



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^6 3^{13} 5^{11}$ ,  $bc$  делится на  $2^{14} 3^{21} 5^{13}$ ,  $ac$  делится на  $2^{16} 3^{25} 5^{28}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник  $ABC$ . Окружность, касающаяся прямой  $AC$  в точке  $A$ , пересекает высоту  $CD$ , проведённую к гипотенузе, в точке  $E$ , а катет  $BC$  – в точке  $F$ . Известно, что  $AB \parallel EF$ ,  $AB : BD = 1,4$ . Найдите отношение площади треугольника  $ACD$  к площади треугольника  $CEF$ .
3. [4 балла] Решите уравнение  $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$ .

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система уравнений

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют равенствам

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5, \quad \text{и} \quad \log_{11}^4(0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,125y^3} (11^{-13}) - 5.$$

Найдите все возможные значения произведения  $xy$ .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0;0)$ ,  $P(-15;90)$ ,  $Q(2;90)$  и  $R(17;0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$ .
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида  $SABC$ , медианы  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Сфера  $\Omega$  касается ребра  $AS$  в точке  $L$  и касается плоскости основания пирамиды в точке  $K$ , лежащей на отрезке  $AM$ . Сфера  $\Omega$  пересекает отрезок  $SM$  в точках  $P$  и  $Q$ . Известно, что  $SP = MQ$ , площадь треугольника  $ABC$  равна 180,  $SA = BC = 20$ .
  - а) Найдите произведение длин медиан  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$ .
  - б) Найдите двугранный угол при ребре  $BC$  пирамиды, если дополнительно известно, что  $\Omega$  касается грани  $BCS$  в точке  $N$ ,  $SN = 6$ , а радиус сферы  $\Omega$  равен 8.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



### Задача №1

Пусть  $st_p(n)$  - степень вхождения  $p$  в разложение  $n$  на простые. Заметим, что  $st_p(nm) = st_p(n) + st_p(m)$

Пусть  $st_2(a) = a_2$ ;  $st_3(a) = a_3$ ;  $st_5(a) = a_5$ ;  $st_2(b) = b_2$ ;  $st_3(b) = b_3$ ;  $st_5(b) = b_5$ ;  $st_2(c) = c_2$ ;  $st_3(c) = c_3$ ;  $st_5(c) = c_5$ .

По условию  $ab = 2^6 3^{15} 5^{11} \Rightarrow \begin{cases} a_2 + b_2 \geq 6 \\ a_3 + b_3 \geq 13 \\ a_5 + b_5 \geq 11 \end{cases}$ , аналогично

$$\begin{cases} a_2 + c_2 \geq 14 \\ b_3 + c_3 \geq 21 \\ b_5 + c_5 \geq 13 \end{cases} \quad \begin{cases} a_2 + c_2 \geq 16 \\ a_3 + c_3 \geq 25 \\ a_5 + c_5 \geq 28 \end{cases} \quad \begin{cases} a_3 + b_3 \geq 13 \\ a_5 + b_5 \geq 11 \end{cases}$$

Складывая первые, вторые и третьи неравенства соответственно из каждой системы, получаем:

$$\begin{cases} 2(a_2 + b_2 + c_2) \geq 36 \\ 2(a_3 + b_3 + c_3) \geq 59 \\ 2(a_5 + b_5 + c_5) \geq 52 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_2 + b_2 + c_2 \geq 18 \\ a_3 + b_3 + c_3 \geq 30 \\ a_5 + b_5 + c_5 \geq 28 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_2 + b_2 + c_2 \geq 18 \\ a_3 + b_3 + c_3 \geq 30 \\ a_5 + b_5 + c_5 \geq 28 \end{cases}$$

