



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^6 3^{13} 5^{11}$, bc делится на $2^{14} 3^{21} 5^{13}$, ac делится на $2^{16} 3^{25} 5^{28}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой AC в точке A , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке E , а катет BC – в точке F . Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1,4$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5, \quad \text{и} \quad \log_{11}^4 (0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,125y^3} (11^{-13}) - 5.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-15;90)$, $Q(2;90)$ и $R(17;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 180, $SA = BC = 20$.

а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .

б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 6$, а радиус сферы Ω равен 8.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача ~1: Пусть $a = 2^{d_1} \cdot 3^{\beta_1} \cdot 5^{t_1} \cdot x_1$, где $x_1 \not\equiv 2; x_1 \not\equiv 3; x_1 \not\equiv 5$
 $b = 2^{d_2} \cdot 3^{\beta_2} \cdot 5^{t_2} \cdot x_2$, где $x_2 \not\equiv 2; x_2 \not\equiv 3; x_2 \not\equiv 5$
 $c = 2^{d_3} \cdot 3^{\beta_3} \cdot 5^{t_3} \cdot x_3$, где $x_3 \not\equiv 2; x_3 \not\equiv 3; x_3 \not\equiv 5$

Из условия:
$$\left. \begin{aligned} ab &: 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{11} \\ bc &: 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{13} \\ ac &: 2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{28} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} 2^{d_1+d_2} \cdot 3^{\beta_1+\beta_2} \cdot 5^{t_1+t_2} \cdot x_1 \cdot x_2 &: 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{11} \\ 2^{d_2+d_3} \cdot 3^{\beta_2+\beta_3} \cdot 5^{t_2+t_3} \cdot x_2 \cdot x_3 &: 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{13} \\ 2^{d_1+d_3} \cdot 3^{\beta_1+\beta_3} \cdot 5^{t_1+t_3} \cdot x_1 \cdot x_3 &: 2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{28} \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} d_1+d_2 &\geq 6 \\ \beta_1+\beta_2 &\geq 13 \\ d_1+d_2 &\geq 11 \\ d_2+d_3 &\geq 14 \\ \beta_2+\beta_3 &\geq 21 \\ d_2+d_3 &\geq 13 \\ d_1+d_3 &\geq 16 \\ \beta_1+\beta_3 &\geq 25 \\ d_1+d_3 &\geq 28 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} 2(d_1+d_2+t_3) &\geq 6+14+16=36 \\ 2(\beta_1+\beta_2+t_3) &\geq 13+21+25=61 \\ 2(d_1+t_2+t_3) &\geq 11+13+28=52 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} d_1+d_2+t_3 &\geq 18 \\ \beta_1+\beta_2+t_3 &\geq 31 \\ d_1+t_2+t_3 &\geq 26 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} & \text{в целых неотрицательных} \\ & \text{числах} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} & \text{в целых неотрицательных} \\ & \text{числах} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

Из неравенств

$$\Rightarrow abc = 2^{d_1+d_2+d_3} \cdot 3^{\beta_1+\beta_2+\beta_3} \cdot 5^{t_1+t_2+t_3} \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \geq 2^{18} \cdot 3^{31} \cdot 5^{26} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{Ответ: } 2^{18} \cdot 3^{31} \cdot 5^{26}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

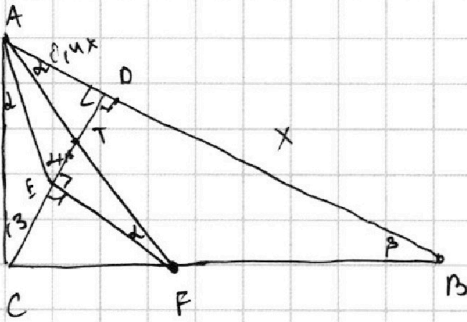
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача ~2



Одновременно
 CA - параллельна к медиане $\triangle AEF \Rightarrow$
 \Rightarrow То же самое \Rightarrow $EF \perp CD$ и параллельна
 $\angle EAC = \angle AFE = \alpha$

Известно $\angle B = \beta$

CD - высота $\triangle ABC \Rightarrow \angle CDA = 90^\circ$
 $\left. \begin{array}{l} \angle B = \beta \\ \angle C = 90^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \angle CAD = 90 - \beta$

$\Rightarrow \angle ACB = \beta$

$EF \parallel AB$ (по условию) $\Rightarrow EF \perp CD$
 $BD \perp CD$

$\angle AED = \angle EAC + \angle ECA$ (или внешний \angle $\triangle ACE$) \Rightarrow

$\Rightarrow \angle ABD = \alpha + \beta$

CD - высота $\Rightarrow \angle ADC = 90^\circ$
 $\left. \begin{array}{l} \angle ACD = \beta \text{ (по гр.)} \end{array} \right\} \Rightarrow \angle CAD = 90 - \beta$

$\left. \begin{array}{l} \angle AED = \alpha + \beta \\ \angle CDA = 90^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \angle DAE = 90 - \alpha - \beta$ (по сумме углов $\triangle ADE$)
 $\angle CAE = \alpha$ (по гр.)
 $\angle CAB = 90 - \beta$ (по гр.)

$EF \perp CD \Rightarrow \angle DEF = 90^\circ$
 $\left. \begin{array}{l} \angle TFE = \alpha \text{ (по гр.)} \end{array} \right\} \Rightarrow \angle ETF = 90 - \alpha$ (по сумме углов $\triangle TEF$)

$\angle ETF = 90 - \alpha \Rightarrow \angle ATD$ (или вертикальный к $\angle ETF$) $= \angle ETF =$
 $= 90 - \alpha$

$\left. \begin{array}{l} \angle ADT = 90^\circ \text{ (по гр.)} \\ \angle ATD = 90 - \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow \angle TAD = \alpha$ (по сумме углов $\triangle ATD$)

$\angle TAD = \alpha = \angle EAC = \alpha$ (по гр.) $\Rightarrow \triangle AEC \sim \triangle AFB$ (по двум углам)
 $\angle ACE = \beta = \angle ABF = \beta$
 \rightarrow соответ. стороны

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача №2 (продолжение)

$$\triangle AEC \sim \triangle AFB \Rightarrow \frac{AC}{AB} = \frac{EC}{FB}$$

пусть $DB = x$

используем $AB : BD = 1,4$ } $\Rightarrow AB = 1,4x \Rightarrow AD = 0,4x$
 $AB = x$

