



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 14



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $3^{14}7^{13}$, bc делится на $3^{19}7^{17}$, ac делится на $3^{23}7^{42}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-9ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2-5x+6}-\sqrt{3x^2+x+1}=5-6x.$$

4. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , диаметр AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC=1$ и $BC=25$. Найдите длину общей касательной к окружностям ω и Ω .
5. [4 балла] Ненулевые действительные числа x, y, z удовлетворяют равенствам

$$5x-y=3z \quad \text{и} \quad \frac{8}{x}+\frac{1}{y}=\frac{15}{z}.$$

Найдите наименьшее возможное значение выражения $\frac{25x^2-y^2-z^2}{y^2+3z^2}$.

6. [5 баллов] Из пункта A в пункт B выезжают одновременно велосипедист и мотоциклист. Оба они движутся с постоянной скоростью, и мотоциклист прибывает в пункт B на 1 час раньше велосипедиста. Если бы велосипедист ехал со своей скоростью в течение того времени, что понадобилось мотоциклисту на дорогу от A к B , а мотоциклист – в течение того времени, что понадобилось велосипедисту на этот путь, то мотоциклист проехал бы на 49 километров больше. Если бы скорость каждого из них возросла на 7 км/ч, то велосипедист приехал бы в B на 36 минут позже велосипедиста. Найдите расстояние между A и B .
7. [6 баллов] Вписанная окружность ω прямоугольного треугольника ABC с прямым углом B касается его сторон CA, AB, BC в точках D, E, F соответственно. Луч ED пересекает прямую, перпендикулярную BC , проходящую через вершину C , в точке Y ; X – вторая точка пересечения прямой FY с окружностью ω . Известно, что $EX = \sqrt{2}XY$. Найдите отношение $AD : DC$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача № 1

Пусть $ab = 3^{14} \cdot 7^{13} \cdot k_1$, $ac = 3^{23} \cdot 7^{42} \cdot k_2$, $bc = 3^{19} \cdot 7^{17} \cdot k_3$, где k_1, k_2 и k_3 — это натуральные числа (в силу делимости). Тогда $a \cdot b \cdot c$

$$a \cdot c = 3^{14} \cdot 7^{13} \cdot 3^{23} \cdot 7^{42} \cdot 3^{19} \cdot 7^{17} \cdot k_1 \cdot k_2 \cdot k_3 \Rightarrow (a \cdot b \cdot c)^2 = k_1 \cdot k_2 \cdot k_3 \cdot$$

$$3^{56} \cdot 7^{72} \Rightarrow abc = 3^{28} \cdot 7^{36} \sqrt{k_1 \cdot k_2 \cdot k_3}, \text{ так как } k_1, k_2, k_3 \text{ каждое из них натуральное} \Rightarrow k_1 \geq 1, k_2 \geq 1, k_3 \geq 1 \Rightarrow abc \geq 3^{28} \cdot 7^{36}.$$

Пусть $a: 3^x$ (где x — это максимальная степень, которая воз-
можна), аналогично $b: 3^y$, $c: 3^z$, тогда $x+y \geq 14$;

$$x+z \geq 23; y+z \geq 19 \text{ (из делимости)} \Rightarrow \text{факты все сложим)}$$

$$2(x+y+z) \geq 19+14+23 \Rightarrow x+y+z \geq \frac{19+14+23}{2} = 28 \Rightarrow abc: 3^{28}$$

$$\text{Так } ac: 7^{42}, \text{ а } b \geq 1 \text{ (так натурально)} \Rightarrow abc: 7^{42}, \text{ получаем}$$

$$\text{(так 3 и 7 взаимно просты), что } abc: 7^{42} \cdot 3^{28} \Rightarrow abc \geq 7^{42} \cdot 3^{28}$$

Приведем пример, что $abc = 7^{42} \cdot 3^{28}$ возможно. $a = 3^9 \cdot 7^{21}$;

$$b = 3^5; c = 3^{14} \cdot 7^{21}, \text{ тогда } abc = 3^{14} \cdot 3^5 \cdot 3^9 \cdot 7^{21} \cdot 7^{21} = 3^{28} \cdot 7^{42}$$

$$\text{и } ab = 3^{14} \cdot 3^5 \cdot 7^{21} = 3^{19} \cdot 7^{21}, \text{ пусть } ab: 3^{14} \cdot 7^{13}; ac = 4^{21} \cdot 7^{21}.$$

$$\cdot 3^{14} \cdot 3^9 = 7^{42} \cdot 3^{23} \Rightarrow ac: 3^{23} \cdot 7^{42}; bc = 3^5 \cdot 3^{14} \cdot 7^{21} = 3^{19} \cdot 7^{21} \Rightarrow$$

$$bc: 3^{19} \cdot 7^{21}.$$

Ответ: $7^{42} \cdot 3^{28}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №2.

$$\frac{a+b}{a^2-9ab+b^2} = \frac{a+b}{a^2+2ab+b^2-11ab} = \frac{a+b}{(a+b)^2-11ab}. \text{ Рассмотрим НОД}$$

(наибольший общий делитель) $a+b$ и $(a+b)^2-11ab$, тогда:

$$\text{НОД}(a+b; (a+b)^2-11ab) = x \text{ (то есть } a+b \div x \text{ и } (a+b)^2-11ab \div x,$$

но так $a+b \div x \Rightarrow -11ab \div x$, а в силу того, что a и b взаим.