(м.к.  $a_2, b_2, c_2 \in \mathbb{N}$ )  
(м.к.  $a_3, b_3, c_3 \in \mathbb{N}$ )  
(м.к.  $a_5, b_5, c_5 \in \mathbb{N}$ )  
(м.к.  $a_5 + c_5 \geq 28$ )  
( $b_5 \geq 0$ )

$$\begin{cases} st_2(abc) \geq 18 \\ st_3(abc) \geq 30 \\ st_5(abc) \geq 28 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} abc : 2^{18} \\ abc : 3^{30} \\ abc : 5^{28} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m.k. (2^{18}, 3^{30}, 5^{28}) = 1) \\ abc : 2^{18} 3^{30} 5^{28} \Rightarrow abc \geq 2^{18} 3^{30} 5^{28} \end{cases}$$

Пример: пусть  $a = 2^4 3^9 5^{15}$ ,  $b = 2^2 3^4 5^0$ ,  $c = 2^{12} 3^{17} 5^{13}$ , тогда  $ab = 2^6 3^{13} 5^{15}$ ;  
 $: 2^6 3^{15} 5^{11}$ ;  $ac = 2^{16} 3^{26} 5^{28} : 2^{16} 3^{25} 5^{28}$ ;  $bc = 2^{14} 3^{21} 5^{13} : 2^{14} 3^{21} 5^{13}$ ;  $abc = 2^{18} 3^{30} 5^{28}$ .

Ответ:  $2^{18} 3^{30} 5^{28}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



### Задача №3

Пусть  $y = \arcsin(\sin x)$ ,  $y \in [0; \pi] \Rightarrow 0 \leq 10y \leq 10\pi \Rightarrow$   
 $\Rightarrow 0 \leq 9\pi - 2x \leq 10\pi \Leftrightarrow -9\pi \leq -2x \leq \pi \Leftrightarrow -\frac{9\pi}{2} \leq -x \leq \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow$   
 $-4\pi \leq \frac{\pi}{2} - x \leq \pi$ . Заметим, что  $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$ ,  $\cos y = \sin x \Rightarrow$   
 $\Rightarrow y$  - такое число  $\in [0; \pi]$ , что  $\cos y = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$

Рассмотрим все возможные случаи расположения  $\frac{\pi}{2} - x$

I случай:  $-4\pi \leq \frac{\pi}{2} - x \leq -3\pi$ , тогда  $y = \frac{\pi}{2} - x + 4\pi = \frac{9\pi}{2} - x$

$$\begin{cases} -4\pi \leq \frac{\pi}{2} - x \leq -3\pi \\ 10(\frac{9\pi}{2} - x) = 9\pi - 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{9\pi}{2} \leq -x \leq -\frac{7\pi}{2} \\ 10(9\pi - 2x) = 2(9\pi - 2x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{9\pi}{2} \leq x \leq \frac{7\pi}{2} \\ x = \frac{9\pi}{2} \end{cases}$$

$x = \frac{9\pi}{2}$  - один из ответов

II случай:  $-3\pi \leq \frac{\pi}{2} - x \leq -2\pi$ , тогда  $y = -(\frac{\pi}{2} - x + 2\pi) = x - \frac{5\pi}{2}$

$$\begin{cases} -3\pi \leq \frac{\pi}{2} - x \leq -2\pi \\ 10(x - \frac{5\pi}{2}) = 9\pi - 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{7\pi}{2} \leq -x \leq -\frac{5\pi}{2} \\ 10x - 25\pi = 9\pi - 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{5\pi}{2} \leq x \leq \frac{7\pi}{2} \\ x = \frac{17\pi}{6} \end{cases}$$

$\frac{5\pi}{2} \leq x \leq \frac{7\pi}{2} \Rightarrow \frac{15\pi}{6} \leq x \leq \frac{21\pi}{6}$   $x = \frac{17\pi}{6}$  - один из ответов