$DB = x$
 $AD = 0,4x$
 CD - высота в параллелограмме $\triangle CAB$ } $\Rightarrow CD = \sqrt{0,4x \cdot x} = x\sqrt{0,4}$

$AD = 0,4x$
 $CD = x\sqrt{0,4}$ } \Rightarrow по П. Пифагора $AC = \sqrt{0,4^2 x^2 + 0,4x^2} = x\sqrt{0,16 + 0,4} = x\sqrt{0,56}$

$DB = x$
 $CD = x\sqrt{0,4}$ } \Rightarrow по П. Пифагора $CB = \sqrt{0,4x^2 + x^2} = x\sqrt{1,4}$

$\frac{AC}{AB} = \frac{EC}{FB}$ (попр.) $\Rightarrow \frac{\sqrt{0,56}}{1,4} = \frac{EC}{FB}$

$\angle FEC = 90^\circ$ (так как $FE \perp CD$)
 $\angle BDC = 90^\circ$ (попр.)
 $\angle C$ - общий для $\triangle CEF$ и $\triangle CDB$ } $\Rightarrow \triangle CEF \sim \triangle CDB$ (по 2 углам)
 $\Rightarrow \frac{CE}{CD} = \frac{CF}{CB} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{CE}{x\sqrt{0,4}} = \frac{CB - FB}{CB} = \frac{x\sqrt{1,4} - FB}{x\sqrt{1,4}}$

пусть $CE = a$
 $FB = b$ } $\Rightarrow \frac{a}{x\sqrt{0,4}} = \frac{x\sqrt{1,4} - b}{x\sqrt{1,4}}$ } $\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{1,4} a = x\sqrt{1,4} - \sqrt{0,4} b \\ \sqrt{0,56} b = 1,4a \end{cases}$
 $\frac{\sqrt{0,56}}{1,4} = \frac{a}{b}$

$\Rightarrow b \frac{\sqrt{0,56} \cdot 1,4}{1,4} = x\sqrt{1,4} - \sqrt{0,4} b \Rightarrow b (\frac{\sqrt{0,56}}{1,4} + \sqrt{0,4}) = x\sqrt{1,4} \cdot 0,4$
 \rightarrow алгебраическое уравнение

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача №2 (продолжение)

$$b \cdot \left(\sqrt{\frac{0,56}{1,4}} + \sqrt{0,4} \right) = x \sqrt{1,4 \cdot 0,4} \Rightarrow b \cdot (2\sqrt{0,4}) = x \sqrt{1,4 \cdot 0,4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2b = x \sqrt{1,4} \Rightarrow b = x \frac{\sqrt{1,4}}{2} \Rightarrow a = \frac{\sqrt{0,56}}{1,4} \cdot \frac{\sqrt{1,4}}{2} x = x \frac{\sqrt{0,4}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow CE = x \frac{\sqrt{0,4}}{2}$$

$$FB = x \frac{\sqrt{1,4}}{2} \Rightarrow CF = CB - FB = x \sqrt{1,4} - x \frac{\sqrt{1,4}}{2} = \frac{x \sqrt{1,4}}{2}$$

$$\Rightarrow \text{По ПП. Треугольн. } EF = \sqrt{CF^2 - CE^2} = x \sqrt{\frac{1,4}{4} - \frac{0,4}{4}} = x \frac{1}{2} = \frac{x}{2}$$

$$CE = x \cdot \frac{\sqrt{0,4}}{2}$$

$$\Rightarrow S_{\triangle CEF} = EF \cdot CE \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot x \cdot \frac{\sqrt{0,4}}{2} \cdot \frac{x}{2} = x^2 \cdot \frac{\sqrt{0,4}}{8}$$

$$S_{\triangle ADC} = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot CD = \frac{1}{2} \cdot 0,4x \cdot \sqrt{0,4}x = x^2 \cdot \frac{0,4 \cdot \sqrt{0,4}}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{\triangle ADC}}{S_{\triangle CEF}} = \frac{\frac{0,4}{2}}{\frac{1}{8}} = \frac{0,4}{2} \cdot 8 = 4 \cdot 0,4 = 1,6$$

Ответ: 1,6

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача № 3

$$10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x \Rightarrow \arccos(\cos(\frac{\pi}{2} - x)) = \frac{9\pi - 2x}{10}$$

$$\arccos(\cos(\frac{\pi}{2} - x)) \in [0; \pi] \text{ и тогда пусть } \arccos(\cos(\frac{\pi}{2} - x)) = d \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} d \in [0; \pi] \\ \cos(\frac{\pi}{2} - x) = \cos(d) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} d \in [0; \pi] \\ \cos(\frac{\pi}{2} - x) - \cos d = 0 \quad (1) \end{array} \right\}$$

$$(1): \cos(\frac{\pi}{2} - x) - \cos d = 0 \Rightarrow -2 \sin \frac{\frac{\pi}{2} - x + d}{2} \cdot \sin \frac{\frac{\pi}{2} - x - d}{2} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} \frac{\frac{\pi}{2} - x + d}{2} = \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ \frac{\frac{\pi}{2} - x - d}{2} = \pi k, k \in \mathbb{Z} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + d - 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{2} - d - 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{array} \right\}$$

Из этих двух регионов получаем $d = \frac{9\pi - 2x}{10}$.

Рассмотрим 2 случая:

$$1) \left. \begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + d - 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ d = \frac{9\pi - 2x}{10} \\ d \in [0; \pi] \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + d - 2\pi n = \frac{9\pi - 10d}{2}, n \in \mathbb{Z} \\ d \in [0; \pi] \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} \pi + 2d - 4\pi n = 9\pi - 10d, n \in \mathbb{Z} \\ d \in [0; \pi] \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 12d = 8\pi + 4\pi n \\ d \in [0; \pi] \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} d = \frac{2\pi + \pi n}{3}, n \in \mathbb{Z} \\ d \in [0; \pi] \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \frac{2\pi + \pi n}{3} \geq 0 \\ \frac{2\pi + \pi n}{3} \leq \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2 + n \geq 0 \\ 2 + n \leq 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} n \geq -2 \\ n \leq 1 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n \in \{-2; -1; 0; 1\} \Rightarrow d \in \{0; \frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}; \pi\} \Rightarrow x \in \{4\pi + \frac{\pi}{2}; 2\pi + \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}; -\frac{\pi}{2}\}$$