(больше 0) $\Rightarrow x > 0 \Rightarrow$ раз $-11ab \div x$, то $11ab \div x$)

$$\text{НОД}(a+b; -11ab+(a+b)^2) = \text{НОД}(a+b; 11ab) = x, \text{ так } \frac{a}{b} \text{ не}$$

сократима вробль $\Rightarrow \text{НОД}(a; b) = 1$ (то есть $a \nmid b$ и $b \nmid a$)

если $a+b \nmid 11$ (~~a и b не делятся на 11~~) заметим, что $a+b \nmid a$
и $a+b \nmid b$ ($a+b$ не делится ни на a , ни на b), так $a \div a$, $a \nmid b \Rightarrow$

$$a+b \nmid a \text{ (аналогично с } b). \text{ Значит } \text{НОД}(a+b; 11ab) =$$

$$= \text{НОД}(a+b; 11), \text{ важно заметить, что если } a+b \nmid 11, \text{ тогда}$$

$$\text{НОД}(a+b; 11) = 1 \text{ (пример, что при этом } \frac{a}{b} \text{ несократимо.}$$

$$a=5, b=6), \text{ а если } a+b \nmid 11 \Rightarrow 11 \text{ - простое, а } a+b \nmid 11 \Rightarrow$$

$$\text{НОД}(a+b; 11) = 1.$$

Ответ: $m=11$, при $a+b \nmid 11$, иначе $m=1$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача №3

Решим уравнения $3x^2 - 5x + 6 = 0$ и $3x^2 + x + 1 = 0$, получим соответствующие $D_1 = 5^2 - 4 \cdot 3 \cdot 6 = -47$ (то есть $D_1 < 0$) и $D_2 = 1 - 4 \cdot 3 = -11$;

то есть $D_2 < 0$, так D_1 и D_2 меньше 0 и коэффициенты при x^2 в обоих уравнениях положительны (то есть парабола ветви вверх), значит при любых x уравнение $3x^2 - 5x + 6 > 0$ и $3x^2 + x + 1 > 0$. Так выражение под корнем положительное \Rightarrow корни двух корней положительны (получим $4 \pm \sqrt{3x^2 - 5x + 6} + \sqrt{3x^2 + x + 1}$)

получим $3x^2 - 5x + 6 - 3x^2 - x - 1 = (5 - 6x)(\sqrt{3x^2 - 5x + 6} + \sqrt{3x^2 + x + 1})$
 $-6x + 5 = (5 - 6x)(\sqrt{3x^2 - 5x + 6} + \sqrt{3x^2 + x + 1})$ Один корень уравнения:

$5 - 6x = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{6}$ (он под корнем ветви положительной \Rightarrow можно не проверять). Далее считаем что $x \neq \frac{5}{6}$, тогда разделим на

$5 - 6x$, получим: $1 = \sqrt{3x^2 - 5x + 6} + \sqrt{3x^2 + x + 1} \Rightarrow 1 - \sqrt{3x^2 + x + 1} = \sqrt{3x^2 - 5x + 6}$

~~тогда $\sqrt{3x^2 + x + 1} \leq 1$ (имеем положительный корень отрицательное)~~

~~$\Rightarrow \sqrt{3x^2 + x + 1} \leq 1 \Rightarrow 3x^2 + x \leq 0 \Rightarrow x(3x + 1) \leq 0$ (решаем неравенство~~

~~вектор $\begin{matrix} 1 & -1 \\ -1/3 & 0 \end{matrix} \Rightarrow x \in [-1/3; 0]$ тогда возведем в~~

квадрат: $1 + 3x^2 + x + 1 - 2\sqrt{3x^2 + x + 1} = 3x^2 - 5x + 6 \Rightarrow -2\sqrt{3x^2 + x + 1} = -2(3x - 2)$

(разделим на -2) $\sqrt{3x^2 + x + 1} = 3x - 2$ ($3x - 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{2}{3}$) возведем в квадрат

$3x^2 + x + 1 = 9x^2 + 4 - 12x \Rightarrow 6x^2 - 13x + 3 = 0 \Rightarrow$

$x_{1,2} = \frac{13 \pm \sqrt{13^2 - 4 \cdot 6 \cdot 3}}{2 \cdot 6} = \frac{13 \pm \sqrt{47}}{12}$ (можно не проверять, так как корнем ветви положительной)

Ответ: $\frac{5}{6}$; $\frac{13 \pm \sqrt{47}}{12}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

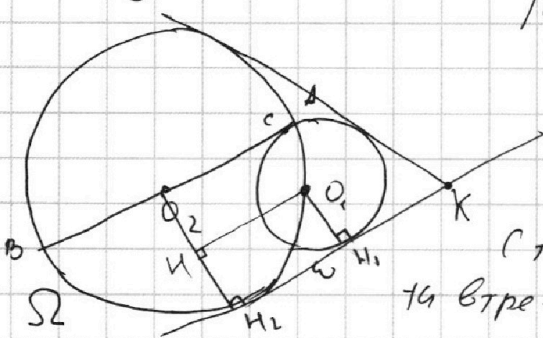
1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача № 4



Пусть центры окр. ω и Ω соответственно на рисунке O_1 и O_2 (см. рис.), тогда

Тк AB диаметр \Rightarrow он проходит через O_2 , и тк AB касательная к ω и

с точки касания $\Rightarrow O_1C \perp AB$ (O_1C - радиус

тк втр-ке $\triangle O_1CB$, $\angle AOB = 90^\circ$, тк опирается

на диаметр в окр. Ω , тогда из соотношений в

крив. тре-ке ($\triangle O_1CB$) $h = \frac{ac \cdot bc}{a}$ (O_1C как ст. касания $\Rightarrow O_1C$ как радиус Ω)

это и радиус окр. ω) $= \sqrt{AC \cdot BC} = \sqrt{1 \cdot 25} = 5$. $O_2A = O_2B =$

$= \frac{AC + CB}{2} = \frac{AB}{2} = \frac{1 + 25}{2} = 13$. Пусть H_1 и H_2 это перпендикуляры

на общую касательную (на ось) H_1 из O_1 и H_2 из O_2 . Тк

O_1H_1 и O_2H_2 перпендикуляры к касательной (к одной прямой) \Rightarrow

$O_1H_1 \parallel O_2H_2 \Rightarrow O_1, H_1, H_2, O_2$ - это ^{тр. перпен.} ~~прямоуг.~~ (прямоугольн. тр. перпен. тк $O_1H_1 \perp H_1H_2$

