



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-13;26)$, $Q(3;26)$ и $R(16;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



н1

$$ab = 2^{15} \cdot 7^{11} \cdot n$$

$$bc = 2^{17} \cdot 7^{18} \cdot m$$

$$ac = 2^{23} \cdot 7^{39} \cdot k$$

$$(abc)^2 = 2^{15+17+23} \cdot 7^{11+39+18} \cdot mnk = 2^{55} \cdot 7^{68} \cdot mnk$$

$$abc = 7^{34} \cdot \sqrt{2^{55} mnk}$$

abc min, когда $\sqrt{2^{55} mnk}$ - минимален и равен натуральному числу, (m, n, k - натуральные)

$$7^{18} \cdot 7^{11} = 7^{29} < 7^{39} \Rightarrow ab^2 \geq ac \Rightarrow m \cdot n \geq 7^{10} \cdot 2k$$
$$2^{15} \cdot 2^{12} = 2^{27} < 2^{23} \Rightarrow$$

$$abc \geq 7^{34} \cdot 2^{28} \cdot \sqrt{7^{10} k^2} \geq ac = 2^{23} \cdot 7^{39} \cdot k$$

abc min, если $k=1$ abc min =

$$mn \geq 7^{10} \cdot 2k \Rightarrow abc \geq 7^{34} \cdot 2^{28} \cdot \sqrt{7^{10} \cdot k^2}$$

$$abc$$
 min, когда $k=1$ abc min = $7^{39} \cdot 2^{28}$

Пример:

$$a = 7^{11} \cdot 2^{10}$$
$$b = 2^6$$
$$c = 7^{28} \cdot 2^{12}$$

Ответ: $7^{39} \cdot 2^{28}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{a+b}{a^2-2ab+b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2-9ab} = k = \frac{a+b}{(a-b)^2-5ab} \quad \times 2.$$

~~$$\frac{1}{k} = \frac{a+b}{9ab} \cdot \frac{9ab}{a+b}$$~~

~~$a \cdot b \cdot \frac{9}{b}$ - сократили \Rightarrow a и b - взаимно простые~~

~~$$\frac{a+b}{a^2-2ab+b^2} \cdot b = \frac{(a+b) : kb, ((a+b)^2-9ab) : m}{a \cdot a - 2a + b} \Rightarrow 9ab : m$$~~

~~$a \cdot m, b \cdot m$ (м.к. a и b взаимно прот.)~~

~~$$9ab : m \Rightarrow 9 : m \Rightarrow m_{\max} = 9$$~~

~~Ответ: $m = 9$~~

$$\left. \begin{array}{l} a+b : m \\ ((a+b)^2 - 9ab) : m \end{array} \right\} \text{но уи.} \quad \left. \begin{array}{l} a \cdot m, b \cdot m \\ \text{м.к. } a \text{ и } b \text{ взаимно прот.} \end{array} \right\}$$

$$((a+b)^2 - 9ab) : m \Rightarrow 9ab : m \Rightarrow 9 : m \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_{\max} = 9$$

Ответ: $m = 9$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

нч.

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

$$\sqrt{(x^2 - 2x + 1) \cdot 3 - 1} - \sqrt{(x^2 - 2x + 1) \cdot 3 + 9x - 2} = 1 - 9x$$

$$1 - 9x = z$$

$$(x^2 - 2x + 1) \cdot 3 - 1 = t$$

$$\sqrt{t} - \sqrt{t - 2} = z$$

$$t - 2\sqrt{t^2 - t} + t = z^2$$

$$2t - t = z^2$$

$$z^2 - 2 + 2\sqrt{t^2 - t} = 0$$

$$z^2(z-1)^2 = 4t^2 - 4t$$

$$z^4 - 2z^3 + z^2 = 4t^2 - 4t$$

$$\sqrt{3(x-1)^2 - 1} - \sqrt{(x-1)^2 \cdot 3 - 1 + (9x-1)^2} = 1 - 9x$$

$$1 - 9x = -(x-1) \cdot 9 + 8$$

$$\sqrt{t} - z = \sqrt{t - 2}$$

$$t - 2 = t + z^2 - 2z\sqrt{t}$$

$$-z^2 - z = -2z\sqrt{t}$$

$$z^2 + z = 2z\sqrt{t}$$

$$z^2 + z + 1 = 4t$$

$$4t = z^2 + z + 1$$

$$4t = z^2 + z + 1$$

Подставим z и t .