$$2) \left. \begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} - d - 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ d = \frac{9\pi - 2x}{10} \\ d \in [0; \pi] \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} - d - 2\pi k = \frac{9\pi - 10d}{2}, k \in \mathbb{Z} \\ d \in [0; \pi] \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{сложно} \\ \text{реш.} \\ \text{методом} \end{array}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 3 (продолжение)

$$\Rightarrow J - 2d - 4JK \geq 9J - 10d, \quad d \in [0; 7]; k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{8J + 4JK}{8} = \frac{2J + JK}{2} = J + \frac{JK}{2} \in [0; 7]; k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} J + \frac{JK}{2} \geq 0 \\ J + \frac{JK}{2} \leq 7 \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 1 + \frac{k}{2} \geq 0 \\ 1 + \frac{k}{2} \leq 1 \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2 + k \geq 0 \\ 2 + k \leq 2 \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} k \geq -2 \\ k \leq 0 \end{array} \right\} \rightarrow$$

$$\Rightarrow k \in \{-2; -1; 0\} \Rightarrow d \in \left\{ 0; \frac{J}{2}; J \right\} \Rightarrow x \in \left\{ \frac{J}{2} + 4d; 2J; -\frac{J}{2} \right\}$$

Варианты возможных решений:

$$\left. \begin{array}{l} x = 4J + \frac{J}{2} = \frac{9J}{2} \\ x = 2J + \frac{J}{6} = \frac{13J}{6} \\ x = \frac{J}{2} + \frac{2J}{3} = \frac{3J + 4J}{6} = \frac{7J}{6} \\ x = -\frac{J}{2} \\ x = 2J \end{array} \right\} \rightarrow \text{Ответ: } \frac{9J}{2}; \frac{13J}{6}; \frac{7J}{6}; -\frac{J}{2}; 2J$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

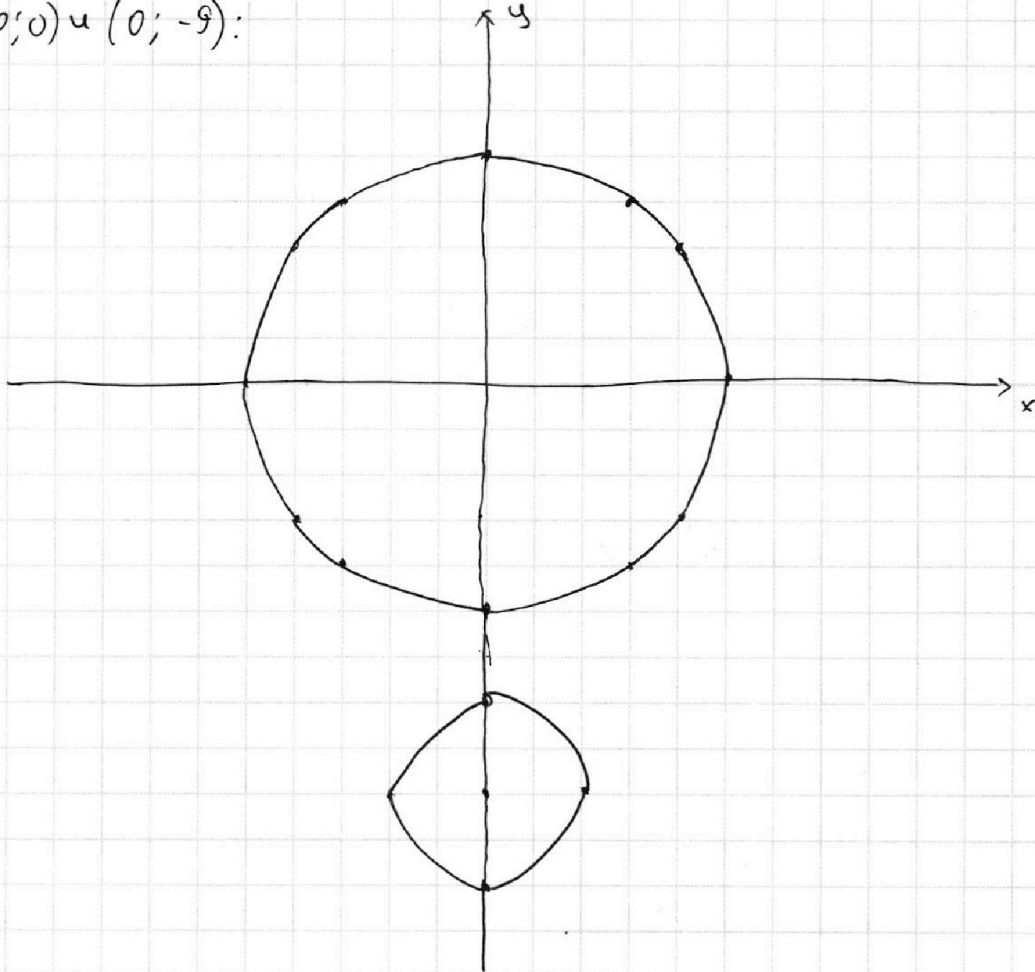


Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача ~ 4

$$\left. \begin{cases} 5x + 6ay - b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases} \right\} \Rightarrow \begin{cases} 5x + 6ay - b = 0 & (1) \\ \begin{cases} x^2 + y^2 = 25 & (2) \\ x^2 + (y+9)^2 = 4 \end{cases} \end{cases}$$

Упростим (2) на графике - это две окружности (указанные
(0;0) и (0; -9)):



При этом $5x + 6ay - b = 0$ - это линия.

Рассмотрим два случая $a=0$ и $a \neq 0$:

1) $a=0 \Rightarrow 5x = b$

$x = \frac{b}{5}$, очевидно, что найдем b , такое, что будут

дуги пересечения обе окружности по 2 пуга; найти $b=0$.

\rightarrow Алгоритм обратен

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 4 (продолжение)

2) $a \neq 0$ или

$$y = \frac{b + 5x}{6a} = \frac{b}{6a} - \frac{5x}{6a}$$

Заметим, что величина a или функции

назовем y , а x — это, величина b , которую

\Rightarrow величина b или y

получим все y или x с $y = \frac{b}{6a}$.