и прямоуг. тк $\angle O_1H_1H_2 = 90^\circ$). Пусть $O_1H_1 \perp O_2H_2$, тогда тк $O_1H_1 \parallel H_1H_2$

(тк перпендикуляры к одной прямой) и $H_1O_1 \parallel H_2O_2$ (указано выше),

$H_1O_1 = H_2O_2$ значит $H_1O_1H_2O_2$ - параллелограмм / тк $\angle O_1H_1H_2 = 90^\circ \Rightarrow$ прямоугольник)

Значит $O_1H_1 = H_2O_2 = \frac{1}{2} H_1H_2$ - радиус $\Rightarrow O_1H_1 = O_1C = 5 \Rightarrow$

$H_1H_2 = 5 \Rightarrow O_2H_2$ (тк O_2H_2 - радиус $\Rightarrow O_2H_2 = 13$) $= O_2H_2 - H_1H_2 =$

$= 13 - 5 = 8$. Тк $\angle O_1H_1O_2 = 90^\circ \Rightarrow O_1H_1 = \sqrt{O_1O_2^2 - O_2H_2^2} = \sqrt{13^2 - 8^2} = \sqrt{105}$.

по т. Пифагора

Пусть k точки пересечения одной касательной окр. $\Rightarrow H, O_1, O_2$ лежат

на одной прямой, значит (по двум углам / по двум углам $\angle kH_2O_2 =$

$= 90^\circ = \angle kH_1O_1$) $\triangle kO_1H_1 \sim \triangle kO_2H_2 \Rightarrow \frac{kH_2}{kH_1} = \frac{O_2H_2}{O_1H_1} \Rightarrow$

$$\frac{kH_2}{kH_1} = \frac{O_2H_2}{O_1H_1} \Rightarrow kH_2 \cdot O_1H_1 = O_2H_2 \cdot kH_1 = O_2H_2 \cdot kH_1$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Продолжение задачи №4.

$$k u_2 (0,4 u_1 - 0,2 u_2) = -0,2 u_2$$

$$\frac{k u_1 + u_1 u_2}{k u_1} = \frac{0,2 u_2}{0,4 u_1} \Rightarrow k u_1 \cdot 0,4 u_1 + u_1 u_2 \cdot 0,4 u_1 = 0,2 u_2 \cdot k u_1$$

$$k u_1 (0,4 u_1 - 0,2 u_2) = -u_1 u_2 \cdot 0,4 u_1$$

$$k u_1 = \frac{-u_1 u_2 \cdot 0,4 u_1}{0,4 u_1 - 0,2 u_2} = \frac{u_1 u_2 \cdot 0,4 u_1}{0,2 u_2 - 0,4 u_1} = \frac{1105 \cdot 5}{13 - 5} = \frac{51105}{8}$$

$$k u_2 = k u_1 + u_1 u_2 = 1105 + \frac{51105}{8} = \frac{81105 + 51105}{8} = \frac{132210}{8}$$

Ответ: $\sqrt{105}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №5

$$\begin{cases} 5x - y = 3z \\ \frac{x}{y} + \frac{1}{y} = \frac{15}{z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 5x - 3z \\ \frac{1}{y} = \frac{15}{z} - \frac{x}{z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 5x - 3z \\ \frac{1}{y} = \frac{15x - 8z}{zx} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 5x - 3z \\ y = \frac{zx}{15x - 8z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 25x^2 + 9z^2 - 30xz \\ y = \frac{zx}{15x - 8z} \end{cases}$$

$z \neq 0, y \neq 0, x \neq 0$ так как иначе не имеет смысла

$$\frac{zx}{15x - 8z} = 5x - 3z \Rightarrow zx = (5x - 3z)(15x - 8z) \Rightarrow$$

$$zx = 5 \cdot 15x^2 + 24z^2 - 3 \cdot 15xz - 8 \cdot 5z \cdot x$$

$$75x^2 + 24z^2 - 86xz = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{86z \pm \sqrt{86^2 z^2 - 4 \cdot 75 \cdot 24z^2}}{2 \cdot 75} =$$

$$= \frac{86z \pm 2\sqrt{86^2 - 4 \cdot 24 \cdot 75}}{2 \cdot 75} = \frac{z(86 \pm 7)}{2 \cdot 75}$$

$$x_1 = \frac{93z}{2 \cdot 75} \quad \text{или} \quad x_2 = \frac{79z}{2 \cdot 75}$$

Рассмотрим 2 случая и выйдем тот, который больше:

$$\frac{25x^2 - y^2 - z^2}{y^2 + 3z^2} = \frac{25x^2 - (25x^2 + 9z^2 - 30xz) - z^2}{y(25x^2 + 9z^2 - 30xz) + 3z^2} = \frac{-10z^2 - 30xz}{25x^2 + 12z^2 - 30xz} =$$

$$= -10z \cdot \frac{z + 3x}{12z^2 + 25x^2 - 30xz}$$

$$1) \quad x = \frac{93z}{2 \cdot 75} \Rightarrow -10z \cdot \frac{z - 3 \cdot \frac{93z}{2 \cdot 75}}{12z^2 + 25 \cdot \frac{93^2 z^2}{4 \cdot 75^2} - 30 \cdot \frac{93z}{2 \cdot 75} z} =$$

$$= -10 \cdot \frac{1 - \frac{3 \cdot 93}{50}}{12 + \frac{93^2}{12 \cdot 75} - \frac{3 \cdot 93}{5}} = 10 \cdot \frac{\frac{43}{50}}{12 + \frac{93^2}{12 \cdot 75} - \frac{93}{5}}$$

$$2) \quad x = \frac{79z}{2 \cdot 75} \Rightarrow -10z \cdot \frac{z - \frac{79 \cdot 3z}{2 \cdot 75}}{12z^2 + \frac{25 \cdot 79^2}{4 \cdot 75^2} z^2 - \frac{30 \cdot 79}{2 \cdot 75} z^2} =$$

$$= -10 \cdot \frac{1 - \frac{79}{50}}{12 + \frac{79^2}{12 \cdot 75} - \frac{79}{5}} = 10 \cdot \frac{\frac{29}{50}}{12 + \frac{79^2}{12 \cdot 75} - \frac{79}{5}}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Продолжение задачи № 5.