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$(1-9x)^2 + 2(1-9x) + 1 = 12(x-1)^2 - 4$$

$$1 + 81x^2 - 18x + 2 - 18x + 1 = 12x^2 - 24x + 12 - 4$$

$$69x^2 - 12x - 4 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{12 \pm \sqrt{144 + 69 \cdot 16}}{138} = \frac{12 \pm \sqrt{1248}}{138} = \frac{12 \pm 8\sqrt{39}}{138}$$

$$= \frac{12 \pm 4\sqrt{78}}{138} = \frac{6 \pm 2\sqrt{78}}{69}$$

$$\text{Ответ: } x_1 = \frac{6 + 2\sqrt{78}}{69} \quad x_2 = \frac{6 - 2\sqrt{78}}{69}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



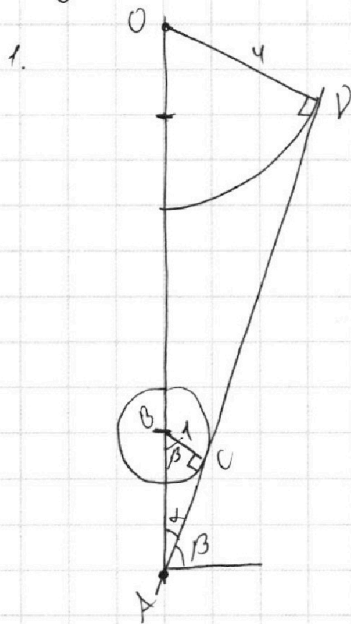
Для I неравенства ур-а:

$$ax + y - 8b = 0$$

$y = -ax + 8b$ - ур-е прямой с условиями $ax + 8b$ по условию - любые числа

На графике с окружностью может быть только 2 прямые, имеющие 2 решения - касательные к окружности.

В силу симметрии относительно Oy , наклоны прямых k_1 и k_3 , k_2 и k_4 равны по модулю и разнятся знаками.



$$\triangle AOD \sim \triangle ABC \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{OD}{BC} = \frac{AO}{AB} = \frac{AB+BO}{AB}$$

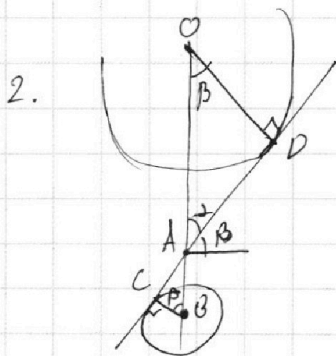
$$4 = \frac{AB+12}{AB}$$

$$3AB = 12$$

$$AB = 4$$

$$\operatorname{tg} \beta = -a = \frac{AC}{BC} = \frac{\sqrt{16-1}}{1} = \sqrt{15}$$

Или наклоны $k_2 = \sqrt{15}$, $k_4 = -\sqrt{15}$



$$\triangle ABC \sim \triangle AOD \Rightarrow \frac{OD}{CB} = \frac{OA}{AB} = \frac{12-AB}{AB}$$

$$5AB = 12, \quad AB = 2,4$$

$$\operatorname{tg} \beta = -a = \frac{CA}{CB} = \frac{\sqrt{\left(\frac{12}{5}\right)^2 - 1}}{1} = \sqrt{\frac{119}{5}}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№6.