III случай:  $-2\pi \leq \frac{\pi}{2} - x \leq -\pi$ , тогда  $y = \frac{\pi}{2} - x + 2\pi = \frac{5\pi}{2} - x$

$$\begin{cases} -2\pi \leq \frac{\pi}{2} - x \leq -\pi \\ 10(\frac{5\pi}{2} - x) = 9\pi - 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{5\pi}{2} \leq -x \leq -\frac{3\pi}{2} \\ 25\pi - 10x = 9\pi - 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{3\pi}{2} \leq x \leq \frac{5\pi}{2} \\ x = 2\pi \end{cases}$$

$x = 2\pi$  - один из ответов  
ит. на след. листе

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



### Задача 13 (продолжение)

~~III~~ ~~случай:  $-2\pi \leq \frac{\pi}{2} - x \leq -\pi$ , тогда  $y = -(\frac{\pi}{2} - x + \pi)$~~   
 ~~$\begin{cases} -2\pi \leq \frac{\pi}{2} - x \leq -\pi \\ 10(x - \frac{3\pi}{2}) = 9\pi - 2x \end{cases}$~~

IV случай:  $-\pi \leq \frac{\pi}{2} - x \leq 0$ , тогда  $y = x - \frac{\pi}{2}$   
 $\begin{cases} -\pi \leq \frac{\pi}{2} - x \leq 0 \\ 10(x - \frac{\pi}{2}) = 9\pi - 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{3\pi}{2} \leq -x \leq -\frac{\pi}{2} \\ 10x - 5\pi = 9\pi - 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2} \\ x = \frac{7\pi}{6} \end{cases}$

$\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{3\pi}{6} \leq x \leq \frac{9\pi}{6}$   $x = \frac{7\pi}{6}$  - один из ~~решений~~ <sup>ответов</sup>

V случай  $0 \leq \frac{\pi}{2} - x \leq \pi$ , тогда  $y = \frac{\pi}{2} - x$   
 $\begin{cases} 0 \leq \frac{\pi}{2} - x \leq \pi \\ 10(\frac{\pi}{2} - x) = 9\pi - 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{\pi}{2} \leq -x \leq \frac{\pi}{2} \\ 5\pi - 10x = 9\pi - 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ x = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$

$x = -\pi/2$  - один из <sup>ответов</sup>

Ответ:  $x \in \{-\pi/2; 7\pi/6; 2\pi; 17\pi/6; 9\pi/2\}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



### Задача 14 (продолжение)

Допустим, что если  $-\frac{5}{6a} \in [k_2; k_1]$ , то прямая  $-\frac{5}{6a}x + \frac{b}{6a}$  не может иметь 4 пересечения с  $\omega_1$  и  $\omega_2$ . Пусть  $l_3$  - прямая с угл. коэф.  $k_3 \in [k_2; k_1]$ . Проведем прямую  $l_3$  через точку  $\Phi - l_3'$ . Пусть  $B_1, B_2, C_1, C_2$  - т. как на рисунке. т.к.  $k_3 \in [k_2; k_1]$ , то  $l_3'$  касается в углах  $\angle B_2 \Phi C_1$  и  $\angle B_1 \Phi C_2$ , если  $\Rightarrow$  ~~прямая~~  $\Rightarrow$  она не имеет не более 1 пересечения с катетами окр., если  $l_3$  лежит выше  $l_3'$ , то она не пересекает  $\omega_2$ , анал. жикно если ниже, то  $\omega_1 \Rightarrow$  она не может иметь 4 т. пересек. с  $\omega_1$  и  $\omega_2$ .

Если же  $-\frac{5}{6a} \notin [k_2; k_1]$ , то допустимо предположить в том же, что прямая проходит через т.  $\Phi$  и она пересечет  $\omega_1$  и  $\omega_2$  в 4 точках.  $\Rightarrow$  ~~прямая~~