Надо сравнить 1000 и 200 случаев:

$$10 \cdot \frac{43}{50 \left(12 + \frac{93^2}{12 \cdot 75} - \frac{93}{5} \right)}$$

$$\frac{43}{12 \cdot 50 + \frac{31^2}{2} - 930}$$

$$\frac{43}{10(12 \cdot 5 - 93) + \frac{31^2}{2}} = \frac{43}{\frac{31^2}{2} - 330}$$

$$\frac{43}{150,5} = \frac{86}{301}$$

$$86 \cdot 2821 = 243 \cdot 2821$$

$$43 \cdot 2821$$

$$43 \cdot 2821 > 43 \cdot 2709 = 43 \cdot$$

$$\cdot 301 \cdot 9$$

$$43$$

>

$$29$$

$$y = 5x - 3z \sqrt{\quad}$$

Значит, имеем еще значение при

$$x = \frac{792}{150}$$

бывает

$$\frac{29 \cdot 18 \cdot 10}{2821} = \frac{522}{2821}$$

Ответ: $\frac{522}{2821}$

$$10 \cdot \frac{29}{50 \left(12 + \frac{79^2}{12 \cdot 75} - \frac{79}{5} \right)}$$

$$\frac{29}{50 \cdot 12 + \frac{79^2}{18} - 790}$$

$$\frac{29}{10(60 - 79) + \frac{79^2}{18}} = \frac{29}{\frac{79^2}{18} - 190}$$

$$\frac{29 \cdot 18}{79^2 - 19 \cdot 180} = \frac{29 \cdot 18}{2821}$$

$$301 \cdot 29 \cdot 18$$

$$301 \cdot 29 \cdot 9$$

$$301 \cdot 9 \cdot 29$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

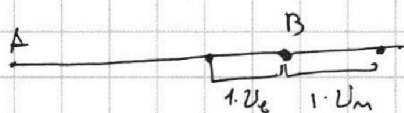
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача №6.

Пусть S - это расстояние от A до B (измеряется в км), v_B - это скорость велосипедиста (измеряется в $\frac{км}{ч}$) и v_M - это скорость мотоциклиста (измеряется в $\frac{км}{ч}$). Рассмотрим утверждение после того, как мотоциклист проехал из точки A к велосипедисту (то есть со слов "Если бы велосипедист..."). То есть со слов "...на 49 км больше". Так как от A до B велосипедисту требуется на 1 час больше чем мотоциклисту, то



Эти 49 км равны $1 \cdot v_M + 1 \cdot v_B = v_M + v_B$

$$\begin{cases} \frac{S}{v_M} + 1 = \frac{S}{v_B} \\ v_M + v_B = 49 \\ \frac{S}{v_M + 7} + \frac{3}{5} = \frac{S}{v_B + 7} \end{cases}$$

Составим систему уравнений (время = $\frac{\text{пути}}{\text{скорость}}$)

(где v_B, v_M, S это числ. величины, характеризующие гонимую и скорость, значит

$v_B, v_M, S > 0$ (какие по отдельности), а так

$$v_M + v_B = 49 \Leftrightarrow (v_M = 49 - v_B) \quad v_M < 49 \quad v_B < 49,$$

так мотоциклист прибывает первым \Rightarrow

$$v_B < v_M). \quad \frac{S}{v_M} + 1 = \frac{S}{v_B} \Rightarrow 1 = S \left(\frac{1}{v_B} - \frac{1}{v_M} \right) \Rightarrow S = \frac{v_M - v_B}{v_B \cdot v_M} = 1 \Rightarrow$$

$$(\text{так } v_M + v_B = 49 \Rightarrow$$

$$v_B = 49 - v_M)$$

$$S = \frac{v_B v_M}{v_M - v_B} = \frac{(49 - v_M) v_M}{v_M - 49 + v_M} = \frac{v_M (49 - v_M)}{2v_M - 49}$$

$$\frac{S}{v_M + 7} + \frac{3}{5} = \frac{S}{v_B + 7} \Rightarrow \frac{3}{5} = \frac{S}{v_B + 7} - \frac{S}{v_M + 7} \Rightarrow \frac{3}{5} = S \left(\frac{v_M + 7 - v_B - 7}{(v_M + 7)(v_B + 7)} \right) \Rightarrow$$

$$\frac{3}{5} = \frac{v_B v_M}{v_M - v_B} \cdot \frac{(v_M - v_B)}{(v_M + 7)(v_B + 7)} \Rightarrow \frac{3}{5} = \frac{v_B v_M}{(v_M + 7)(v_B + 7)} \Rightarrow \frac{3}{5} = \frac{(49 - v_M) v_M}{(v_M + 7)(56 - v_M)}$$

$$3(v_M + 7)(56 - v_M) = 5v_M(49 - v_M) \Rightarrow -3v_M^2 + 3 \cdot 7 \cdot 56 + 3 \cdot 49v_M =$$

$$= -5v_M^2 + 5 \cdot 49v_M \Rightarrow 2v_M^2 - 2 \cdot 49v_M + 3 \cdot 7^2 \cdot 8 = 0 \Rightarrow$$

$$v_M^2 - 49v_M + 3 \cdot 7^2 \cdot 4 = 0$$

$$D = 49^2 - 4 \cdot 4 \cdot 7^2 \cdot 3 = 7^2(49 - 48) = 7^2$$

$$v_{M_{1/2}} = \frac{49 \pm 7}{2} \Rightarrow v_{M_1} = \frac{49 - 7}{2} = 21 \frac{км}{ч} \quad \text{или} \quad v_{M_2} = \frac{49 + 7}{2} = 28 \frac{км}{ч}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

