



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 14



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $3^{14}7^{13}$, bc делится на $3^{19}7^{17}$, ac делится на $3^{23}7^{42}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-9ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2-5x+6}-\sqrt{3x^2+x+1}=5-6x.$$

4. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , диаметр AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC=1$ и $BC=25$. Найдите длину общей касательной к окружностям ω и Ω .
5. [4 балла] Ненулевые действительные числа x, y, z удовлетворяют равенствам

$$5x-y=3z \quad \text{и} \quad \frac{8}{x}+\frac{1}{y}=\frac{15}{z}.$$

Найдите наименьшее возможное значение выражения $\frac{25x^2-y^2-z^2}{y^2+3z^2}$.

6. [5 баллов] Из пункта A в пункт B выезжают одновременно велосипедист и мотоциклист. Оба они движутся с постоянной скоростью, и мотоциклист прибывает в пункт B на 1 час раньше велосипедиста. Если бы велосипедист ехал со своей скоростью в течение того времени, что понадобилось мотоциклисту на дорогу от A к B , а мотоциклист – в течение того времени, что понадобилось велосипедисту на этот путь, то мотоциклист проехал бы на 49 километров больше. Если бы скорость каждого из них возросла на 7 км/ч, то велосипедист приехал бы в B на 36 минут позже велосипедиста. Найдите расстояние между A и B .
7. [6 баллов] Вписанная окружность ω прямоугольного треугольника ABC с прямым углом B касается его сторон CA, AB, BC в точках D, E, F соответственно. Луч ED пересекает прямую, перпендикулярную BC , проходящую через вершину C , в точке Y ; X – вторая точка пересечения прямой FY с окружностью ω . Известно, что $EX = \sqrt{2}XY$. Найдите отношение $AD : DC$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



Пусть $ac:4^{42}$, то и $abc:4^{42}$, поскольку $a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}, c \in \mathbb{N}$. $ab:3^{14}, bc:3^{19}, ac:3^{23} \Rightarrow$

$$\Rightarrow ab \cdot bc \cdot ac: 3^{14} \cdot 3^{19} \cdot 3^{23} = 3^{56} \Leftrightarrow (abc)^2: 3^{56} \Leftrightarrow abc: 3^{28} \text{ (если } abc: 3^{28}, \text{ то } abc \cdot abc = (abc)^2: 3^{56}, \text{ что}$$

противоречит доказанному). Итак, поскольку $abc: 4^{42}$ и $abc: 3^{28}$, а 4^{42} и 3^{28} взаимно просты, то

$$abc: 3^{28} \cdot 4^{42} \Rightarrow abc \geq 3^{28} \cdot 4^{42}, \text{ поскольку } a, b \text{ и } c \text{ натуральные. Приведем пример, в котором}$$

$$abc = 3^{28} \cdot 4^{42} \text{ и условие выполняется: } a = 3^9 \cdot 4^{21}, b = 3^5, c = 3^{14} \cdot 4^{21}. \text{ Он работает, поскольку:}$$

$$ab = 3^{14} \cdot 4^{21} = 3^{14} \cdot 4^{13}, bc = 3^{19} \cdot 4^{21} = 3^{19} \cdot 4^{14}, ac = 3^{23} \cdot 4^{42} = 3^{23} \cdot 4^{42}, abc = 3^{28} \cdot 4^{42}.$$

$$\text{Ответ: } 3^{28} \cdot 4^{42}.$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
☐

2
☒

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Дробь $\frac{a}{b}$ несократима $\Rightarrow$ у a и b нет общих делителей. Рассмотрим число m , на которое можно сократить дробь $\frac{a+b}{a^2-ab+b^2}$. Так дробь можно сократить на это число, то $a+b \div m$ и $a^2-ab+b^2 \div m$. $a^2-ab+b^2 = (a+b)^2 - 11ab \Rightarrow (a+b)^2 - 11ab \div m \Rightarrow 11ab \div m$ (т.к. $a+b \div m$). ~~Если $a \div m$, то~~

Докажем, что для $m > 11$ условия не выполняются. Предположим, что они выполняются. Если $a \div m$, то (т.к. у a и b нет общих делителей) $b \nmid m \Rightarrow a+b \nmid m$, что противоречит доказанному. Аналогично: если $b \div m$, то $a \nmid m \Rightarrow a+b \nmid m$, снова противоречие. Значит, $a \nmid m$ и $b \nmid m$. Отсюда следует, что (раз $11ab \div m$, но $a \nmid m$ и $b \nmid m$) $11 \div m$. Но $m > 11$, противоречие $\Rightarrow m \leq 11$. Приведем