~~Далее~~ Заметим, что  $k_2 = -k_1$ ,

найдем  $k_1$ . Заметим, что  $\Phi$  - центр инволюции с коэф.  $-\frac{2}{5}$  переводящей  $\omega_1$  в  $\omega_2 \Rightarrow \frac{\Phi O_1}{\Phi O_2} = \frac{5}{2} \Rightarrow \Phi O_1 = \frac{45}{7}$ ,  $O_1 B_1 = 5 \Rightarrow$  по Т. Пифагора в  $\Delta \Phi O_1 B_1$ :  $\Phi B_1 = \frac{20\sqrt{2}}{7} \Rightarrow \operatorname{tg} \angle = \frac{7}{4\sqrt{2}} \Rightarrow \Rightarrow k_1 = \operatorname{tg}(90^\circ - \angle) = \frac{4\sqrt{2}}{7} \Rightarrow k_2 = -\frac{4\sqrt{2}}{7}$  см. на след. листе

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача №4 (продолжение)

$$\begin{cases} -\frac{5}{6a} > \frac{4\sqrt{2}}{7} \\ -\frac{5}{6a} < -\frac{4\sqrt{2}}{7} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{5}{6a} + \frac{4\sqrt{2}}{7} < 0 \\ \frac{4\sqrt{2}}{7} - \frac{5}{6a} < 0 \end{cases} \quad a=7$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{35 + 24a\sqrt{2}}{42a} < 0 \\ \frac{24a\sqrt{2} - 35}{42a} < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \in \left(-\frac{35\sqrt{2}}{48}, 0\right) \\ a \in \left(0, \frac{35\sqrt{2}}{48}\right) \end{cases}$$

Ответ:  $a \in \left(-\frac{35\sqrt{2}}{48}, 0\right) \cup \left(0, \frac{35\sqrt{2}}{48}\right)$



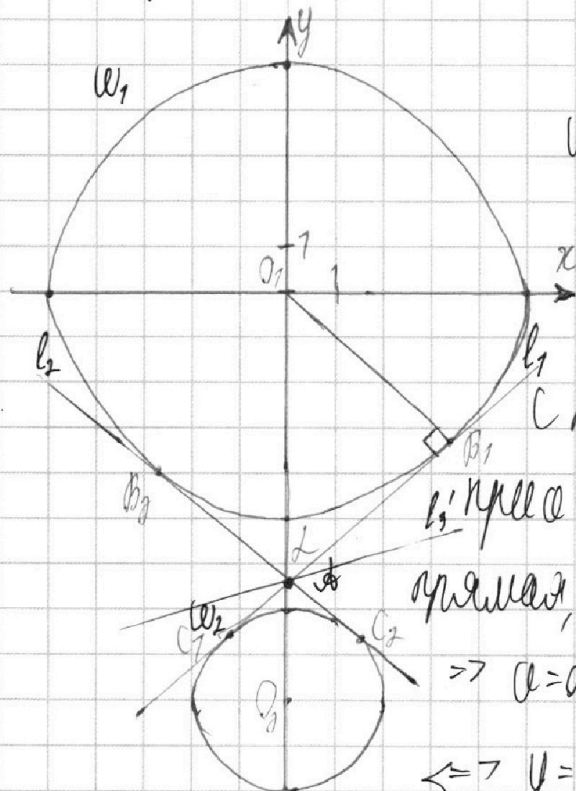
1  2  3  4  5  6  7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



### Задача 4

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x + 6ay - b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + (y+9)^2 - 4) = 0 \end{cases}$$



Второе ур-е задает 2 окр  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , изобразим их на рисунке, чтобы

стало видно, что решение уравнения

ур-ия  $5x + 6ay - b = 0$  будет иметь

с ними 4 пересечения. Заметим, что

$l_3: \text{прямая } a=0$ ; этот график - горизонтальная прямая, она не имеет точек пересечения с  $\omega_1$  и  $\omega_2$ .