 МФТИ

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Продолжение задачи № 6

Пк $v_B = v_M + 49$, то при $v_M = 21$, $v_B = 28 \Rightarrow v_B > v_M$, что не
возможно $\Rightarrow v_M = 28 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$, $v_B = 49 - 28 = 21 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$

$$\text{Тогда } S = \frac{v_B v_M}{v_M - v_B} = \frac{28 \cdot 21}{28 - 21} = \frac{7^2 \cdot 4 \cdot 3}{7} = 7 \cdot 4 \cdot 3 = 21 \cdot 4 = 84 \text{ км}$$

Ответ: 84 км.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

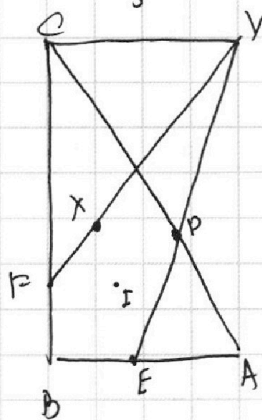
1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача N=7



Степень точки Y относительно вписанной
окружности: $YX \cdot YF = YD \cdot YE$ или же

$\sqrt{2} \cdot EX \cdot YF = YD \cdot YE$, т.к. оуп касается
в точках O и $E \Rightarrow AD = AE \Rightarrow \angle EDA =$

$\angle DEA$, т.к. $\angle CDD$ и $\angle EDA$ верт. \Rightarrow

$\angle EDA = \angle DEA$, а т.к. $\angle YED + \angle CDA = 90^\circ = 90^\circ =$

$= 180^\circ \Rightarrow CY \parallel BA \Rightarrow \angle CYD = \angle DEA \Rightarrow CD = CY$. А $\angle EFD =$

$\angle EXD$ (т.к. опирательная на одну дугу), $\angle DEA = \angle DFE$ как

углы между касательной и хордой. $\angle YED = \angle DFX$

как углы опирающиеся на одну дугу, $\angle FYE$ общий \Rightarrow

$\triangle FYD \sim \triangle FYX \Rightarrow \frac{FX}{FY} = \frac{FY}{FY} \Rightarrow FD = \sqrt{2} YD$. В сте-

пень точки Y по условию и получили: $2 EX \cdot YF = FD \cdot YE$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$3x^2 - 5x + 6 - 3x^2 - x - 1 = (5-6x)(\sqrt{\quad} + \sqrt{\quad})$$

$$-6x + 5 = (5-6x)(\sqrt{\quad} + \sqrt{\quad}) \text{ если } 5-6x=0$$

$$x = \frac{5}{6}$$

$$\begin{cases} 5x - y = 32 \\ \frac{8}{x} + \frac{1}{y} = \frac{15}{2} \end{cases} \left| \begin{array}{l} 25 \\ 72 \\ 25 \\ 47 \end{array} \right.$$

или чисти

$$1 = \sqrt{3x^2 - 5x + 6} - \sqrt{3x^2 + x + 1}$$

$$\begin{array}{r} 13 \\ 13 \\ \hline 39 \\ 13 \\ 569 \\ \hline 72 \\ \hline 97 \end{array}$$

$$1 + 3x^2 + x + 1 + 2\sqrt{3x^2 + x + 1} = 3x^2 - 5x + 6$$

$$2(1 + \sqrt{3x^2 + x + 1}) = -6x + 6$$

$$1 + \sqrt{3x^2 + x + 1} = -3x + 3$$

$$3x^2 + x + 1 = 9x^2 + 4 - 12x$$

$$6x^2 - 13x + 3 = 0$$

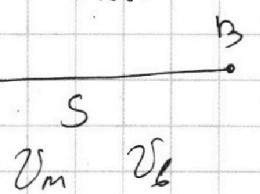
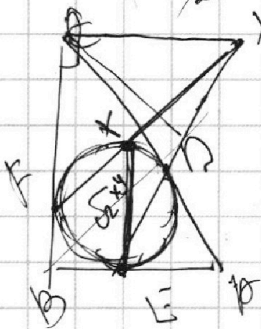
$$13^2 - 4 \cdot 6 \cdot 3 = 169 - 72 = 97$$

$$\begin{array}{r} 24 \\ 60 \\ \hline 84 \end{array}$$

$$\frac{13 \pm \sqrt{97}}{12}$$

$$3x^2 + x + 1 - 2\sqrt{3x^2 + x + 1} = 3x^2 - 5x + 6$$

$$-2\sqrt{3x^2 + x + 1} = -6x + 5$$



$$\frac{S}{2r} + 1 = \frac{S}{2r}$$

$$\frac{S}{2r} \cdot 2r - \frac{S}{2r} \cdot 2r = 4r$$

$$\frac{S}{2r} + \frac{3}{5} = \frac{S}{2r} + 7$$

$$25x^2 = 9z^2 + y^2 = 6zy$$

$$25x^2 - y^2 - 9z^2 = -6zy$$

$$-6zy + 8z^2$$

$$y^2 + 3z^2$$

$$8 + \frac{x}{y} = \frac{15x}{2y}$$

$$8yz + xz = 15xy$$

$$yz = \frac{15xy - xz}{8}$$

$$45$$

$$3x^2 + x + 1 \leq 1$$

$$x(3x+1) \leq 0$$

$$0$$

$$\frac{36}{60} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

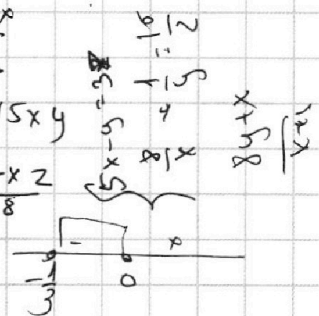
$$\frac{24}{60} = \frac{2}{5}$$

$$1 = \frac{S}{2r} - \frac{S}{2r}$$

$$1 = S \left(\frac{1}{2r} - \frac{1}{2r} \right) = S \frac{2r - 2r}{2r \cdot 2r}$$

