}{4} = \frac{90^2}{11} - \frac{36 \cdot 225}{11} =$$

$$= \frac{90^2}{11} - \frac{90^2}{11} = 0$$

значит, есть касание с первой окружностью

$$2) x^2 - 12x + 32 + \left(\frac{5}{\sqrt{11}}x - \frac{18}{\sqrt{11}}\right)^2 - 4 = 0$$

$$36x^2 - 12 \cdot 326x + 26^2 = 0$$

$$\frac{D}{4} = 36 \cdot 26^2 - 36 \cdot 26^2 = 0$$

значит, есть касание со второй окружностью

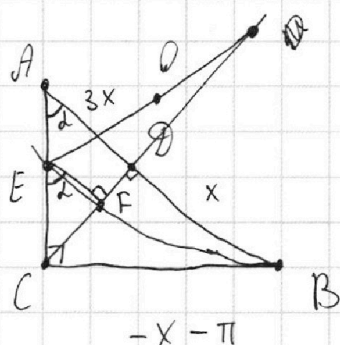
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$AB \parallel EF$

$$\frac{AF}{FB} = \frac{3}{1}$$

$$\frac{S(\triangle ABO)}{S(\triangle CEF)} = ?$$

$$S(\triangle ABO) = \frac{3}{4} S(\triangle ABC)$$

~~QAB~~

$$CB = \sqrt{3}x$$

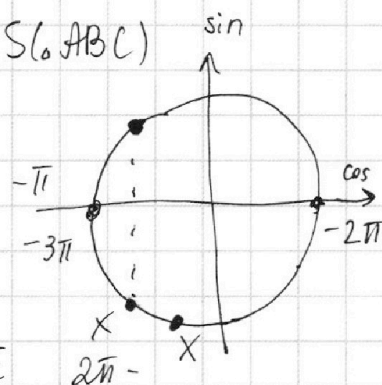
$$CEF \sim \triangle ABC$$

$$\frac{CE}{AB} = \frac{CF}{CB} = \frac{FE}{AC}$$

$$\alpha = 90^\circ - 2 - \angle FEB$$

$$\beta = 180^\circ - 2\alpha - 2\angle FEB$$

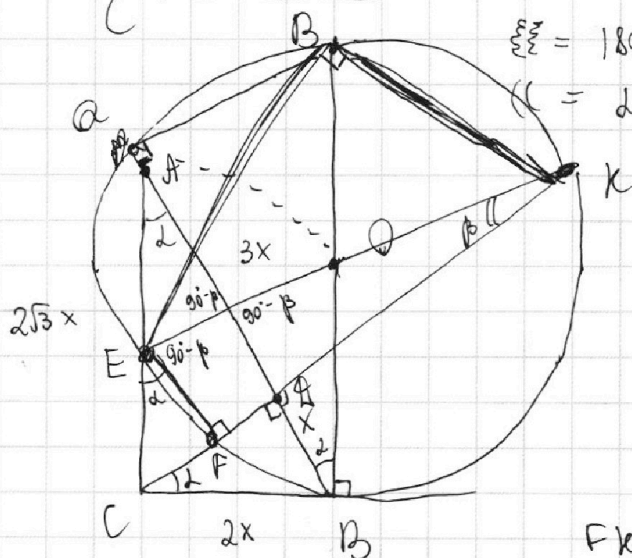
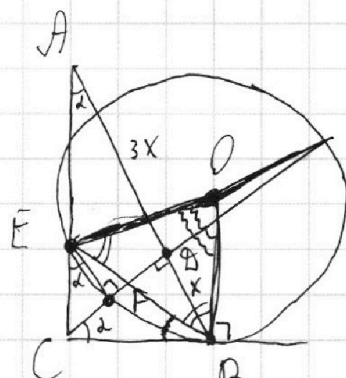
$$\gamma = \alpha + \angle FEB$$