Тогда $y = \frac{b}{6a}$ или $x = \frac{b}{6a}$ или $y = \frac{b}{6a}$ или $x = \frac{b}{6a}$

или $y = \frac{b}{6a}$ или $x = \frac{b}{6a}$ или $y = \frac{b}{6a}$ или $x = \frac{b}{6a}$

Заметим, что y или x не более 2 или $y = \frac{b}{6a}$ или $x = \frac{b}{6a}$

или $y = \frac{b}{6a}$ или $x = \frac{b}{6a}$ или $y = \frac{b}{6a}$ или $x = \frac{b}{6a}$

В силу $y = \frac{b}{6a}$ или $x = \frac{b}{6a}$ или $y = \frac{b}{6a}$ или $x = \frac{b}{6a}$

или $y = \frac{b}{6a}$ или $x = \frac{b}{6a}$ или $y = \frac{b}{6a}$ или $x = \frac{b}{6a}$

или $y = \frac{b}{6a}$ или $x = \frac{b}{6a}$ или $y = \frac{b}{6a}$ или $x = \frac{b}{6a}$

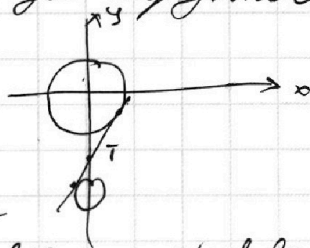
Она $y = \frac{b}{6a}$ или $x = \frac{b}{6a}$

или $y = \frac{b}{6a}$ или $x = \frac{b}{6a}$

или $y = \frac{b}{6a}$ или $x = \frac{b}{6a}$

или $y = \frac{b}{6a}$ или $x = \frac{b}{6a}$

или $y = \frac{b}{6a}$ или $x = \frac{b}{6a}$



\Rightarrow или $y = \frac{b}{6a}$ или $x = \frac{b}{6a}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 4 (продолжение)

а) прямые меньшего диаметра, чем окружность

касательная не может касаться дуги меньшего диаметра, так как в точке T они не имеют касания, а при касании касательная перпендикулярна радиусу. Если она окружностью она имеет окружность \Rightarrow они не имеют касания, а касательная перпендикулярна радиусу и окружность она касательная

Окружность \circ три точки касания касательная не может иметь \Rightarrow не касаются, так как имеют более 2 касания в T , а при касании перпендикулярны радиусу \circ окружности.

Найдем касание касательной:

$y = kx + b$ - уравнение касательной

Она имеет одно пересечение с дугой окружности \Rightarrow

$$\begin{cases} y = kx + b \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + (kx + b)^2 = 25 \\ x^2 + k^2x^2 + 2kbx + b^2 = 25 \Rightarrow x^2(k^2 + 1) + 2kbx + b^2 - 25 = 0 \end{cases}$$

имеет одно решение

$$D = 4k^2b^2 - 4(k^2 + 1)(b^2 - 25) \rightarrow 4(k^2b^2 - k^2b^2 + 25k^2 - b^2 + 25) = 0$$

1 решение $25k^2 - b^2 + 25 = 0$

Она имеет одно пересечение с малой окружностью:

$$\begin{cases} y = kx + b_1 \\ x^2 + (y + 2)^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + k^2x^2 + b_1^2 + 4 + 2kxb_1 + 4kx + 4b_1 = 4 \\ x^2(1 + k^2) + x(2kb_1 + 4k) + b_1^2 + 4b_1 = 0 \end{cases}$$

имеет 1 решение $D = (2kb_1 + 4k)^2 - 4(1 + k^2)(b_1^2 + 4b_1 + 4) = 0$

$$\Rightarrow k^2b_1^2 + 8k^2b_1 + 4k^2 + 4k^2b_1^2 + 8k^2b_1 + 4k^2 - b_1^2 - 4b_1 - 4 = 0$$

\rightarrow сократиме обротно делая

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №4 (продолжение)

$$\begin{cases} 25u^2 - b_1^2 = -25 \\ 4u^2 - b_1^2 - 18b_1 - 77 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^2 = \frac{b_1^2 + 18b_1 + 77}{4} \\ 25u^2 = b_1^2 - 25 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{25}{4}(b_1^2 + 18b_1 + 77) = b_1^2 - 25$$

$$25b_1^2 + 25 \cdot 18b_1 + 25 \cdot 77 = 4b_1^2 - 100 \Rightarrow 21b_1^2 + 25 \cdot 18b_1 + 25 \cdot 84 = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 7b_1^2 + 25 \cdot 6b_1 + 25 \cdot 27 = 0$$

$$D = 25^2 \cdot 6^2 - 4 \cdot 7 \cdot 25 \cdot 27 = 25(25 \cdot 36 - 4 \cdot 7 \cdot 27) = 100(25 \cdot 9 - 4 \cdot 27) =$$
$$= 100 \cdot 36 \Rightarrow b_1 = \frac{-25 \cdot 6 \pm 60}{14} \Rightarrow \begin{cases} b_1 = \frac{-150 + 60}{14} = \frac{-90}{14} = -\frac{45}{7} \\ b_1 = \frac{-150 - 60}{14} = -\frac{210}{14} = -15 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u^2 = \frac{15^2 - 25}{25} = \frac{15^2}{25} - 1 = 8 \\ u^2 = \frac{(-\frac{45}{7})^2 - 25}{25} = \frac{45^2}{7^2 \cdot 25} - 1 = \frac{81}{49} - 1 = \frac{81 - 49}{49} = \frac{81 - 50 + 1}{49} = \frac{32}{49} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u = \pm \sqrt{8} \\ u = \pm \sqrt{\frac{32}{49}} \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Но мы ищем обычно внутреннюю} \\ \text{касательную с касательными катетами} \Rightarrow \end{array}$$

$$\Rightarrow u > 0$$

$b_1 \in [-5; -7]$ - это означает, что все отрезки окружности лежат на

касательной внутренней она касается окружности строго между
центрами меньших дуг \Rightarrow она не является отрезком
на этой окружности.

$$\left. \begin{array}{l} -15 \notin [-5; -7] \\ -\frac{45}{7} \in [-5; -7] \end{array} \right\} \Rightarrow b_1 = -\frac{45}{7} \Rightarrow \begin{cases} u = \pm \sqrt{\frac{32}{49}} \\ u > 0 \end{cases} \Rightarrow u = \frac{\sqrt{32}}{7}$$