пример, в котором $m=11$: $a=1$, $b=10$. ~~Тогда~~ Он подходит т.к. дробь $\frac{a}{b} = \frac{1}{10}$ несократима, а

числитель и знаменатель дроби $\frac{a+b}{a^2-ab+b^2} = \frac{1+10}{1-11+10} = \frac{11}{0} = \frac{11}{11}$ можно сократить на $m=11$.

Ответ: 11.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Возведем обе части уравнения в квадрат (это преобразование может добавить лишние корни уравнения, но в конце мы сделаем проверку):

$$(3x^2 - 5x + 6) + (3x^2 + x + 1) - 2\sqrt{3x^2 - 5x + 6} \cdot \sqrt{3x^2 + x + 1} = 25 - 60x + 36x^2$$

$$2\sqrt{(3x^2 - 5x + 6)(3x^2 + x + 1)} = -30x^2 + 56x - 18$$

$$\sqrt{(3x^2 - 5x + 6)(3x^2 + x + 1)} = -15x^2 + 28x - 9$$

$$(3x^2 - 5x + 6)(3x^2 + x + 1) = (-15x^2 + 28x - 9)^2 \quad (\text{снова возведем обе части в квадрат})$$

$$9x^4 - 12x^3 + 16x^2 + x + 6 = 225x^4 - 84x^3 + 105x^2 - 504x + 81$$

$$216x^4 - 72x^3 + 108x^2 - 505x + 75 = 0$$

$$(216x^4 - 180x^3) + (108x^3 - 90x^2) + (18x^2 - 940x) + 75 = 0$$

и может добавить лишние корни

Преобразуем исходное выражение и возведем обе части в квадрат (это преобразование может добавить лишние корни, но в конце мы сделаем проверку):

$$\sqrt{3x^2 - 5x + 6} = (5 - 6x) + \sqrt{3x^2 + x + 1}$$

$$3x^2 - 5x + 6 = (5 - 6x)^2 + (3x^2 + x + 1) + 2(5 - 6x)\sqrt{3x^2 + x + 1}$$

$$(5 - 6x)^2 + 6x - 5 + 2\sqrt{3x^2 + x + 1}(5 - 6x) = 0$$

$$(5 - 6x)(5 - 6x - 1 + 2\sqrt{3x^2 + x + 1}) = 0$$

$$(5 - 6x)(6x - 4 - 2\sqrt{3x^2 + x + 1}) = 0$$

$(5 - 6x)(3x - 2 - \sqrt{3x^2 + x + 1}) = 0$. Один корень мы нашли — это $x = \frac{5}{6}$ ($5 - 6x = 0$). Если предположить, что $x \neq \frac{5}{6}$, то $\sqrt{3x^2 + x + 1} = 3x - 2 \Rightarrow 3x^2 + x + 1 = 9x^2 - 12x + 4 \Leftrightarrow 6x^2 - 13x + 3 = 0$. Дискриминант равен $13^2 - 4 \cdot 6 \cdot 3 = 169 - 72 = 97$, значит, корни равны $\frac{13 \pm \sqrt{97}}{12}$. Прямая проверка показывает, что все три корня подходят.

Ответ: $\left\{ \frac{5}{6}, \frac{13 - \sqrt{97}}{12}, \frac{13 + \sqrt{97}}{12} \right\}$.



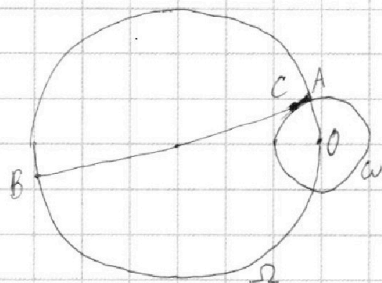
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$AC=1$$
$$BC=25$$