$$0 \leq \text{arc} \leq \pi$$

$$0 \leq 5\text{arc} \leq 5\pi$$

$$X \leq 2\pi$$



$$CB = \sqrt{3}x$$

$$CB = 2x$$

$$AC = \sqrt{3+9} = 2\sqrt{3}x$$

$$\sin \alpha = \frac{1}{2} \quad \alpha = 30^\circ$$

$$QB = R$$

$$\angle QBQ = 90^\circ - \alpha$$

$$\angle BQO = 45^\circ + \frac{\alpha}{2} = \angle BQO$$

$$FK = 2R \cos \beta$$

$$CF \cdot (CF + 2R \cos \beta) = 4x^2$$

$$\angle EQB = 90^\circ + \beta - \alpha$$

$$X = -2.5\pi \quad \cos = 0$$

$$-X - 2\pi = \frac{\pi}{2} \quad \cos = 0$$

$$1) X \in [-3\pi; -2\pi]$$

$$\arccos(\cos x) = x - 2\pi$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$36x^2 - 12 \cdot 26x + 18 \cdot 40 = 0$
 $36x^2 - 12 \cdot 26x + 18 \cdot 40 = 0$
 $36x^2 - 312x + 720 = 0$
 $x^2 - 8.6\bar{6}x + 20 = 0$
 $x = 10$

$a, b, c \in \mathbb{N}$
 $ab: 2^9 3^{10} 5^{10}$
 $bc: 2^{14} 3^{13} 5^{13}$
 $ac: 2^{19} 3^{18} 5^{30}$

$CH = \frac{4\sqrt{11}}{5} \cdot \frac{5}{12} = \frac{\sqrt{11}}{3}$
 $(\frac{13}{3}, -\frac{\sqrt{11}}{3})$
 $CA = \sqrt{\frac{144}{25} - 4} = \frac{\sqrt{44}}{5}$

$\alpha_1 + \beta_1 \geq 9$
 $\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 \geq 14$
 $\alpha_1 + \gamma_1 \geq 19$
 $\alpha_1 = 7, \beta_1 = 2, \gamma_1 = 12, \Sigma = 21$
 $\alpha_2 + \beta_2 \geq 10$
 $\beta_2 + \gamma_2 \geq 13$
 $\alpha_2 + \gamma_2 \geq 18$
 $\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 \geq \frac{41}{2}$
 $\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 = 21, \Sigma = 21$
 $\alpha_3 + \beta_3 \geq 10$
 $\beta_3 + \gamma_3 \geq 13$
 $\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3 \geq 30$
 $\alpha_3 = 15, \beta_3 = 15, \Sigma = 30$

$y = -\frac{5}{\sqrt{11}}x + \frac{18}{\sqrt{11}}$
 $x^2 + \frac{25}{11}x^2 + \frac{18^2}{11} - \frac{180}{11}x - 9 =$
 $= \frac{36}{11}x^2 - \frac{180}{11}x + \frac{9 \cdot 36 - 9 \cdot 11}{11} =$
 $= 36x^2 - 180x + 225$

$y = -\frac{5}{\sqrt{11}}x + b$
 $-\frac{\sqrt{11}}{3} = -\frac{5}{\sqrt{11}} \cdot \frac{13}{3} + b$
 $b = \frac{65}{3\sqrt{11}} - \frac{\sqrt{11}}{3} = \frac{54}{\sqrt{11} \cdot 3} = \frac{18}{\sqrt{11}}$
 $\frac{Q}{4} = 90^2 - 36 \cdot 225 =$
 $= 5^2 \cdot 2^2 \cdot 9^2 - 2^2 \cdot 5^2 \cdot 9^2 = 0$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8$$