$$\frac{2r \cdot 2r}{2r - 2r} = S$$

$$S \left(\frac{2r}{2r} - \frac{2r}{2r} \right) = 4r$$



$$25x^2 - y^2 - 9z^2 = -6zy$$

$$y^2 + 3z^2$$

$$8 + \frac{x}{y} = \frac{15x}{2y}$$

$$8yz + xz = 15xy$$

$$yz = \frac{15xy - xz}{8}$$

$$45$$

$$3x^2 + x + 1 \leq 1$$

$$x(3x+1) \leq 0$$

$$0$$

$$\frac{36}{60} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

$$\frac{24}{60} = \frac{2}{5}$$

$$1 = \frac{S}{2r} - \frac{S}{2r}$$

$$1 = S \left(\frac{1}{2r} - \frac{1}{2r} \right) = S \frac{2r - 2r}{2r \cdot 2r}$$

$$\frac{2r \cdot 2r}{2r - 2r} = S$$

$$S \left(\frac{2r}{2r} - \frac{2r}{2r} \right) = 4r$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$ab: 3^{14} \cdot 7^{15}$
 $bc: 3^{19} \cdot 7^{17}$
 $ac: 3^{23} \cdot 7^{42}$

$(abc)^2: 3^{14+19+23} \cdot 7^{30+42} = 3^{56} \cdot 7^{72}$

$abc: 3^{28} \cdot 7^{36}$

$abc = 3^{28} \cdot 7^{36}$

$abc: 3^{28}$

$ab = 3^{14} \cdot 7^{13} \cdot k_1$

$bc = 3^{19} \cdot 7^{17} \cdot k_2$

$ac = 3^{23} \cdot 7^{42} \cdot k_3$

$(abc)^2 = 3^{14+19+23} \cdot 7^{30+42} \cdot k_1 k_2 k_3$

$abc = 3^{28} \cdot 7^{36} \cdot \sqrt{k_1 k_2 k_3}$

$\frac{a+b}{a^2 - 9ab + b^2} = \frac{a+b}{(a-b)^2 - 7ab}$
 $\frac{a+b}{(a-b)^2 - 7ab} = 1$

$k_1, k_2, k_3 \geq 1$

$\frac{1+2}{1+2-36} = \frac{3}{-31}$

$\frac{2+3}{5} = \frac{5}{4+9-23}$

$\frac{3 \cdot 5 \cdot 5 - 5 \cdot 5 \cdot 6}{36} = \frac{-25 \cdot 7 \cdot 2}{2612} = \frac{47}{12}$

$3x^2 - 5x + 6 - \frac{a+b}{a^2 - 9ab + b^2} = \frac{a+b}{(a-b)^2 - 11ab}$

$(a+b; (a-b)^2 - 11ab) = \frac{3 \cdot 5 \cdot 5 + 5 \cdot 6 + 36}{936}$

$\frac{5}{5+6} = (a+b; -11ab) = \frac{25 - 4 \cdot 6 \cdot 3}{1}$

$(5+6)^2 - 11 \cdot 5 \cdot 6 = (a+b)^2 - 11ab = 1$

$\frac{3 \cdot 5 - 5 \cdot 5 + 6}{0} = \frac{-5 \cdot 2}{63}$
 $\frac{-5+12}{3} = \frac{7}{3}$

$\frac{-5+12}{3} = \frac{7}{3}$

$\frac{3 \cdot 5 \cdot 5}{6}$

$3x^2 - 5x + 6 - 3x^2 - x - 1 =$

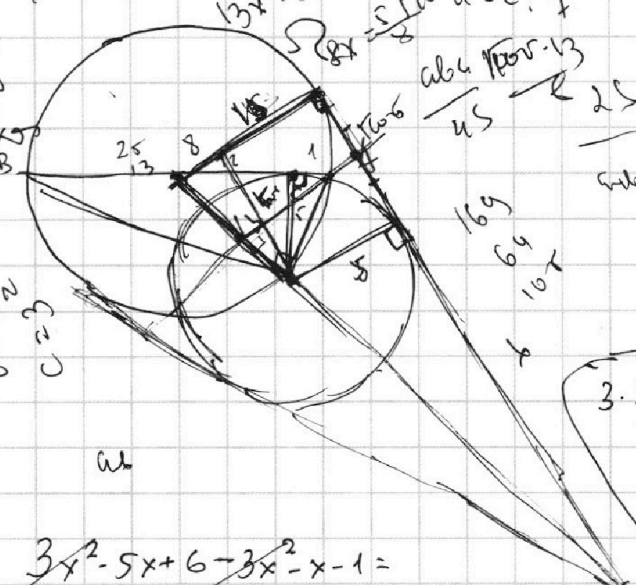
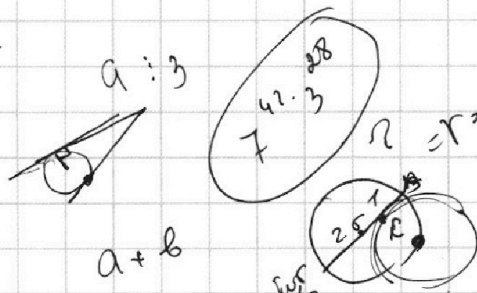
$= (5-6x)(1 + \sqrt{\quad})$

$-6x + 5 = (5-6x)(1 + \sqrt{\quad})$ или $5-6x=0$

$1 = \sqrt{\quad}$

$5 = 6x \Rightarrow x = \frac{5}{6}$

$2(x+y+z)$
 $x \geq 14$
 $x+2 \geq 19$
 $x+2 \geq 13$
 $x \geq 3$
 $6=3^2$
 $C=3$
 28
 ab