Пусть O — центр Ω . O лежит на $\Omega \Rightarrow \angle AOB = 90^\circ$ (т.к. AB — диаметр Ω). $OC \perp AB$, т.к. OC — радиус, проведенный в точку касания. Значит, OC — высота в прямоугольном треугольнике $AOB \Rightarrow$
 $\Rightarrow OC^2 = AC \cdot BC = 1 \cdot 25 = 25 \Rightarrow OC = 5$ (т.к. $OC \geq 0$). А диаметр Ω равен $AB = AC + BC = 1 + 25 = 26 \Rightarrow$ радиус Ω равен $\frac{26}{2} = 13$. Пусть радиусы ω и Ω — r и R соответственно. Тогда $r = 5$, $R = 13$. По формуле общей внешней касательной к двум окружностям (общую внутреннюю касательную к ω и Ω провести не удастся, т.к. O лежит на Ω ; расстояние между центрами ω и Ω равно R):
длина этой касательной равна $\sqrt{R^2 - (R - r)^2} = \sqrt{13^2 - (13 - 5)^2} = \sqrt{13^2 - 8^2} = \sqrt{169 - 64} = \sqrt{105}$.
Ответ: $\sqrt{105}$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



По условию:

(так как $x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0$, то все правые преобразования равносильны)

$$\begin{cases} 5x = 3z + y \\ 5x - y = 3z \\ \frac{8}{x} + \frac{1}{y} = \frac{15}{z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x = 3z + y \\ \frac{40}{5x} + \frac{1}{y} = \frac{15}{z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x = 3z + y \\ \frac{40}{3z+y} + \frac{1}{y} = \frac{15}{z} \end{cases}$$

Получим $\frac{25x^2 - y^2 - z^2}{y^2 + 3z^2} = \frac{(3z+y)^2 - y^2 - z^2}{y^2 + 3z^2} =$

$$= \frac{8z^2 + 6yz + y^2 - y^2 - z^2}{y^2 + 3z^2} = \frac{7z^2 + 6yz}{y^2 + 3z^2}$$

В ~~уравнении~~ $\frac{40}{3z+y} + \frac{1}{y} = \frac{15}{z}$ делим обе части на $(3z+y)yz$ и раскрываем скобки:

$$40yz + 1 \cdot (3z+y)z = 15(3z+y)y \Leftrightarrow 40yz + 3z^2 + yz = 45yz + 15y^2 \Leftrightarrow 15y^2 + 4yz - 3z^2 = 0.$$

Поделим уравнение на z^2 : $15\frac{y^2}{z^2} + 4\frac{y}{z} - 3 = 0$. Пусть $t = \frac{y}{z}$: $15t^2 + 4t - 3 = 0$. Дискриминант равен $4^2 - 4 \cdot (-3) \cdot 15 =$

$$= 16 + 180 = 196 = 14^2. \text{ Значит, корни равны } \frac{-4 \pm 14}{30} = \left\{ -\frac{18}{30}, \frac{10}{30} \right\} = \left\{ -0,6, \frac{1}{3} \right\}. \text{ Здесь есть два варианта:}$$

1. $\frac{y}{z} = t = -0,6$. В этом случае $y = -0,6z$, и:

$$\frac{25x^2 - y^2 - z^2}{y^2 + 3z^2} = \frac{8z^2 + 6yz}{3z^2 + y^2} = \frac{8z^2 + 6 \cdot (-0,6z)z}{3z^2 + (-0,6z)^2} = \frac{8z^2 - 3,6z^2}{3z^2 + 0,36z^2} = \frac{4,4z^2}{3,36z^2} = \frac{4,4}{3,36} = \frac{44}{336} = \frac{11}{84} = 1\frac{13}{42}.$$

2. $\frac{y}{z} = t = \frac{1}{3}$. В этом случае $y = \frac{1}{3}z$, и:

$$\frac{25x^2 - y^2 - z^2}{y^2 + 3z^2} = \frac{8z^2 + 6yz}{3z^2 + y^2} = \frac{8z^2 + 6 \cdot \frac{1}{3}z \cdot z}{3z^2 + (\frac{1}{3}z)^2} = \frac{8z^2 + 2z^2}{3z^2 + \frac{1}{9}z^2} = \frac{10z^2}{\frac{28}{9}z^2} = \frac{10}{28} = \frac{5}{14} = 3\frac{3}{14}.$$

Поскольку $1\frac{13}{42} < 3\frac{3}{14}$, то наибольшее возможное значение $\frac{25x^2 - y^2 - z^2}{y^2 + 3z^2}$ равно $1\frac{13}{42}$.