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 3^5 - 8$$

$$\log_3^4 x + \frac{6}{\log_3 x} = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{\log_3 x} - 8$$

$$\log_3 x = t.$$

$$2t^4 + \frac{12}{t} = \frac{5}{t} - 16 \quad t \neq 0$$

$$2t^5 + 16t + 4 = 0$$

$$3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$$

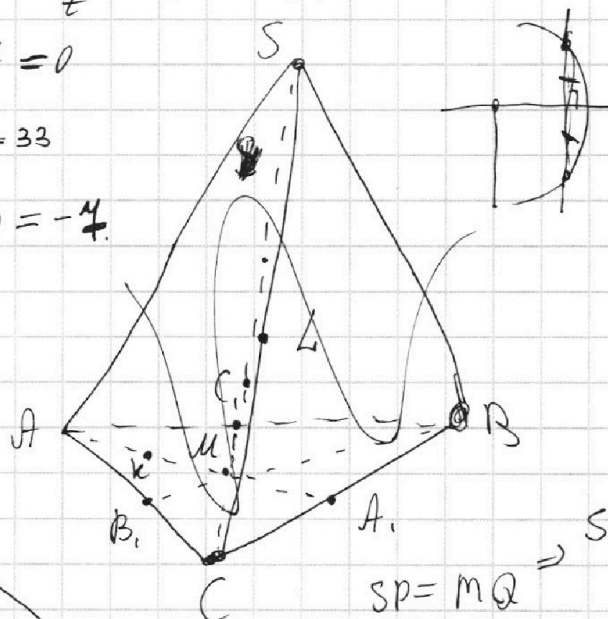
$(-14; 42)$

$(6; 42)$

$(0; 0)$

$(20; 0)$

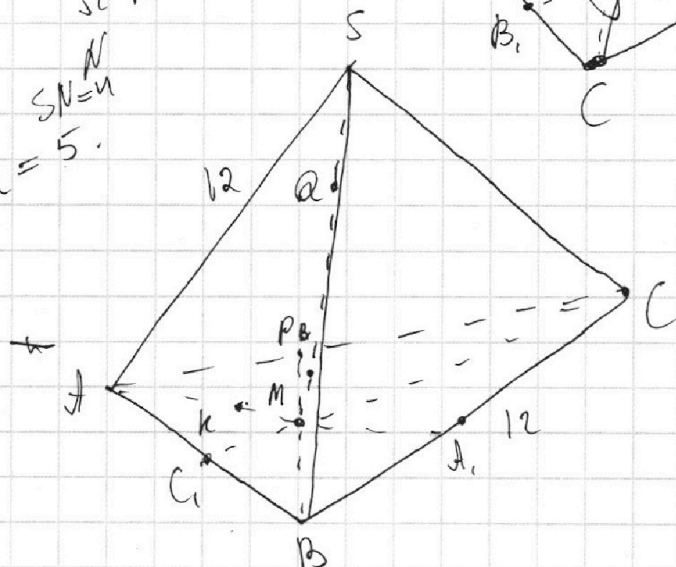
$$2t(t^4 + 8) = -4$$



Ω кас. BSC .

$SN = N$

$R = 5$.



$$SP = MQ \Rightarrow SQ = MP$$

$$\angle A = 90^\circ$$

$$SA = BC = 12$$

$$AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = ?$$

$$0 \leq y \leq 20$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

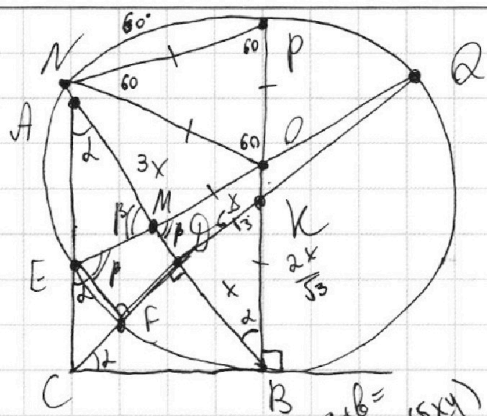
Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$BC = \sqrt{3} \cdot 2x$$