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{S}{v_m} + 1 = \frac{S}{v_0}$$

$$\frac{S}{v_m + 7} + \frac{3}{5} = \frac{S}{v_0 + 7}$$

$$v_0 + v_m = 49$$

$$v_0 = 49 - v_m$$

$$\frac{3}{5} = \frac{v_m(49 - v_m)}{(v_m + 7)(56 - v_m)}$$

$$3(v_m + 7)(56 - v_m) = 5v_m(49 - v_m)$$

$$-3v_m^2 + 3 \cdot 7 \cdot 56 + 3 \cdot 49v_m = -5v_m^2 + 5 \cdot 49v_m$$

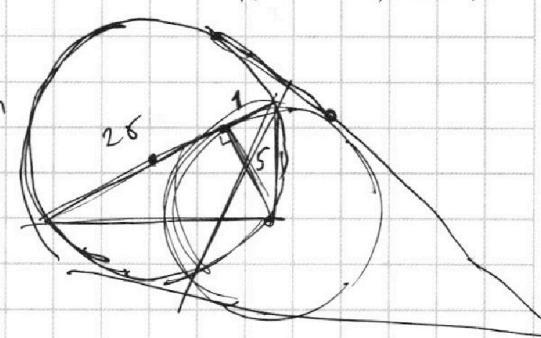
$$2v_m^2 - 2 \cdot 49v_m + 3 \cdot 7^2 \cdot 8 = 0$$

$$v_m^2 - 49v_m + 3 \cdot 7^2 \cdot 4 = 0$$

$$D = 49^2 - 4 \cdot 3 \cdot 7^2 = 7^2(49 - 48) = 7^2$$

$$v_m = \frac{49 \pm 7}{2} = \frac{49 - 7}{2} = \frac{42}{2} = 21 = v_r$$

$$v_m < v_y \quad \frac{49 + 7}{2} = \frac{56}{2} = 28$$



$$5x - y = 32$$

$$5x - 32 = y$$

$$25x^2 + y^2 = 64xy$$

$$25x^2 + (5x - 32)^2 = 64xy$$

$$25x^2 + 25x^2 - 320x + 1024 = 64xy$$

$$50x^2 - 320x + 1024 = 64xy$$

$$50x^2 - 320x + 1024 = 64x(5x - 32)$$

$$50x^2 - 320x + 1024 = 320x^2 - 2048x$$

$$-270x^2 + 1728x - 1024 = 0$$

$$270x^2 - 1728x + 1024 = 0$$

$$x = \frac{1728 \pm \sqrt{1728^2 - 4 \cdot 270 \cdot 1024}}{2 \cdot 270}$$

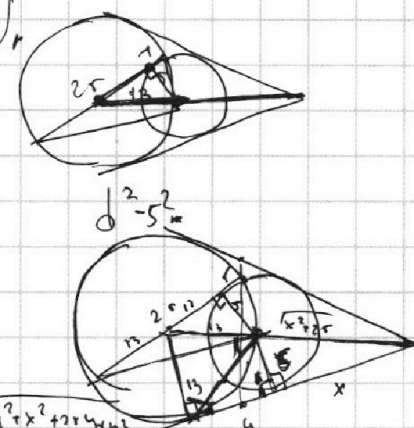
$$x = \frac{1728 \pm \sqrt{2985984 - 1105920}}{540}$$

$$x = \frac{1728 \pm \sqrt{1880064}}{540}$$

$$x = \frac{1728 \pm 1370}{540}$$

$$x = \frac{3098}{540} = \frac{1549}{270}$$

$$y = 5x - 32 = \frac{7745}{270} - 32 = \frac{7745 - 8640}{270} = -\frac{895}{270}$$



$$\frac{x}{5} = \frac{y+9}{13}$$

$$\frac{5}{13} = \frac{x}{x+y}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\left\{ \begin{aligned} S &= \frac{v_B v_M}{v_M - v_B} \\ S \left(\frac{v_M}{v_B} - \frac{v_B}{v_M} \right) &= 4g \\ \frac{S}{v_M + 7} + \frac{3}{5} &= \frac{S}{v_B + 7} \end{aligned} \right.$$

$$S \left(\frac{1}{v_B + 7} - \frac{1}{v_M + 7} \right) = S \frac{v_M + 7 - v_B - 7}{(v_M + 7)(v_B + 7)}$$

$$\frac{v_B v_M (v_M - v_B)}{(v_M - v_B)(v_M + 7)(v_B + 7)} = \frac{v_B v_M}{(v_M + 7)(v_B + 7)}$$

$$\frac{v_M^2 v_B}{v_M - v_B} - \frac{v_B^2}{v_M - v_B} = 4g$$

$$\frac{3}{5} = \frac{v_B v_M}{(v_M + 7)(v_B + 7)}$$

$$3(v_M v_B + 7v_M + 7v_B + 49) = 5v_M v_B$$

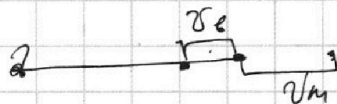
$$v_M^2 - v_B^2 = 4g(v_M - v_B) \quad 21v_M + 21v_B + 3 \cdot 4g - 2v_B v_M = 0$$

$$v_M^2 - 4g v_M + 2v_B(v_B + 4g) = 0 \quad v_M(21 - 2v_B) = -21v_B - 3 \cdot 4g$$

$$D = 4g^2 + 4(v_B^2 - 4g v_B) \quad v_M = \frac{3 \cdot 4g + 21v_B}{2v_B - 21} = \frac{21(7 + v_B)}{2v_B - 21}$$

$$-v_B^2 + 4g v_B \quad 4v_B^2 - 4 \cdot 4g v_B + 4g^2 \quad \frac{4g + \sqrt{4v_B^2 - 4 \cdot 4g v_B + 4g^2}}{2} = \frac{4g(7 + v_B)}{2v_B - 21}$$

$$v_M = \frac{4g + \sqrt{4v_B^2 - 4 \cdot 4g v_B + 4g^2}}{2}$$



$$\frac{v_B v_M}{(v_M + 7)(v_B + 7)} = \frac{3}{5}$$

$$S = \frac{v_B v_M}{(v_M + 7)(v_B + 7)} \quad v_M - v_B$$

$$\left\{ \begin{aligned} v_B + v_M &= 4g & v_B &= 4g - v_M \\ S &= \frac{v_B v_M}{v_M - v_B} = \frac{(4g - v_M)v_M}{v_M - 4g + v_M} = \frac{v_M(4g - v_M)}{2v_M - 4g} \end{aligned} \right.$$