Значит нам подходит все радиус с катетами $\sqrt{32}$, $\sqrt{32}$, $\sqrt{32}$
и касательная по формуле $\Rightarrow -\frac{5}{6a} > \frac{\sqrt{32}}{7} \Rightarrow$ \rightarrow ответ
без деления.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №4 (продолжение)

$$-\frac{5}{6a} > \frac{\sqrt{32}}{7} \quad \text{или} \quad \frac{5}{6a} < -\frac{\sqrt{32}}{7} \\ \Rightarrow a < 0$$

$$\left. \begin{array}{l} -\frac{5}{6a} > \frac{\sqrt{32}}{7} \\ a < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow -\frac{5}{6} < \frac{a\sqrt{32}}{7} \Rightarrow a > \frac{-35}{6\sqrt{32}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a \in \left(\frac{-35}{6\sqrt{32}}; 0 \right)$$

Все корни уравнения больше, минимум квадратного уравнения
справа от нуля от оси Ox и все целые коэффициенты квадратного

уравнения $-\frac{5}{6a} < -\frac{\sqrt{32}}{7}$ минимум квадратного уравнения больше \Rightarrow

$$\Rightarrow \frac{5}{6a} > \frac{\sqrt{32}}{7} \Rightarrow a < \frac{35}{6\sqrt{32}} \Rightarrow a \in \left(0; \frac{35}{6\sqrt{32}} \right)$$

Итого получаем, что решением $a = 0; a \in \left(-\frac{35}{6\sqrt{32}}; 0 \right); a \in \left(0; \frac{35}{6\sqrt{32}} \right) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \text{Ответ: } \left(-\frac{35}{6\sqrt{32}}; \frac{35}{6\sqrt{32}} \right)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача ~ 5

$$\begin{cases} \log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_x^3 \frac{1}{121} - 5 \\ \log_{11}^4 (0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{\frac{1}{3}}^3 x^3 (11^{-13}) - 5 \end{cases}$$

Ограничения:

$$\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \\ 0,5y > 0 \Rightarrow y > 0 \\ 0,5y \neq 1 \Rightarrow y \neq 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log_{11}^4 x - \frac{6}{\log_{11} x} = \frac{-\frac{2}{3}}{\log_{11} x} - 5 \\ \log_{11}^4 (0,5y) + \frac{1}{\log_{11} (0,5y)} = \frac{-\frac{13}{3}}{\log_{11} (0,5y)} - 5 \end{cases} \Rightarrow$$

$$a = \log_{11} x$$

$$b = \log_{11} 0,5y$$

$$\begin{cases} 4a - \frac{6}{a} = -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{a} - 5 \\ 4b + \frac{1}{b} = -\frac{13}{3} \cdot \frac{1}{b} - 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4a^2 - 6 = -\frac{2}{3} - 5a \quad (1) \\ 4b^2 + 1 = -\frac{13}{3} - 5b \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (1): 4a^2 + 5a - 5\frac{1}{3} &= 0 \\ 12a^2 + 15a - 16 &= 0 \Rightarrow D = 225 + 4 \cdot 12 \cdot 16 = 225 + 768 = 993 \\ a &= \frac{-15 \pm \sqrt{993}}{24} \Rightarrow \log_{11} x = \frac{-15 \pm \sqrt{993}}{24} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2): 4b^2 + 5b + 1 + \frac{13}{3} &= 0 \\ 12b^2 + 15b + 16 &= 0 \\ \begin{cases} a^4 - \frac{6}{a} = -\frac{2}{3} - 5 \quad (1) \\ b^4 + \frac{1}{b} = -\frac{13}{3} - 5 \quad (2) \end{cases} & \Rightarrow \begin{cases} a^5 - 6 = -\frac{2}{3} - 5a \\ a^5 + 5a - 6 + \frac{2}{3} = 0 \\ 3a^5 + 15a - 18 + 2 = 0 \\ 3a^5 + 15a - 16 = 0 \end{cases} \\ (2): 3b^5 + 15b + 16 &= 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3a^5 + 15a - 16 = 0 \\ 3b^5 + 15b + 16 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3(a^5 + b^5) + 15(a+b) = 0 \\ (a+b)(a^4 - ba^3 + b^2a^2 + b^4 - b^3a + 5) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+b=0 \quad (1) \\ a^4 - ba^3 + b^2a^2 + b^4 - b^3a + 5 = 0 \end{cases} \rightarrow \text{убираем eq. (1)}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача ~ 5 (выполнение)

(1): $a + b = 0$

$b = -a$

$$\begin{cases} 3a^5 + 15a - 16 = 0 \\ -3a^5 - 15a + 16 = 0 \end{cases}$$

$\rightarrow 3a^5 + 15a - 16 = 0$

это уравнение имеет решение, так как

$3 \cdot (\frac{1}{2})^5 + \frac{15}{2} - 16 < 0$ и $3 \cdot 1 + 15 - 16 > 0 \Rightarrow$

\Rightarrow На отрезке от $\frac{1}{2}$ до 1 есть корень.

оба уравнения
выполнены и
одновременно

$a + b = 0 \Rightarrow \log_{11} x + \log_{11} 0,5y = 0 \Rightarrow \log_{11} \sqrt{x \cdot y} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{x \cdot y} = 1$

$x \cdot y = 2 \Rightarrow 2$ - одно из возможных значений

(2): $a^4 - ba^3 + b^2a^2 - b^3a + b^4 + 5 = 0$

Пусть $a + b = d$

$$\rightarrow a^4 - a^3(d-a) + (d-a)^2 a^2 - (d-a)^3 a + (d-a)^4 + 5 =$$

$$a^4 - a^3d + a^4 + a^2(d^2 + a^2 - 2da) -$$

$$- a(d^3 + a^3 - 3a^2d - 3da^2) +$$

$$+ d^2 a^2 + 5 = 3a^4 - a^3d + 5a^2d^2 - 2d^3a + 5 + d^4 + a^4 - d^3a - a^3d + d^2a^2 + 5$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №6

Выведем уравнения прямых, ограничивающих \square :