$$AC = 2\sqrt{3}x$$

$$\alpha = 30^\circ$$

$$\frac{PN}{(\frac{1}{2})} = 2R \quad PN = R$$

$$\frac{AE}{\sin \beta} = 2ME \quad ME = \frac{AE}{2 \sin \beta}$$

$$2MO = \frac{R}{\sin \beta} \quad MO = \frac{R}{2 \sin \beta}$$

$$MO = R - ME = R - \frac{AE}{2 \sin \beta} = \frac{R}{2 \sin \beta}$$

$$AE = 2R \sin \beta - R = R(2 \sin \beta - 1)$$

$$\sin \angle AEM = \sin \left(\frac{2\pi}{3} - \beta \right) = \sin \frac{2\pi}{3} \cos \beta - \sin \beta \cos \frac{2\pi}{3} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \beta + \frac{1}{2} \sin \beta$$

$$\frac{AE}{\sin \beta} = \frac{6x}{\sqrt{3} \cos \beta + \sin \beta}$$

$$AE = \frac{6x \sin \beta}{\sqrt{3} \cos \beta + \sin \beta} = R(2 \sin \beta - 1)$$

$$R = \frac{6x \sin \beta}{(2 \sin \beta - 1)(\sqrt{3} \cos \beta + \sin \beta)}$$

$$= \frac{6x \sin \beta}{2\sqrt{3} \cos \beta \sin \beta + 2 \sin^2 \beta - \sqrt{3} \cos \beta - \sin \beta + 1}$$

$$CE = 2\sqrt{3}x -$$

$$CE = 2\sqrt{3}x - \frac{12x \sin^2 \beta}{(2 \sin \beta - 1)(\sqrt{3} \cos \beta + \sin \beta)}$$

$$CF(CF + 2R \sin \beta) = 4x^2$$

$$CF^2 + 2R \sin \beta CF - 4x^2 = 0$$

$$\frac{D}{4} = R^2 \sin^2 \beta + 4x^2$$

$$CF = \frac{-R \sin \beta \pm \sqrt{R^2 \sin^2 \beta + 4x^2}}{2}$$

$$a = \log_3 x \quad b = \log_5 y$$

$$a^4 + \frac{6}{a} = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{a} - 8$$