Ответ: $1\frac{13}{42}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Пусть скорости мотоциклиста и велосипедиста равны V_1 км/ч и V_2 км/ч соответственно, а расстояние от А до В равно S км. Тогда мотоциклист затратил на дорогу из А в В $\frac{S}{V_1}$ часов, а велосипедист — $\frac{S}{V_2}$ часов. Из условия следует, что $\frac{S}{V_2} - \frac{S}{V_1} = 1$ (час). Если бы велосипедист ехал $\frac{S}{V_1}$ часов, то он бы проехал $\frac{S}{V_1} \cdot V_2$ км. Если бы мотоциклист ехал $\frac{S}{V_2}$ часов, то он бы проехал $\frac{S}{V_2} \cdot V_1$ км. Из условия следует, что $\frac{S}{V_2} \cdot V_1 - \frac{S}{V_1} \cdot V_2 = 49$ (км). Если бы скорости обоих людей были на 7 км/ч больше, то они бы приехали в В из А: ~~за~~ мотоциклист — за $\frac{S}{V_1+7}$ час, велосипедист — за $\frac{S}{V_2+7}$ час. Из условия следует, что $\frac{S}{V_2+7} - \frac{S}{V_1+7} = 36$ (минут) = $\frac{36}{60}$ (часов) = 0,6 (часа). Итак, у нас есть 3 уравнения, и нужно найти S :

$$\begin{cases} \frac{S}{V_2} - \frac{S}{V_1} = 1 \\ \frac{S}{V_2} \cdot V_1 - \frac{S}{V_1} \cdot V_2 = 49 \\ \frac{S}{V_2+7} - \frac{S}{V_1+7} = 0,6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S \cdot \frac{V_1 - V_2}{V_1 V_2} = 1 \\ S \cdot \frac{V_1^2 - V_2^2}{V_1 V_2} = 49 \\ S \cdot \frac{V_1 - V_2}{(V_1+7)(V_2+7)} = 0,6 \end{cases}$$

Разделив второе уравнение на первое, получим:

$$\frac{V_1^2 - V_2^2}{V_1 V_2} = 49 \Leftrightarrow V_1 + V_2 = 49. \quad (V_1 \neq V_2, \text{ т.к. иначе не выполняется уравнение } \frac{S}{V_2} - \frac{S}{V_1} = 1).$$

Разделив третье уравнение на первое, получим:

$$\frac{V_1 V_2}{(V_1+7)(V_2+7)} = 0,6 \Leftrightarrow V_1 V_2 = 0,6 \cdot (V_1 V_2 + 7(V_1 + V_2) + 49) \Leftrightarrow 0,4 V_1 V_2 = 0,6 \cdot 7 \cdot 49 + 0,6 \cdot 49 \Leftrightarrow V_1 V_2 = \frac{48 \cdot 49}{0,4} = 12 \cdot 49.$$

Поскольку $V_1 + V_2 = 49$ и $V_1 V_2 = 12 \cdot 49$, то по теореме Виета, V_1 и V_2 — корни уравнения $x^2 - 49x + 12 \cdot 49 = 0$. Дискриминант равен $49^2 - 4 \cdot 1 \cdot (12 \cdot 49) = 49^2 - 46 \cdot 49 = 49 = 7^2$, а корни равны $\frac{49 \pm 7}{2} = \{21; 28\}$. $V_1 - V_2 = \frac{1}{S} \cdot \frac{V_1 V_2}{V_1 V_2} = \frac{V_1 V_2}{S} > 0 \Rightarrow V_1 > V_2 \Rightarrow V_1 = 28$ (км/ч), $V_2 = 21$ (км/ч) $\Rightarrow S = 1 \cdot \frac{V_1 V_2}{V_1 - V_2} = \frac{28 \cdot 21}{28 - 21} = 84$ (км).

Все величины удовлетворяют ~~требованиям~~ ^{предположению} реальности (все скорости возможны развить в жизни).