$$\frac{2v_M - 4g}{v_M(4g - v_M)} = \frac{2v_M - 4g}{(v_M + 7)(56 - v_M)}$$

$$v_M = 4g - v_B$$

$$\frac{S}{v_M + 7} + \frac{3}{5} = \frac{S}{56 - v_M} - \frac{S}{v_M + 7}$$

$$\frac{3}{5^2} S \left(\frac{v_M + 7 + v_M - 56}{(v_M + 7)(56 - v_M)} \right)$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} 5x - 3y = 32 \\ \frac{8}{x} + \frac{1}{y} = \frac{15}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 25x^2 = (32 + y)^2 \\ \frac{8}{x} + \frac{1}{y} = \frac{15}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 25x^2 = 9z^2 + y^2 + 6yz \\ \frac{8}{x} + \frac{1}{y} = \frac{15}{2} \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 73 \\ 16 \\ \hline 6241 \\ 74 \\ \hline 3420 \\ \hline 2821 \\ 553 \\ \hline 6241 \end{array}$$

$$\frac{25x^2 - y^2 - z^2}{y^2 + 3z^2} = \frac{9z^2 + y^2 + 6yz - y^2 - z^2}{y^2 + 3z^2} = \frac{8z^2 + 6yz}{y^2 + 3z^2} = 2 \cdot \frac{4z^2 + 3yz}{y^2 + 3z^2}$$

$$= 2 \cdot \frac{3z^2 + y^2 + z^2 - y^2 + 3yz}{y^2 + 3z^2} = 2 \left(1 + \frac{z^2 - y^2 + 3yz}{y^2 + 3z^2} \right) = 2 + \frac{z^2 - y^2 + 3yz}{y^2 + 3z^2}$$

$$6yz + xz = 15xy$$

$$xz = 8yz - 15xy$$

$$xy = y(8z - 15x)$$

$$xz = (15x - 32)(8z - 15x)$$

$$5 \cdot 8xz - 5 \cdot 15x^2 - 24z^2 + 3 \cdot 15xz = \frac{-10z^2 - 30xz}{25x^2 + 12z^2 - 30xz} = -10 \cdot \frac{z^2 + 3xz}{25x^2 + 12z^2 - 30xz}$$

$$xz = -24z^2 - 5 \cdot 15x^2 + 517xz$$

$$xy = \frac{24z^2 + 5 \cdot 15x^2}{5 \cdot 17 - 1}$$

$$y = \frac{xz}{15x - 8z} = 5x - 32$$

$$15x - 8z \quad xz = (5x - 32)(15x - 8z)$$

$$xz = 5 \quad 43^2 - 24 \cdot 75$$

$$43 \cdot 40 + 43 = 4 \cdot 3 \cdot 10 \cdot 5 \cdot 3 = 1600 + 120 + 1209 = 9 \cdot 200 = 1800$$

Handwritten notes and calculations on the left margin, including numbers like 330, 180, 50, 72, 19, 10, 60, 93, 31, 31, 31, 93, 2, 43, 2^2 \cdot 43^2, 2^2 \cdot 24 \cdot 75, 2^2(43^2 - 24 \cdot 75).

$$\begin{array}{r} 25x^2 + 12z^2 - 30xz \\ 24 \\ \hline 75 \\ 120 \\ \hline 168 \\ 1800 \\ \hline 172 \\ 189 \\ \hline 18 \\ 29 \\ \hline 162 \\ 36 \\ \hline 198 \end{array}$$

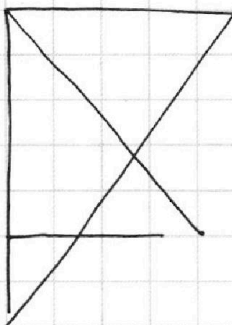
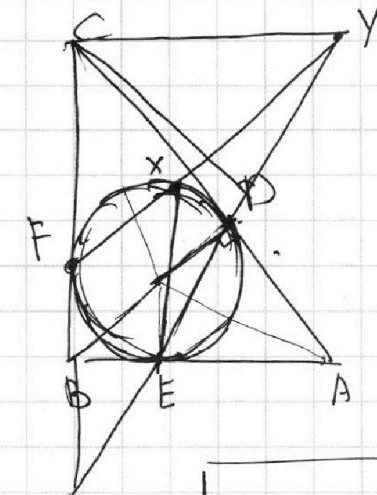
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

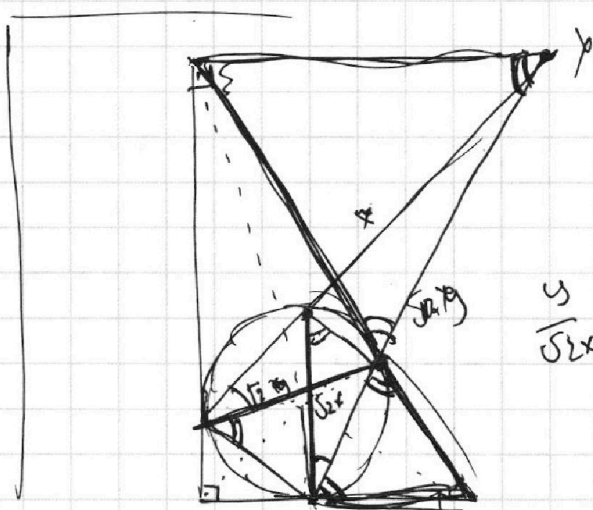
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$y \cdot x \cdot y \cdot F = y \cdot D \cdot y \cdot E$$

$$y \cdot x \cdot y \cdot F = y \cdot D \cdot y \cdot E$$

$$\sqrt{2} \cdot x \cdot y \cdot F = y \cdot D \cdot y \cdot E$$



$$\frac{y}{\sqrt{2}x}$$