$$b^4 + \frac{2}{b} = \frac{11}{2} \cdot \frac{1}{b} - 8$$

$$a^4 - b^4 + \frac{6}{a} - \frac{2}{b} = \frac{5}{2a} - \frac{11}{2b}$$

$$a^5 b - b^5 a + 6b - 2a = \frac{5b}{2} - \frac{11a}{2} \quad | \cdot 2$$

$$2a^5 b - 2b^5 a + 12b - 4a = 5b - 11a$$

$$2a^5 b - 2b^5 a + 7b + 7a = 0$$

$$2ab(a^4 - b^4) + 7(a+b) = 0$$

$$2ab(a^2 + b^2)(a+b)(a-b) + 7(a+b) = 0$$

$$(a+b)(2ab(a^2 + b^2) + 7) = 0$$

$$(a+b)(2a^3 b - 2a^2 b^2 + 2ab^3 - 2a^4 + 7) = 0$$

= 0



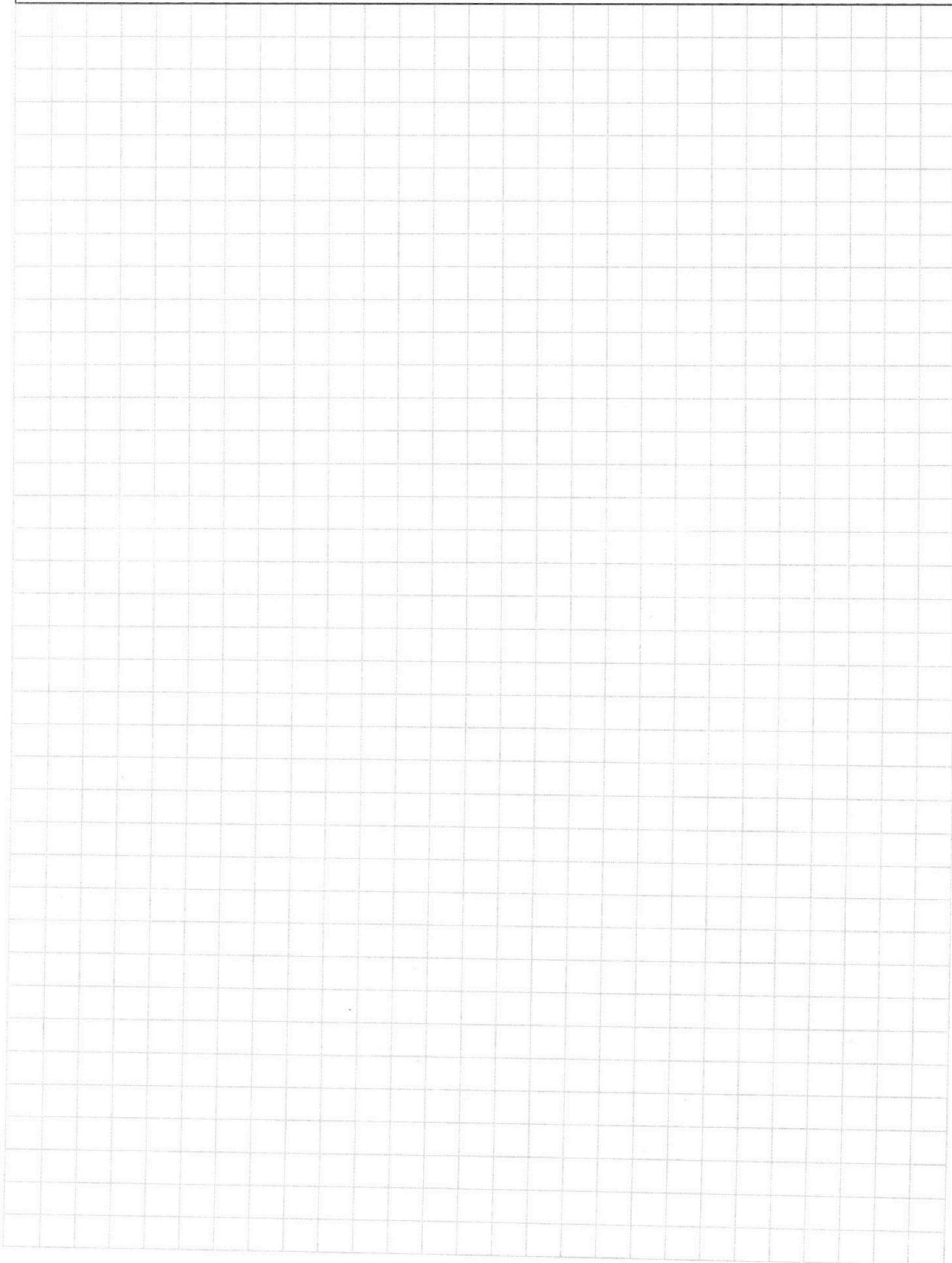
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$0 \leq y_1, y_2 \leq 20$$

$$x = -\frac{y}{3}$$

$$y = -3x$$

$$x = 20 - \frac{y}{3}$$

$$y = -3x + 60$$

$$y = kx + b \quad \begin{cases} 42 = -14k + b \\ b = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} k = -3 \\ y = -3x \\ y = -3x + 60 \end{cases}$$