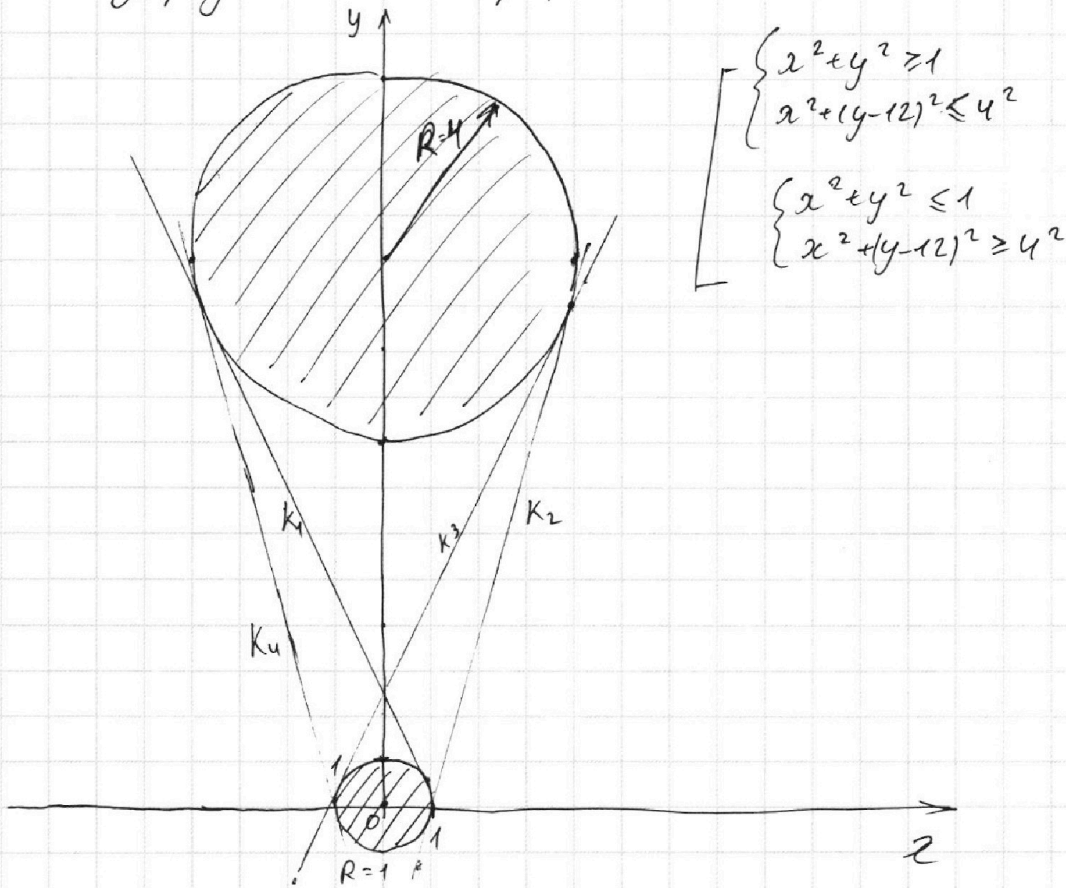
Для II неравенства:

$$(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0, \text{ или}$$

$$x^2 + y^2 - 1 \geq 0 \text{ и } x^2 + (y - 12)^2 - 16 \leq 0 \quad \text{или}$$

$$x^2 + y^2 - 1 \leq 0 \text{ и } x^2 + (y - 12)^2 - 16 \geq 0$$

Изобразим это на графике:



Видно, что области в двух окружностях ~~сост~~ и точки на самих окружностях соответствуют решениям системы (I)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Вопрос: Косуго. Наклон $k_3 = \frac{\sqrt{119}}{5}$, $k_4 = -\frac{\sqrt{119}}{5}$

Ответ: $a_1 = -\sqrt{15}$, $a_2 = +\sqrt{15}$, $a_3 = \frac{\sqrt{119}}{5}$, $a_4 = -\frac{\sqrt{119}}{5}$

Прямые с другими косуго наклона будут иметь
либо 0, либо 1, либо ∞ много решений.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

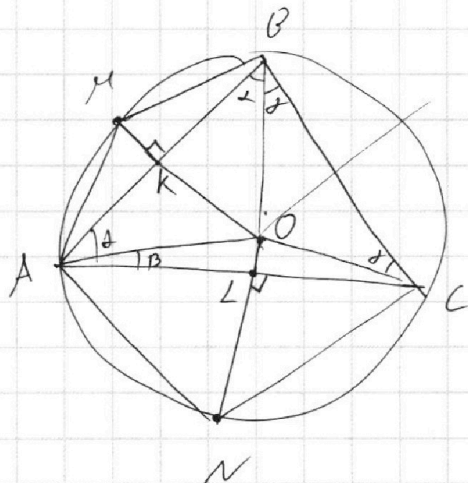
1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



~ Z



Дано: $MK = 5$, $ML = 2,5$

Решение:

$$\sphericalangle AN = \sphericalangle NC \Rightarrow AN = NC$$

$$\begin{array}{l} CN = AN \\ LN \text{ оду } \\ \sphericalangle CLN = \sphericalangle ALN = 90^\circ \end{array} \Bigg| \Rightarrow \triangle AON = \triangle CON \Rightarrow$$

$\Rightarrow AL = LC \Rightarrow L$ центр на $ON \Rightarrow LO$ - сеп пер $\triangle ABC$.

$$\sphericalangle AM = \sphericalangle MB \Rightarrow AM = MB$$

$$\begin{array}{l} MK \text{ оду } \\ AM = MB \\ \sphericalangle MKA = \sphericalangle MKB = 90^\circ \end{array} \Bigg| \Rightarrow \triangle AKM = \triangle BKM \Rightarrow AK = KB \Rightarrow$$