Ответ: 84 километра.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



~~1.1~~ $a = 3^{d_1 p_1}, b = 3^{f_1 p_1}, c = 3^{g_1 p_1}$ (6) S, V_1, V_2

$d_1 + f_1 \geq 14, f_1 + g_1 \geq 19, d_1 + g_1 \geq 23$

$d_1 + f_1 + g_1 \geq \frac{14+19+23}{2} = 28$

$d_2 + f_2 \geq 13, f_2 + g_2 \geq 17, d_2 + g_2 \geq 42$

$d_2 + f_2 + g_2 \geq \frac{13+17+42}{2} = 36$

$abc \geq \sqrt{ab \cdot bc \cdot ca} = \sqrt{3^{14+19+23} \cdot 3^{13+17+42}} = \sqrt{3^{56} \cdot 3^{72}} = 3^{56+72} = 3^{128}$

Пример: $a = 3^{9 \cdot 2^1}, b = 3^{5 \cdot 2^1}, c = 3^{14 \cdot 2^1}$

(2) $(a, b) = 1$

$x^2 - 49x + 2549 = 0, D = 49^2 - 4 \cdot 2549$

$x^2 - 49x + 12^2 \cdot 49 = 0, D = 49^2 - 48 \cdot 49 = 49 = 7^2$

$V_1, V_2 = \frac{49 \pm 7}{2} = \{28, 21\} \Rightarrow V_1 = 28 \text{ км/ч}, V_2 = 21 \text{ км/ч}$

$a+b:m$

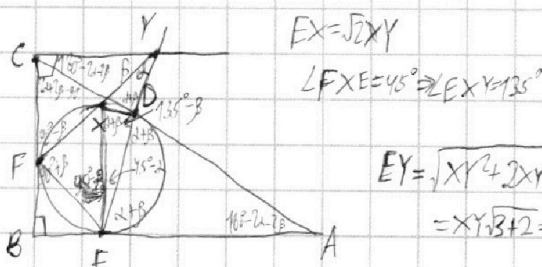
$a^2 - 9ab + b^2 : m \Rightarrow (a+b)^2 \nmid 9ab : m \Rightarrow 11ab : m$. Если $a:m$, то $b:m$ и наоборот $\Rightarrow a:m, b:m \Rightarrow 11:m \Rightarrow m \leq 11$

$\frac{a+b}{a^2-9ab+b^2} - \text{сокр. на } m \Rightarrow \frac{(a+b)^2 - 11ab}{a+b} - \text{сокр. на } m \Rightarrow \frac{11ab}{a+b} - \text{сокр. на } m$

$m=11, a=1, b=10$

$\frac{1}{10} - \text{несократима}$

$\frac{a+b}{a^2-9ab+b^2} = \frac{11}{1-90+100} = \frac{11}{11} - \text{сокр. на } 11$



$EX = \sqrt{2}XY$

$\angle EXE = 45^\circ \Rightarrow \angle EXY = 135^\circ$

$EY = \sqrt{XY^2 + 2XY^2 - 2XY \cdot \sqrt{2}XY \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} = XY\sqrt{3+2} = 5XY$

(3) $\sqrt{3x^2-5x+6} - \sqrt{3x^2+x+1} = 5-6x$

$3x^2-5x+6+3x^2+x+1-2\sqrt{(3x^2-5x+6)(3x^2+x+1)} = 5-6x$

$2\sqrt{(3x^2-5x+6)(3x^2+x+1)} = 6x^2+2x+2$

$625-250+450-2525+17325 = -1700+17325$

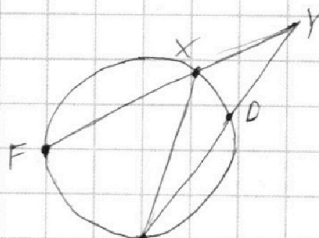
$\sqrt{3x^2-5x+6(3x^2+x+1)} = 3x^2+x+1$

$216 \cdot \frac{5^4}{6^4} - 42 \cdot \frac{5^3}{6^3} + 1038 \cdot \frac{5^2}{6^2} - 505 \cdot \frac{5}{6} + 75 = \frac{5^4}{6} - \frac{2 \cdot 5^3}{6} + \frac{148 \cdot 5^2}{6} - \frac{5 \cdot 505}{6} + \frac{75 \cdot 6}{6}$

$(3x^2-5x+6)/(3x^2+x+1) = (3x^2+x+1)^2$. $3x^2+x+1 \neq 0 \Rightarrow 3x^2-5x+6 = 3x^2+x+1 \Rightarrow 6x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{6}$

$28^2 + 2 \cdot 15 \cdot 9 = 784 + 270 = 1054$

$6x=5$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1

☐

2

☐

3

☐

4

☐

5

☐

6

☐

7

☐

 **МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