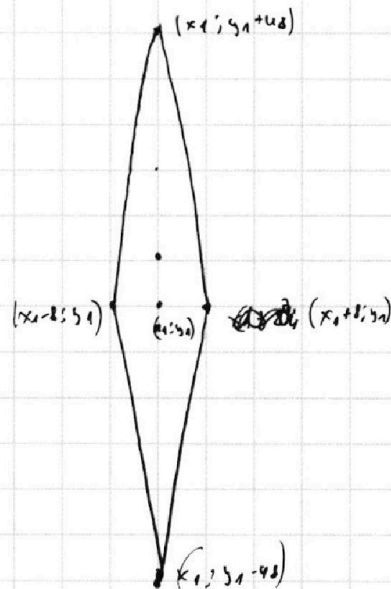
О и Р образуют прямую: $y = -\frac{90}{15}x = -6x$

О и Q образуют прямую: $y = 0$

Р и Q образуют: $y = 90$

А и В образуют: $y - 6(x - 17) = -6x + 17 \cdot 6 = 102 - 6x$

Заметим, что если зафиксировать точку $(x_1; y_1)$, то точка $(x_2; y_2)$
будет ограничена как точкой области:



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

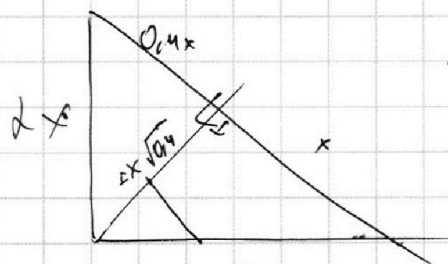
Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- 1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{AC}{AB} = \frac{EC}{FB}$$

$$80 - 15 - 2$$

$$\frac{CE}{ED} = \frac{CF}{FB} = \frac{CD - FB}{FB}$$

$$\frac{CE}{CD - CE} =$$

$$\frac{84}{56} = \frac{10}{44 - 2}$$

$$\frac{56}{100}$$

$$a = 0$$

$$x \frac{0.9}{5} - \frac{0.9}{9} = \frac{0.9}{x \cdot 5 - 9} = 4$$

$0 \neq 0$

$$60y - 5x = 609$$

$$\left. \begin{aligned} h = 15 + 9 + 2x \\ 5x - 2h = 25 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} h = 15 + 9 + 2x \\ 5x - 2(15 + 9 + 2x) = 25 \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} 0 = (15 + 9 + 2x)(5x - 2(15 + 9 + 2x)) \\ 0 = 9 + 60y + 5x \end{aligned} \right\}$$



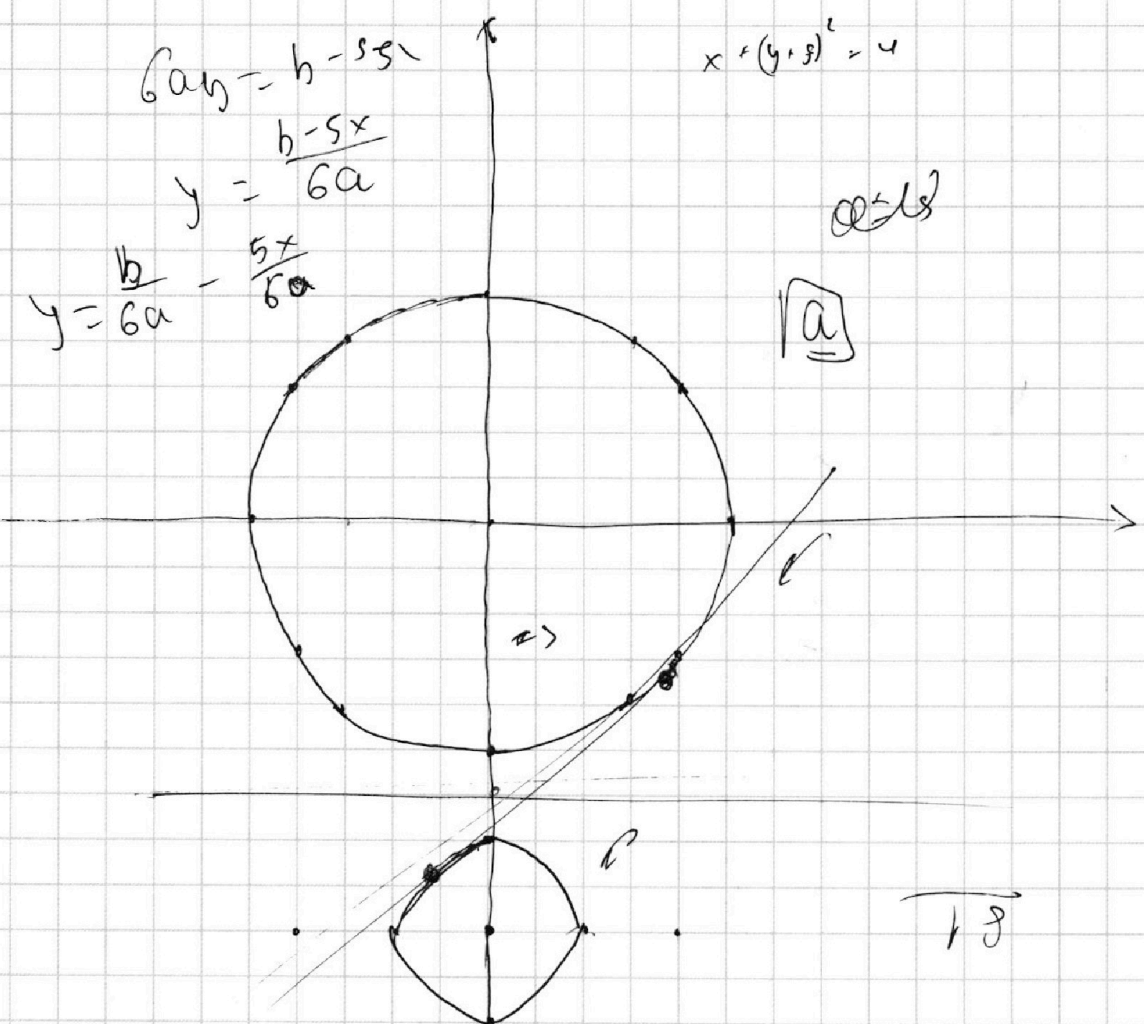
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1
- 2
- 3
- 4
- 5
- 6
- 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



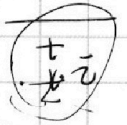
$6ay = b - 5sx$
 $y = \frac{b - 5sx}{6a}$
 $y = \frac{b}{6a} - \frac{5x}{6a}$