$$y = -3x + b$$

$$42 = -14 + b$$

$$b = 60$$

$$0 \leq y_1, y_2 \leq 20$$

$$-\frac{y_1}{3} \leq x_1 \leq 20 - \frac{y_1}{3}$$

$$-\frac{y_2}{3} \leq x_2 \leq 20 - \frac{y_2}{3}$$

$$\frac{y_1}{3} - 20 \leq -x_1 \leq \frac{y_1}{3}$$

$$y_1 - 60 \leq -3x_1 \leq y_1$$

$$-y_2 \leq 3x_2 \leq 60 - y_2$$

$$-60 \leq 3x_2 - 3x_1 \leq 60 - y_2 + y_1$$

$$-60 \leq 3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 \leq 60$$

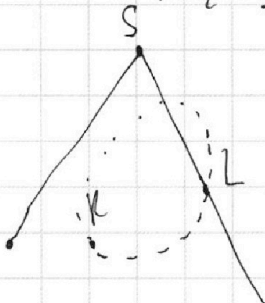
$$\vec{x}_1, y_1 \quad \vec{x}_2, y_2$$

$$-\vec{a} = \{-3; -1\} + \vec{a} = \{3; 1\}$$

$$-\vec{a} \vec{x}_1 + \vec{a} \vec{x}_2 = 33$$

$$\vec{a} \{(x_2 - x_1); (y_2 - y_1)\} = 33$$

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



$$CD = \frac{1}{2} AC$$

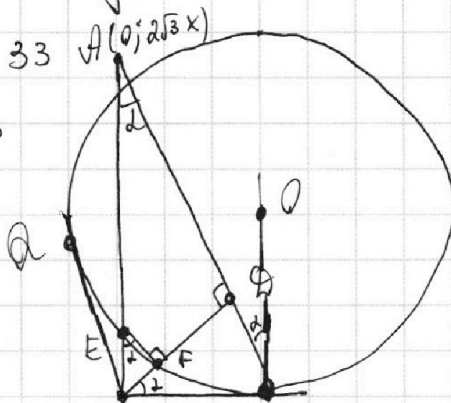
$$KD = \frac{1}{2} KB$$

$$\frac{3x - MD}{x + MD} = \frac{EM}{MO} = \frac{AE}{R}$$

$$A(0; 2\sqrt{3}) \quad B(2; 0)$$

$$E = \{0; y_1\} \quad F = \{x_2; y_2\}$$

$$\frac{x_2}{2} = \frac{y_2 - y_1}{2\sqrt{3}} \quad (1) \quad \sqrt{3} x_2 = y_2 - y_1$$



$$C(0;0) \quad B(2x;0)$$

$$KB = \frac{BC}{\cos 30^\circ} = \frac{2x}{\sqrt{3}} \quad KD = \frac{x}{\sqrt{3}}$$

$$\vec{AB} = \{2; 2\sqrt{3}\}$$

$$\vec{EF} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1\}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} & O(2x; y_3) \\ & \left\{ \begin{aligned} \sqrt{3}x_2 &= y_2 - y_1 \\ y_3^2 &= 4x^2 + (y_3 - y_1)^2 \\ y_3^2 &= (2x - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2 \end{aligned} \right. \quad \left\{ \begin{aligned} \sqrt{3}x_2 &= y_2 - y_1 \\ y_3^2 &= 4x^2 + y_3^2 - 2y_3y_1 + y_1^2 \\ y_3^2 &= 4x^2 - 4xx_2 + x_2^2 + y_3^2 - 2y_2y_3 + y_2^2 \end{aligned} \right. \\ & \left\{ \begin{aligned} x_2 &= \frac{y_2 - y_1}{\sqrt{3}} \\ y_1^2 - 2y_3y_1 + 4x^2 &= 0 \\ y_2^2 - 2y_2y_3 + \frac{(y_2 - y_1)^2}{3} - 4x \frac{y_2 - y_1}{\sqrt{3}} + 4x^2 &= 0 \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & * O(2x; y_3) \\ & (x - 2x)^2 + (y - y_3)^2 = y_3^2 \quad y = 0 \\ & \text{минус } \varnothing \end{aligned}$$