$\Rightarrow K$ центр на $MO \Rightarrow K$ сеп пер $\triangle ABC$

$$AO = R = MO = ON$$

$$\sin \alpha = \frac{KO}{AO} = \frac{R-5}{R}$$

$$\sin \beta = \frac{LO}{AO} = \frac{R-2,5}{R}$$

πO м.о сферов

$$\frac{\sin \alpha}{AL} = \frac{\sin 90}{AB}$$

$$\frac{\sin \alpha}{R-5} = \frac{\sin 90}{R}$$

si

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



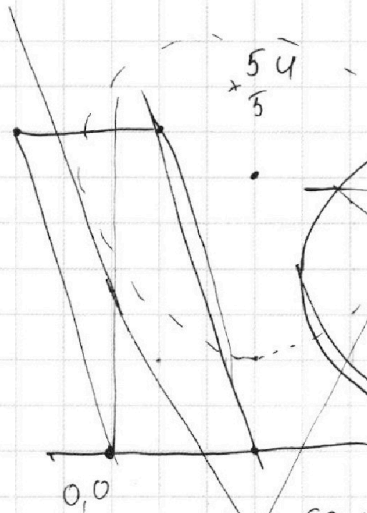
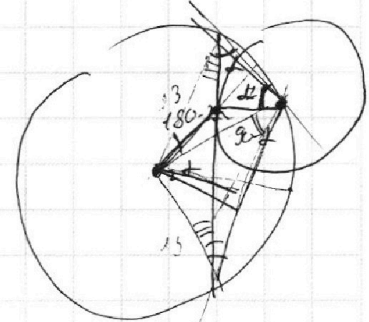
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



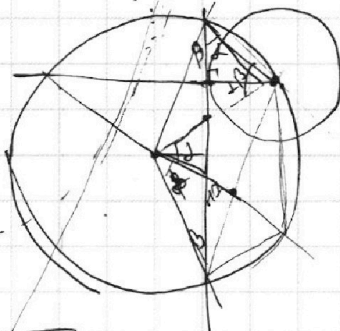
$$\begin{array}{r} 3 \\ +69 \\ 24 \\ +276 \\ 4 \\ 1104 \\ 144 \\ 1248 \end{array}$$

23.3

$$\begin{array}{r} 5 \\ +69 \\ +16 \\ 414 \\ 69 \\ 1104 \\ 144 \\ +248 \end{array} \quad \begin{array}{l} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \\ 13 \end{array}$$



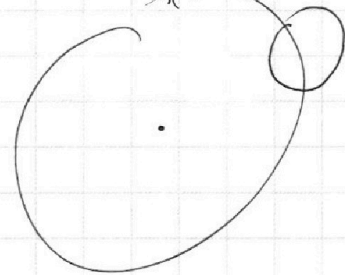
$$\begin{array}{r} 54 \\ \times 5 \end{array}$$



$$\begin{array}{r} 624 \\ 312 \\ 156 \\ 78 \\ 39 \\ 13 \end{array} \quad \begin{array}{l} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \\ 13 \end{array}$$

$$\sqrt{13^2 - 2^2} =$$

$$\begin{array}{r} 169 \\ -4 \\ \hline 120 \end{array}$$



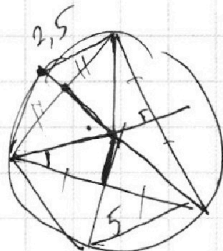
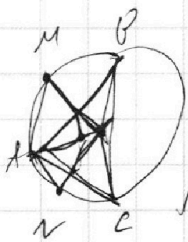
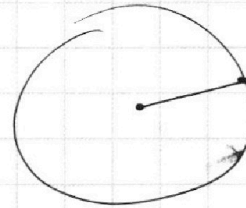
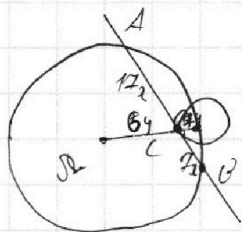
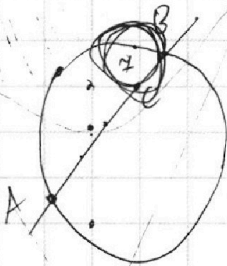
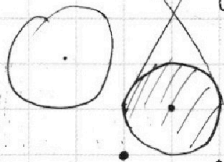
$ax + y = n$

$$\begin{array}{r} 138 \\ 69 \end{array} \Big| 2$$

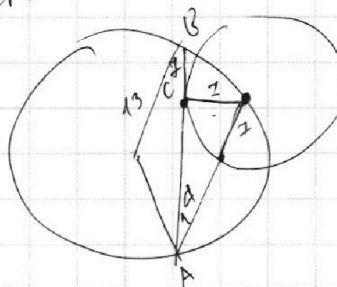
$y = -ax + b$

$$\begin{array}{r} 4 \\ 78 \\ 16 \\ 468 \\ 78 \\ 1248 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 144 \\ -25 \\ \hline 119 \end{array}$$



$\frac{AB}{\sin} = 2R$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