$x + (y + s)^2 = 4$

$\widetilde{882} = 210 + 224$

$210 + 224 = 434$

$25 + 11 = 36$
 $\frac{282}{572}$



$\widetilde{282}$

$\widetilde{175}$

$\frac{6}{57}$

$\frac{x}{5} = 6a$

$x = \frac{6a}{5}$

$x = \frac{6a}{5}$

$\frac{682}{572}$

$21 + 22 = 43$

150

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$ab : 2 \cdot 6 \cdot 15 \cdot 11$$

$$bc : 2 \cdot 14 \cdot 21 \cdot 5 \cdot 13$$

$$ac : 2 \cdot 16 \cdot 25 \cdot 28$$

$$abc_{\min} = ? \quad \begin{matrix} d_1+d_2+d_3 & \alpha_1+\beta_2+\beta_3 & d_1+d_2+d_3 \\ \cdot 2 & \cdot 3 & \cdot 5 \end{matrix}$$

$$a = 2 \cdot \alpha_1 \cdot \beta_1 \cdot \gamma_1$$

$$b = 2 \cdot \alpha_2 \cdot \beta_2 \cdot \gamma_2$$

$$c = 2 \cdot \alpha_3 \cdot \beta_3 \cdot \gamma_3$$

$d_1+d_2+d_3 \rightarrow \min$

$$\alpha_1 + \alpha_2 \geq 6$$

$$\alpha_2 + \alpha_3 \geq 14$$

$$\alpha_1 + \alpha_3 \geq 16$$

$$\beta_1 + \beta_2 \geq 15$$

$$\beta_2 + \beta_3 \geq 21$$

$$\beta_1 + \beta_3 \geq 15$$

$$\gamma_1 + \gamma_2 \geq 11$$

$$\gamma_2 + \gamma_3 \geq 13$$

$$\gamma_1 + \gamma_3 \geq 28$$

$$2(d_1+d_2+d_3) \geq 36$$

$$d_1+d_2+d_3 \geq 18$$

$$\frac{61}{2}$$

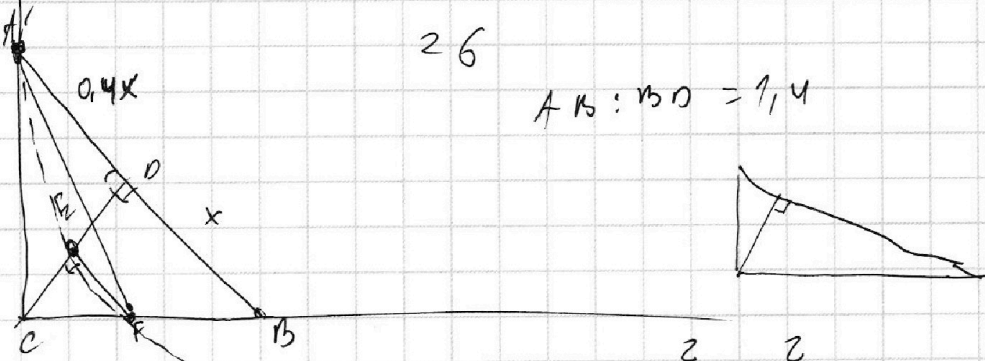
$$30,5$$

$$4 \cdot 6 + 18 = 61$$

$$24 + 28 = 30 \times 22 = 52$$

$$26$$

$$AK : BO = 1,4$$



$$\frac{2}{\alpha} - \frac{2}{\beta}$$

$$\frac{2}{\alpha} - \frac{2}{\beta}$$

$$\frac{2}{\alpha} - \frac{2}{\beta}$$

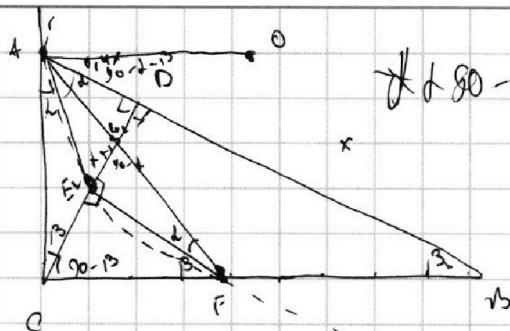
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\delta = 90^\circ - \alpha - \beta$$

$$\arccos\left(\frac{9x-2x}{10}\right) = \frac{\pi}{2} - x$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos \delta$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \cos \delta = 0 \Rightarrow$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$1) \quad x = \frac{\pi}{2} + \delta - 2\pi n$$

$$2) \quad x = \frac{\pi}{2} - 2\pi n - \delta$$

$$\delta = \frac{9x - 2x}{10}$$

$$10\delta = 9x - 2x$$

$$2x = 9x - 10\delta$$

$$x = \frac{9x - 10\delta}{2}$$

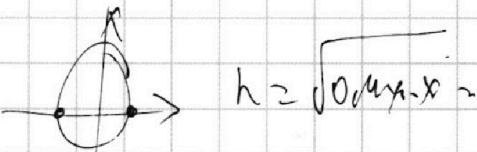
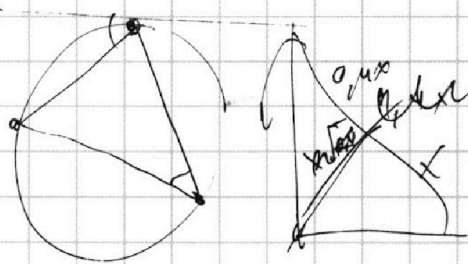
$$\frac{\pi}{2} + \delta - 2\pi n$$

$$\frac{\pi}{2} - \delta$$

$$\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3} - \frac{4\pi}{6}$$

$$\frac{\pi}{2} + 0 + 4\pi$$

$$\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} + 2\pi$$



$$\text{Если } \frac{\pi}{2} - x \in [0; \pi] \Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{0.4x}$$

$$\delta \in [0; \pi]$$

$$-2 \sin \frac{\frac{\pi}{2} - x + \delta}{2} \cdot \sin \frac{\frac{\pi}{2} - x - \delta}{2} = 0$$

$$\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2} - x + \delta}{2}\right) = 0$$

$$\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2} - x - \delta}{2}\right) = 0$$