$\Rightarrow a \neq 0$ , тогда ур-ие  $5x + 6ay - b = 0$

$\Leftrightarrow y = -\frac{5}{6a}x + \frac{b}{6a}$  - ур-ие прямой, зам-

етим, что при увеличении  $b$  ур. коэф. прямой не меняется  $\Rightarrow$

$\Rightarrow$  она просто поднимается или опускается, причем линия  $b$  не

может достигать значения  $\frac{b}{6a} \Rightarrow$  надо помнить при каких

указан коэфф. прямая имеет 4 пересечения с  $\omega_1$  и  $\omega_2$

Проведем к  $\omega_1$  и  $\omega_2$  2 общие касательные  $l_1$  и  $l_2$  как

на рисунке. Пусть  $A = l_1 \cap l_2$ , пусть  $K_1$  - ур. коэф.  $l_1$ ,

$K_2$  - ур. коэф.  $l_2$

и. на след. шаге

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №5.

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №6

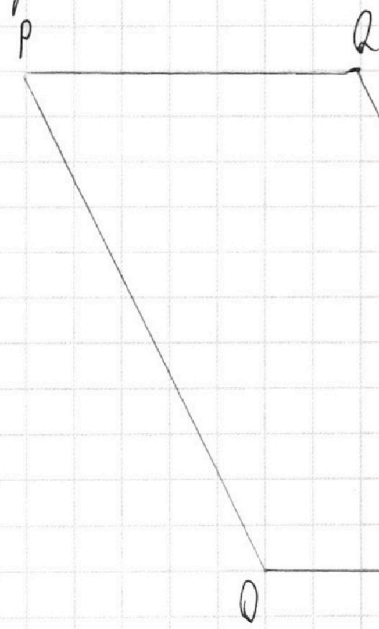
Пусть целая точка-точка с целыми координатами

Пусть  $6x_1 + y_1 = k$ , тогда

$$\begin{cases} 6x_1 + y_1 = k \\ 6x_2 + y_2 - k = 48 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = -6x_1 + k - \text{прямая } l_1 \\ y_2 = -6x_2 + k + 48 - \text{прямая } l_2 \end{cases}$$

Заметим, что если  $\alpha \in l_1, \beta \in l_2$ , то условие для них выполняется. Также заметим что

прямая  $l_1$  имеет уравнение  $y = -6x + 102$ ,  
а прямая  $PO$  уравнение  $y = -6x + k \in \mathbb{Z}$



Значит для катеты  $k \in [0; 54]$  прямые  $l_1$  и  $l_2$  будут пересекаться  $PQ \cap l_1$

Заметим что на прямой  $PO$  (внутри отрезка) лежит 16 точек с целыми координатами  $(0 - (-15) + 1)$ , также на катете прямой  $y = -6x + t$ , где  $t \in [0; 54]$  лежит по 16 целых точек, (т.к. эти прямые - сдвиги прямой  $y = -6x$  на целые расстояния) на прямой  $y = -6x + t$ , где  $t \in [0; 54]$  внутри  $PQ \cap l_1$  лежит по 15 целых точек

или на след. месте

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

### Задача №6. (продолжение)

Назовем парой прямых 2 прямые вида  $y_x = -6x + k$  и  $y = -6x + k + 48$ , где  $k \in [0; 54]$ ,  $k \in \mathbb{Z}$

Заметим, что А и В удобн. условием только если А летит на первой прямой из пары, а В на второй. Также, заметим, что на прямых в одной паре существует кол-во целых точек внутри  $P \& K O$ , т.к. если  $k \in \mathbb{Z}$ , то  $k : 6 \Leftrightarrow k + 48 : 6$ . Если на пря-

мых из пары по  $n$  точек, то пар  $(A, B)$  удобств. условием  $n^2$ . Заметим, что всего пар прямых 55 из них ~~10~~ <sup>целых</sup> ~~10~~ <sup>внутри P&K O</sup> пар на каждой прямой по 16 точек, на остальных 45 пар на каждой прямой по 15 целых точек внутри  $P \& K O \Rightarrow$  всего указанных кол-во пар точек равно

$$10 \cdot 16^2 + 45 \cdot 15^2 = 2560 + 10125 = 12685$$

Ответ: 12685