$$\frac{\frac{\pi}{2} - x + \delta}{2} = \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{\frac{\pi}{2} - x - \delta}{2} = \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$1) \quad \frac{\pi}{2} + \delta - 2\pi n = \frac{9x - 10\delta}{2}$$

$$x + 2\delta - 4\pi n = 9x - 10\delta$$

$$12\delta = 8x + 4\pi n$$

$$\delta = \frac{2x + \pi n}{3}$$

В

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

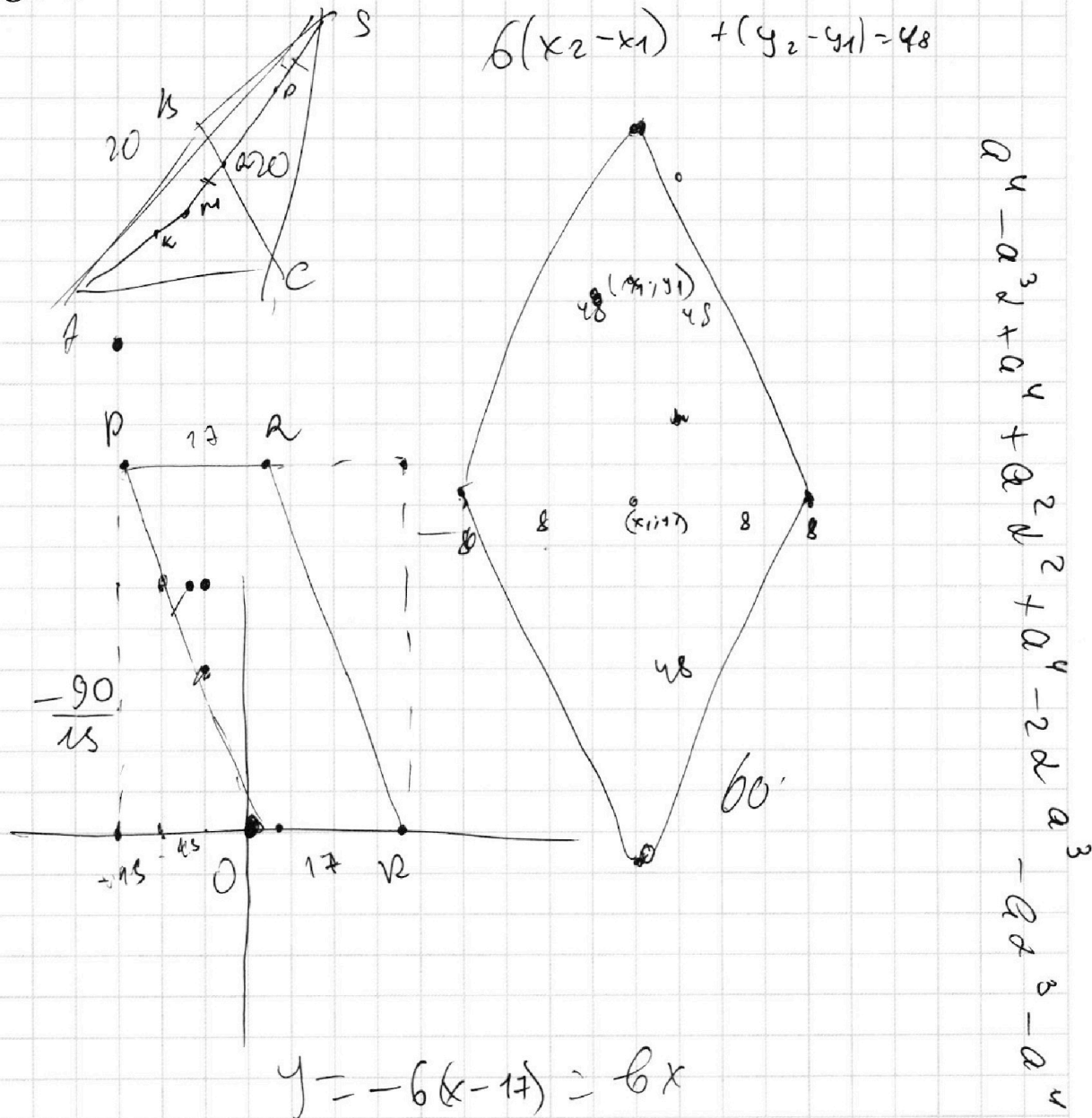


Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

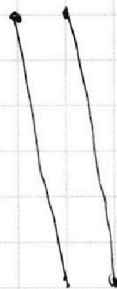


$$6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$$

$$6(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 48$$



$$y = -6(x - 17) = 6x$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x^{11} = \left(\log_x^3 \frac{1}{121} \right) - 5$$

$$\log_{11}^4 (0,5y) + \log_{0,5y}^{11} = \log_{\frac{1}{4}y^3}^{11} (11^{-15}) - 5$$

64 · 12 235 # ~~1217~~

640 + 128 $\frac{64}{12}$ ~~3517~~ $\frac{351}{13}$

1768 $\frac{64}{8}$ 280

228 $\frac{64}{8}$ 3317 71

893 $\frac{64}{8}$ 280 + 51

т.е. Δ

3 · 331 300

$$3 \cdot \frac{1}{3} 5 + \frac{15}{3} = 16$$

$$228 - 4 \cdot 12 \cdot 16$$

$$a + b = \log_{11} x + \log_{11} y$$

$$b^5 + 1 + \frac{15}{3} + 5 = 0$$

$$(a^4 - ba^3 + b^2a^2 - b^3a + b^4)(a+b) =$$

$$3b^5 + 15b + 16 = 0$$

$$= a^5 - ba^4 + b^2a^3 - b^3a^2 + b^4a + ba^4 - b^2a^3 + b^3a^2 - b^4a + b^5$$

$$\begin{array}{r} a^5 + b^5 \quad | \quad a+b \\ \hline a^5 + ba^4 \\ - b^5 - ba^4 \\ \hline -ba^4 - b^5 \\ \hline b^5 + b^2a^3 \end{array} (a+b) (a^4$$

$$ab = c \quad \log_{11} x \cdot \log_{11} y = c$$

$$a = \frac{c}{b} \quad \log_{11} x = \frac{c}{\log_{11} 0,5y}$$

$$(a^2 + b^2)^2 - a^2b^2 - ba(a^2 + b^2) + 5$$

$$(a^2 + b^2)(a^2 + b^2 - ba) - a^2b^2 + 5$$